Informatica Quantistica

Algoritmi di ricerca: la tecnica di Grover

1 Esercizi

Esercizio 1.1 *Considera l'algoritmo di Grover.*

(i) *Dimostra che*

$$(2|\psi\rangle\langle\psi| - I)(\sum_x \alpha_x |x\rangle) = \sum_x (-\alpha_x + 2\langle\alpha\rangle)|x\rangle,$$

dove $\langle\alpha\rangle = \sum_x \alpha_x / N$.

(ii) *Spiega perché l'operazione* $2|\psi\rangle\langle\psi| - I$ *nell'algoritmo di Grover è chiamata* inversione intorno alla media.

Esercizio 1.2 *Dimostra che cambiando la base computazionale con la base formata dai vettori* $|\sigma\rangle$ *and* $|\tau\rangle$*, allora la matrice di rappresentazione dell'operatore di Grover* G *è:*

$$G_{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

dove $\theta/2$ *è l'angolo tra* $|\sigma\rangle$ *e* $|\psi\rangle$.

Esercizio 1.3 *Verifica che gli autovalori di*

$$G_{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

sono $e^{i\vartheta}$ *corrispondente all' autovettore* $|a\rangle = i|\sigma\rangle + |\tau\rangle$ *ed* $e^{-i\vartheta}$ *corrispondente all'autovettore* $|b\rangle = |\sigma\rangle + i|\tau\rangle$.

Esercizio 1.4 *Esprimi lo stato*

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle$$

come combinazione lineare degli autovettori di $G_{\sigma,\tau}$*, cioè trova* d_a *e* d_b *tali che*

$$|\psi\rangle = d_a|a\rangle + d_b|b\rangle.$$

Esercizio 1.5 *Data una funzione booleana* f *definita su uno spazio di dimensione* $N = 4$*, diciamo che un elemento* x *dello spazio è una soluzione se* $f(x) = 1$*. Descrivere l'operatore di Grover* $\mathbf{G}$ *e applicarlo per la ricerca di soluzioni in questo spazio. Assumendo che il numero di soluzioni sia* $M = 1$*, calcolare il numero di iterazioni di* $\mathbf{G}$ *necessarie per massimizzare la probabilità di successo dell'algoritmo e calcolare tale probabilità.*

Esercizio 1.6 *Data la funzione booleana* $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$*, considera l'algoritmo di Grover per trovare un* $x \in \{0,1\}^n$ *tale che* $f(x) = 1$*. Assumendo che il numero delle soluzioni sia* $M = 2^{n-2}$*, determinare il numero di iterazioni necessarie per massimizzare la probabilitá di successo dell'algoritmo di Grover e calcolare tale probabilitá.*

Esercizio 1.7 *Data la funzione booleana* $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$*, considera l'algoritmo di Grover per trovare un* $x \in \{0,1\}$ *tale che* $f(x) = 1$*. Dato lo stato iniziale* $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle$*:*

(i) *Dimostra che* $R_{|\psi\rangle} = 2\,|\psi\rangle\,\langle\psi| - I$ *è una riflessione intorno a* $|\psi\rangle$*.*

(ii) *Dimostra che se* U *è un operatore unitario, allora* $UR_{|\psi\rangle}U^{-1} = R_{U|\psi\rangle}$*.*