# Quantum Computing

Esercizi

## 1 Qubit

**Esercizio 1.1** *Mostra che lo stato di un qubit può essere espresso nella forma*

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}\left(\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle\right),$$

*dove $\gamma$, $\theta$ e $\phi$ sono numeri reali. Il fattore di fase $e^{i\gamma}$ non ha effetti sulla misurazione degli osservabili e può essere eliminato.*

**Esercizio 1.2** *Mostra che esiste una corrispondenza biunivoca tra i qubit*

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle$$

*e i punti della sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$, chiamata la* sfera di Bloch *(vedi Fig. 1), con $\theta$ e $\phi$ come coordinate sferiche di un punto della sfera.*

## 2 Misurazione quantistica

**Esercizio 2.1** *Verifica che solo uno dei due insiemi*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i\,|1\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(i\,|0\rangle - |1\rangle)\right\},$$

$$\left\{\frac{1}{2}(|0\rangle + \sqrt{3}\,|1\rangle), \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,|0\rangle - |1\rangle)\right\}$$

*è una base computazionale. Calcola le probabilità di misurare $\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$ in quella base computazionale.*

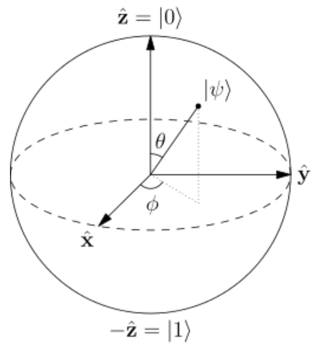



Figure 1: La sfera di Bloch

**Esercizio 2.2** *Considera lo stato quantistico*

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{e^{i\vartheta}}{\sqrt{2}}|1\rangle, \text{ con } \vartheta \in \mathbb{R}.$$

*Calcola le probabilità di misurare* $|\psi\rangle$ *nella base computazionale standard* $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ *e quelle ottenute misurando lo stesso stato nella base di Hadamard* $\{|+\rangle, |-\rangle\}$*, ricordando che* $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle$ *e* $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle$*.*

**Esercizio 2.3** *Calcola le probabilità di ottenere* $0, 1$ *oppure* $2$ *misurando i seguenti stati nella base computazione standard di un registro di tre qubit* $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$*:*

$$\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle \\
|\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{i}{2}|2\rangle \\
|\psi_3\rangle &= \frac{1+i}{3}|0\rangle + \frac{1-i}{3}|1\rangle + \frac{1+2i}{3}|2\rangle.
\end{aligned}$$

# 3 Trasformazioni lineari

**Esercizio 3.1** *Dimostra che*

- *la composizione di due funzioni lineari è lineare;*

- *se* $L_1, L_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *sono lineari allora anche* $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *definita come*

$$(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)(v) = \alpha_1 L_1(v) + \alpha_2 L_2(v)$$

  *è lineare;*

- *per* $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathbb{C}^2$, *la funzione* $|\psi\rangle\langle\phi| : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *definita, usando la notazione di Dirac, da* $|\psi\rangle\langle\phi|(|x\rangle) = \langle\phi|x\rangle|\psi\rangle$ *è lineare.*

**Esercizio 3.2** *Mostra che la matrice di rappresentazione del* NOT *nella base* $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ *è* $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. *Qual'è la matrice di rappresentazione nella base* $\{|+\rangle, |-\rangle\}$*?*

**Esercizio 3.3** *Verifica che*

- *una matrice è unitaria se e solo se le sue colonne (o le sue righe) formano una base ortonormale.*
- *la matrice del cambio di base è unitaria.*
- $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ *e deduci che se una funzione lineare ha una matrice di rappresentazione unitaria, allora la sua matrice di rappresentazione in qualsiasi base è unitaria.*

**Esercizio 3.4** *Mostra che*

$$\langle u|Av\rangle = \langle A^\dagger u|v\rangle.$$

*Deduci che una matrice* $M$ *è unitaria se e solo se preserva i prodotti interni, cioè se e solo se* $\langle Mu|Mv\rangle = \langle u|v\rangle$ *per ogni* $u, v \in \mathbb{C}^2$.

**Esercizio 3.5** *Dimostra che una matrice* $U$ *è unitaria se e solo se trasforma qubit in qubit.*

**Esercizio 3.6** *Mostra che ogni matrice unitaria* $U$ *può essere espressa come*

$$U = \begin{pmatrix} e^{i(\alpha-\beta/2-\delta/2)} \cos\gamma/2 & -e^{i(\alpha-\beta/2+\delta/2)} \sin\gamma/2 \\ e^{i(\alpha+\beta/2-\delta/2)} \sin\gamma/2 & e^{i(\alpha+\beta/2+\delta/2)} \cos\gamma/2 \end{pmatrix}$$

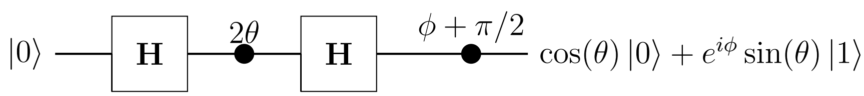
*dove* $\alpha$, $\beta$, $\delta$ *e* $\gamma$ *sono numeri reali.*

**Esercizio 3.7** *Verifica che*

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$$

*è unitaria. Calcola l'azione di $A$ e $A^2$ su un generico qubit. Che cosa calcola $A$? Esiste una sua controparte classica?*

**Esercizio 3.8** *Verifica l'output, a meno di una fase globale, del seguente circuito quantistico:*




**Esercizio 3.9 (Autovalori e autovettori)**

($i$) *Trovare autovalori e autovettori delle matrici di Pauli $X$, $Y$ e $Z$. A quali punti corrispondono sulla sfera di Bloch?*

($ii$) *Dimostrare che gli autovalori di una matrice unitaria hanno norma* 1.

($iii$) *Dimostrare che gli autovalori di una matrice restano inalterati da un cambio di base. Come risultano modificati gli autovettori?*

($iv$) *Diagonalizzare le matrici di Pauli e la matrice di Hadamard.*

**Soluzione**

Richiamiamo prima alcune nozioni e risultati di base. (vedi anche Appunti delle lezioni). Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, il numero complesso $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice un *autovalore* di $A$ se $det(A - I\lambda) = 0$, dove $det$ indica il determinante e $I$ è la matrice identità in $\mathbb{C}^{m\times m}$. Dal teorema fondamentale dell'algebra, un polinomio di grado $m$ $det(A - I\lambda)$ ha $m$ radici complesse (ciascuna con molteplità maggiore o uguale a 1) che corrispondono agli autovalori di $A$.

Un vettore non nullo $v \in \mathbb{C}^m$ si dice *autovettore* di $A$ per l'autovalore $\lambda$ se $Av = \lambda v$. Gli autovettori di $A$ relativi a un autovalore $\lambda$ generano un sottospazio chiamato *autospazio* di $\lambda$.

Un operatore lineare si dice *diagonalizzabile* se ha una matrice di rappresentazione della forma $A = \sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j|$, dove i vettori $|j\rangle$ formano una base ortonormale con autovalori $\lambda_j$. Si dimostra gli operatori unitari ($UU^\dagger = I$) e Hermitiani ($U = U^\dagger$) sono diagonalizzabili.

Per diagonalizzare un operatore lineare $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ con matrice di rappresentazione $A$, dobbiamo costruire una base ortonormale rispetto alla quale $L$ è diagonale. Si possono seguire i seguenti passi:

1. si trovano gli autovalori di $A$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, come radici dell'equazione $det(A - I\lambda) = 0$ e si determina la molteplicità $n_j$ di ciascuno (deve risultare $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$);

2. per ogni autovalore $\lambda_j$ si trovano $n_j$ vettori ortonormali $v_j^i$ ($1 \leq i \leq n_j$) che soddisfano $Av_j^i = \lambda v_j^i$;

3. la base ortonormale cercata sarà data da $\{|v_j^i\rangle \mid 1 \leq i \leq n_j \text{ e } \mid 1 \leq j \leq k\}$.

$(i)$ Si calcola che

- gli autovalori di $X$ sono 1 e $-1$ con autovettori normalizzati rispettivamente $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.
- gli autovalori di $Y$ sono 1 e $-1$ con autovettori normalizzati rispettivamente $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i\,|1\rangle)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(i\,|0\rangle + |1\rangle)$.
- gli autovalori di $Z$ sono 1 e $-1$ con autovettori normalizzati rispettivamente $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

$(ii)$ Supponiamo che $U$ sia una matrice unitaria e che $a$ sia un autovalore di $U$ con corrispondente autovettore normalizzato $v$. Poiché $U$ trasforma vettori unitari in vettori unitari, allora $\|Uv\| = \|v\| = 1$, da cui segue che

$$1 = \|Uv\| = \|av\| = |a|\|v\| = |a|.$$

$(iii)$ Se $B$ è la matrice del cambio di base e $a$ è un autovalore di $A$ con autovettore $v$, allora la matrice trasformata $BAB^{-1}$ ha autovalore $a$ con autovettore $Bv$. Infatti:

$$BAB^{-1}(Bv) = BAv = Bav = aBv.$$

$(iv)$ Da $(i)$ segue immediatamente che le rappresentazioni diagonali di $X$, $Y$ e $Z$ (rispetto alle basi ortonormali date dai corrispondenti autovettori) sono date dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$