Quantum Computing

Compitino

20 gennaio 2014

1

Esercizio 1.1 *Quale dei seguenti stati è entangled?*

a) $|{+}{+}\rangle$

b) $\frac{4}{5}|01\rangle - \frac{3}{5}|11\rangle$

c) $\frac{1}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle$

d) $\frac{1+i}{2\sqrt{2}}|{+}{+}\rangle - \frac{1+i}{2\sqrt{2}}|{+}{-}\rangle + \frac{1-i}{2\sqrt{2}}|{-}{+}\rangle - \frac{1-i}{2\sqrt{2}}|{-}{-}\rangle$

Risposta L'unico stato entangled è *c*).

Esercizio 1.2 *Qual'è la sovrapposizione che risulta dopo aver applicato la trasformata di Hadamard $H^{\otimes n}$ allo stato*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n})?$$

Esercizio 1.3 *Si consideri lo stato*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}|10\rangle .$$

Possiamo stimare l'angolo ϕ applicando il Fourier sampling (cioè Hadamard su ciascun qubit seguito da una misurazione nella base standard). Supponiamo che dopo un numero sufficiente di test, il risultato 01 non venga mai ottenuto. Qual'è il valore di $\phi \in [0, 2\pi]$?

Risposta Dopo aver applicato Hadamard, si ottiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|++\rangle + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}|-+\rangle = \frac{1+e^{i\phi}}{2\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1+e^{i\phi}}{2\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1-e^{i\phi}}{2\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1-e^{i\phi}}{2\sqrt{2}}|11\rangle.$$

Poiché non vediamo mai il risultato 01, allora sappiamo che $\frac{1+e^{i\phi}}{2\sqrt{2}} = 0$, cioè $e^{i\phi} = -1$ e quindi $\phi = \pi$.

Esercizio 1.4 (Grover) *Considera l'algoritmo di Grover.*

- *Dimostra che*

$$(2|\psi\rangle\langle\psi| - I)(\sum_x \alpha_x|x\rangle) = \sum_x(-\alpha_x + 2\langle\alpha\rangle)|x\rangle,$$

  dove $\langle\alpha\rangle = \sum_x \alpha_x/N$.

- *Spiega perché l'operazione* $2|\psi\rangle\langle\psi| - I$ *nell'algoritmo di Grover è chiamata* inversione intorno alla media.

Risposta Dato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_y |y\rangle$, si ha:

$$\begin{aligned}
(2|\psi\rangle\langle\psi| - I)(\sum_x \alpha_x|x\rangle) &= \\
\frac{2}{N}((\sum_y |y\rangle)(\sum_y \langle y|) - I)(\sum_x \alpha_x|x\rangle) &= \\
\frac{2}{N}(\sum_y |y\rangle)\sum_x \alpha_x - \sum_x \alpha_x|x\rangle &= \\
\sum_x(-\alpha_x + 2\langle\alpha\rangle)\,|x\rangle\,. &
\end{aligned}$$

L'operazione è quindi un'inversione intorno alla media poiché:

$$\begin{aligned}
(2|\psi\rangle\langle\psi| - I)(\sum_x \alpha_x|x\rangle) &= \sum_x(-\alpha_x + 2\langle\alpha\rangle)\,|x\rangle \\
&= \sum_x[(-\alpha_x + \langle\alpha\rangle) + \langle\alpha\rangle]\,|x\rangle\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.5 (Shor) *Seguendo i passi dell'algoritmo di Shor per la fattorizzazione di $N = 91$,*

a. *Qual'è il periodo k della sovrapposizione periodica preparata dall'algoritmo, se si sceglie $x = 8$? In altre parole, qual'è il periodo della funzione $f(j) = 8^j \pmod{91}$?*

b. *Usando la risposta precedente, trovare una radice non banale di $1 \pmod{91}$.*

c. *L'ultimo passo dell'algoritmo prevede il calcolo di $gcd(91, y)$, per qualche y. Individuarne almeno uno.*

Risposta

a. $k = 4$. Infatti,

$$\begin{array}{rcl} 8^1 &=& 8 \pmod{91} \\ 8^2 &=& 64 \pmod{91} \\ 8^3 &=& 57 \pmod{91} \\ 8^4 &=& 1 \pmod{91} \\ 8^5 &=& 8 \pmod{91} \end{array}$$

b. 64 è una radice non banale di $1 \pmod{91}$.

c. La risposta è $y = x - 1 = 63$ oppure $y = x + 1 = 65$.

Esercizio 1.6 *Considera un circuito quantistico che trasforma l'input $|0\rangle$ in $|+\rangle$ e l'input $|1\rangle$ in $-|-\rangle$. Qual'è l'output di questo circuito sull'input $\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|-\rangle$.*

Esercizio 1.7 *Alice e Bob condividono uno stato $a|{++}\rangle + b|{--}\rangle$ di cui Alice possiede il primo qubit e Bob il secondo. Alice misura il suo qubit nella base standard e manda il risultato a Bob. Se Bob vuole che lo stato del suo qubit risulti $a|0\rangle + b|1\rangle$, quali operazioni tra X, Z, H e I deve applicare nei seguenti due casi?*

- *se il risultato ottenuto da Alice è 0,*

- *se il risultato ottenuto da Alice è* 1.

Esercizio 1.8 *Cosidera lo stato* $|\phi\rangle = \sum_{y\in\{0,1\}^n} \beta y\,|y\rangle$ *tale che* $\beta y = 0$ *se* $s \cdot y = 1\ mod2$ *e* $\beta y = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}$ *se* $s \cdot y = 0\ mod2$*, dove* s *è una qualche stringa diversa dalla stringa* $00\ldots 0$*.*

$a)$ *Se eseguiamo un Fourier sampling (cioè la trasformata di Hadamard seguita da una misurazione nella base standard) su* $|\phi\rangle$*, con quale probabilità otterremo* s*?*

$b)$ *Con quale probabilità otterremo un risultato diverso da* s*?*

Risposta

$a)$ La probabilità di ottenere s è $\frac{1}{2}$.

$b)$ Si può ottenere un solo risultato diverso da s, cioè $00\ldots 0$, con probabilità $\frac{1}{2}$.