3 Successioni

3.1 Binomio di Newton

Sarà utile, nel seguito, la seguente formula, detta *formula del binomio di Newton,* valida per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

ove

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k-1)}{k!}.$$

3.2 Esercizio

Verificare la formula del binomio di Newton per $n = 1, 2, 3$.

3.3 Disuguaglianza di Bernoulli

Se $x \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

3.3.1 Dimostrazione

Ovvio per $x = -1$. Per induzione: per $n = 1$ è ovvia. Supponiamo sia vera per n, vogliamo dimostrare che è vera anche per $n+1$: moltiplichiamo entrambi i membri per $1 + x$ (fattore maggiore di 0) ed otteniamo

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) \\
(1+x)^{n+1} &\geq 1 + x + nx + nx^2 \\
(1+x)^{n+1} &\geq 1 + (n+1)x + nx^2
\end{aligned}$$

ed essendo $nx^2 \geq 0$ si ha $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$.

3.4 Disugualgianza aritmetico-geometrica

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, allora

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

(la media aritmetica non è inferiore alla media geometrica), ove il segno di uguaglianza vale se e solo se $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

3.5 Esercizio

Dati n numeri $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, dire qual è più grande tra

$$2^{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}}$$

e

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} 2^{x_k}}{n}$$

3.6 Sul numero di Nepero

La successione

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

è monotona crescente e superiormente limitata (quindi ha limite finito). Per dimostrare che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

si noti che, presi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1 + 1/n$ e $x_{n+1} = 1$, si ha, per la disuguaglianza aritmetico-geometrica,

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n(1+1/n)+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} > \sqrt[n+1]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}} =$$
$$= \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

mentre se $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 1 + 1/(n+1)$ si ha

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1} = \frac{(n+1)(1+1/(n+1))}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}$$

Per dimostrare la limitatezza, occorre prima dimostrare che

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

è una successione monotona decrescente (sempre usando la disuguaglianza aritmetico-geometrica, esercizio). Poi si osserva che

$$0 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1, \quad n > 1$$

e dunque

$$0 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}, \quad n > 1.$$

Per $n > 2$ si ha $(1+1/n)^n > 2$ e per $n = 6$ si ha $(1-1/n)^{-n} < 3$, dunque

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3, \quad n > 2.$$

3.7 Esercizio

Completare la risoluzione dell'esercizio 3.6.

3.8 Esercizio

Qual è più grande tra n^{n+1} e $(n+1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$?

3.8.1 Risoluzione

Si ha

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$$

che è minore di 1 per $n > 2$. Dunque $n^{n+1} > (n+1)^n$ per $n > 2$.

3.9 Esercizio

Dimostrare, per induzione, che se $|x| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, allora

$$|x^n| \leq 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

3.9.1 Risoluzione

Per $n = 1$ è ovvio. Se $|x^n| \leq 1$, allora $|x^{n+1}| = |x^n \cdot x| = |x^n|\,|x| \leq 1$.

3.10 Esercizio

Dimostrare che, se $0 \leq x < 1$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$$

3.10.1 Risoluzione

Per $x = 0$ è ovvio. La successione è monotona decrescente e limitata. Dunque converge all'estremo inferiore. Se, per assurdo, il limite fosse $\varepsilon > 0$, basta prendere $n > \log_x \varepsilon$, da cui $\log_x x^n > \log_x \varepsilon$ e quindi $x^n < \varepsilon$: assurdo.

3.11 Esercizio

Dimostrare che, se $|x| < 1$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$$

3.11.1 Risoluzione

$$\lim_{n\to+\infty} |x^n| = \lim_{n\to+\infty} |x|^n = 0$$

e dunque

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0.$$

3.12 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

3.12.1 Risoluzione

Se, per assurdo, il limite fosse $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, basta prendere $n > M^2$, e risulta $\sqrt{n} > M$: assurdo.

3.13 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

al variare di $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$.

3.13.1 Risoluzione

Se, per assurdo, il limite fosse $\varepsilon > 0$, basta prendere $n > (1/\varepsilon)^{1/p}$ e risulta $1/n^p < \varepsilon$: assurdo.

3.14 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

3.14.1 Risoluzione

Poniamo $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Allora $x_n \geq 0$ (perché?) e si ha

$$n = (1 + x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2.$$

L'ultimo termine è il termine corrispondente a $k = 2$ nella sommatoria della formula del binomio di Newton 3.1 per $(1 + x_n)^n$. Essendo x_n non negativo, ogni elemento della sommatoria è non negativo e dunque il binomio $(1+x_n)^n$ è maggiore o uguale ad ogni addendo della sommatoria. Dalla disequazione scritta si ricava

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Per il teorema dei due carabinieri, $x_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

3.15 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = 1, \quad p > 0$$

3.15.1 Risoluzione

Se $p \geq 1$, esiste $n \in \mathbb{N}$, $n > p$ e dunque

$$1 \leq \sqrt[n]{p} \leq \sqrt[n]{n}$$

e si conclude per il teorema dei due carabinieri. Se $0 < p < 1$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{p}}} = 1.$$

3.16 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha + 1}{n^2 + 1}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

3.16.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha+1}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^2}$$

che vale $+\infty$ se $\alpha > 2$, 1 se $\alpha = 2$ e 0 se $\alpha < 2$.

3.17 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$$

3.17.1 Risoluzione

Occorre *razionalizzare*:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} n\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 1\end{aligned}$$

3.18 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n+7^n}$$

3.18.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n+7^n} = \lim_{n\to+\infty} 7\sqrt[n]{\left(\frac{3}{7}\right)^n+1} = 7$$

3.19 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n + (1-(-1)^n)7^n}$$

3.20 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(1-\cos(\pi n))3^n + 7^n}$$

3.21 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

3.21.1 Risoluzione

Basta dimostrare che $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$. Supponiamo n pari, $n = 2m$: occorre dimostrare che $n! \geq n^{n/2} = n^m$. Osserviamo che

$$n! = \underbrace{[n \cdot 1] \cdot [(n-1) \cdot 2] \cdot \ldots \cdot [(m+1) \cdot m]}_{m \text{ termini}}$$

$$n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ termini}}$$

Dunque basta dimostrare che $(n-k) \cdot (1+k) \geq n$, $k = 0, \ldots, m-1$ (semplice esercizio).

Supponiamo ora n dispari, $n = 2m + 1$: occorre dimostrare che $n! \geq \sqrt{n} \cdot n^m$. Procedendo in modo analogo, rimane da dimostrare che $m + 1 \geq \sqrt{2m+1}$ (semplice esercizio).

3.22 Esercizio

Completare la risoluzione dell'esercizio 3.21.

3.23 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

3.23.1 Risoluzione

Si ha, per $n > 1$,

$$1 - \frac{1}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1$$

la prima disuguaglianza per la disuguaglianza di Bernoulli 3.3, la seconda ovvia. E dunque, per il teorema dei due carabinieri, il limite vale 1.

3.24 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

3.24.1 Risoluzione

Dall'esercizio 3.6, sappiamo che tale limite esiste finito (perché?). Basta calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]^n$$

3.25 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

3.25.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{n \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{-m}\right)^{-m} = \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e.$$

3.26 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$$

3.26.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+2)-1}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{n}{n+2}}$$

da cui si ottiene che il limite cercato vale e^{-1}.

3.27 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}$$

3.27.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\log n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}=1$$