

# Quantum Computing

## Esercizi

### 1 Riepilogo prima parte

**Esercizio 1.1** Si consideri lo stato  $|\psi\rangle = \frac{2+i}{3}|0\rangle - \frac{2}{3}|1\rangle$ . Se misuriamo  $|\psi\rangle$  nella base formata da  $|u\rangle = \frac{i+1}{2}|0\rangle + \frac{i-1}{2}|1\rangle$  e  $|u^\dagger\rangle = \frac{i+1}{2}|0\rangle - \frac{i-1}{2}|1\rangle$ , qual'è la probabilità che il risultato sia  $|u\rangle$ ?

**Esercizio 1.2** Dato un qubit nello stato  $\frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4}{5}|1\rangle$  e un qubit nello stato  $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$ , qual'è lo stato del sistema composto?

**Esercizio 1.3** Quale dei seguenti stati è entangled?

- a)  $|++\rangle$
- b)  $\frac{4}{5}|01\rangle - \frac{3}{5}|11\rangle$
- c)  $\frac{1}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle$
- d)  $\frac{1+i}{2\sqrt{2}}|++\rangle - \frac{1+i}{2\sqrt{2}}|+-\rangle + \frac{1-i}{2\sqrt{2}}|-+\rangle - \frac{1-i}{2\sqrt{2}}|--\rangle$

**Esercizio 1.4** Considera la matrice  $U$  corrispondente al circuito in Figura 1.

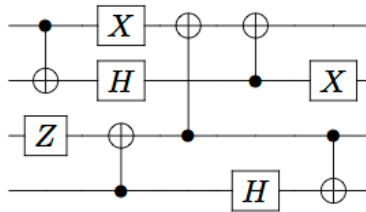


Figure 1: Un circuito su 4 qubit

- a) Qual'è il prodotto scalare tra la riga 3 e la riga 14 di questa matrice?
- b) Qual'è il prodotto scalare tra la riga 3 con sè stessa?

**Esercizio 1.5** Considera un circuito quantistico che trasforma l'input  $|0\rangle$  in  $|+\rangle$  e l'input  $|1\rangle$  in  $-|-\rangle$ . Qual'è l'output di questo circuito sull'input  $\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|-\rangle$ .

**Esercizio 1.6** Il circuito in Figura 2 controlla se  $|u\rangle = |v\rangle$ .

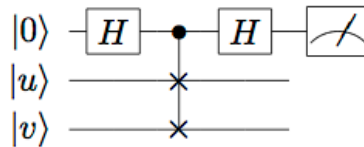


Figure 2: Un circuito che fa il test  $|u\rangle = |v\rangle$

- a) Se  $|u\rangle = |v\rangle = |+\rangle$ , qual'è la probabilità che il risultato della misurazione sia 0?
- b) Se  $|u\rangle = |+\rangle$  e  $|v\rangle = |-\rangle$ , qual'è la probabilità che il risultato della misurazione sia 0?

**Esercizio 1.7** Alice e Bob condividono uno stato  $a|++\rangle + b|--\rangle$  di cui Alice possiede il primo qubit e Bob il secondo. Alice misura il suo qubit nella base standard e manda il risultato a Bob. Se Bob vuole che lo stato del suo qubit risulti a  $|0\rangle + b|1\rangle$ , quali operazioni tra  $X, Z, H$  e  $I$  deve applicare nei seguenti due casi?

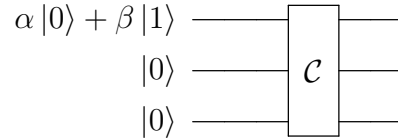
- se il risultato ottenuto da Alice è 0,
- se il risultato ottenuto da Alice è 1.

**Esercizio 1.8** Supponiamo che Alice voglia mandare a Bob due qubit nello stato di Bell  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ , applicando il protocollo del teletrasporto quantistico a ciascun qubit separatamente.

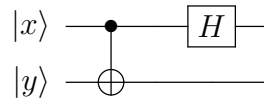
- a) Qual'è lo stato dei due qubit ricevuti da Bob?

b) Quanti bit classici Alice deve mandare a Bob?

**Esercizio 1.9** Descrivere una possibile implementazione del circuito  $\mathcal{C}$  in figura in modo da ottenere il risultato  $\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$  sulla configurazione di input riportata in figura.



**Esercizio 1.10** Per il circuito



come deve essere preparato lo stato  $|x\rangle|y\rangle$  in input per ottenere in output rispettivamente

- a) lo stato  $|00\rangle$ ,
- b) lo stato  $|11\rangle$ ,
- c) lo stato  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ ?

**Esercizio 1.11** Qual'è la sovrapposizione che risulta dopo aver applicato la trasformata di Hadamard  $H^{\otimes n}$  allo stato

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n})?$$

**Esercizio 1.12** Supponiamo che  $H^{\otimes n}|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$ . Determinare  $|\phi\rangle$ .

**Esercizio 1.13** Considera lo stato  $|\phi\rangle = \sum_{y \in \{0,1\}^n} \beta_y |y\rangle$  tale che  $\beta_y = 0$  se  $s \cdot y = 1 \pmod{2}$  e  $\beta_y = \frac{1}{\sqrt{2^n - 1}}$  se  $s \cdot y = 0 \pmod{2}$ , dove  $s$  è una qualche stringa diversa dalla stringa  $00 \dots 0$ .

- a) Se eseguiamo un Fourier sampling (cioè la trasformata di Hadamard seguita da una misurazione nella base standard) su  $|\phi\rangle$ , con quale probabilità otterremo  $s$ ?
- b) Con quale probabilità otterremo un risultato diverso da  $s$ ?