10 Integrali indefiniti

10.1 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{2}{3x-1}\mathrm{d}x$$

10.1.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{2}{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{3}{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\log|3x-1| + c$$

10.2 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{2x}{3x-1}\mathrm{d}x$$

10.2.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{2x}{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{3x-1+1}{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int 1+\frac{1}{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\log|3x-1|+c$$

10.3 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{2}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$$

10.3.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{2}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-3} + \frac{-2}{x-2}\mathrm{d}x = 2\log|x-3| - 2\log|x-2| + c$$

10.4 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{3x+4}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$$

10.4.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{3x+4}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x = \int \frac{13}{x-3} + \frac{-10}{x-2}\mathrm{d}x = 13\log|x-3| - 10\log|x-2| + c$$

10.5 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{2}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x$$

10.5.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{2}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{(x-2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{2}{x-2} + c$$

10.6 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{2x+3}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x$$

10.6.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{2x+3}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-2} + \frac{7}{(x-2)^2}\mathrm{d}x = 2\log|x-2| - \frac{7}{x-2} + c$$

10.7 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$$

10.7.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x = \arctan(x+1) + c$$

10.8 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{3x+6}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$$

10.8.1 Risoluzione

Si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+6}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x &= 3\int \frac{x+2}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2(x+1)+2}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x = \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1} + \frac{2}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x = \\ &= \frac{3}{2}\log(x^2+2x+2) + 3\arctan(x+1) + c\end{aligned}$$

10.9 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{x^2+x-2}{(x^2+2x+2)(x-2)}\mathrm{d}x$$

10.9.1 Risoluzione

Si esegue la scomposizione

$$\frac{x^2+x-2}{(x^2+2x+2)(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x-2}$$

10.10 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x$$

10.10.1 Risoluzione

Moltiplicare numeratore e denominatore per $\cos x$ e poi eseguire la sostituzione $y = \sin x$. Alternativamente, eseguire subito la sostituzione $t = \tan(x/2)$, da cui $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$. Il risultato è

$$\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c$$

10.11 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$$

10.11.1 Risoluzione

Usare l'identità

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

oppure eseguire la sostituzione $t = \tan(x/2)$, da cui $\sin x = 2t/(1+t^2)$. Il risultato è

$$\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = \log\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| + c$$

10.12 Esercizio

Calcolare

$$\int \cos^2 x\mathrm{d}x$$

10.12.1 Risoluzione

Usare l'indentità

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Il risultato è

$$\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

10.13 Esercizio

Calcolare

$$\int \sin^3 x\mathrm{d}x$$

10.13.1 Risoluzione

Usare l'identità

$$\sin^3 x = \sin x(1-\cos^2 x)$$

Il risultato è

$$\int \sin^3 x\mathrm{d}x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

10.14 Esercizio

Calcolare
$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

10.14.1 Risoluzione

Eseguire la sostituzione $x = \sin y$ oppure $x = \cos y$. Spiegare l'apparente diversità dei risultati. Il risultato è

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} + c = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{\arccos x}{2} + d$$

10.15 Esercizio

Calcolare
$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$$

10.15.1 Risoluzione

Eseguire la sostituzione $\sqrt{x+1} = y$. Il risultato è

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{2(x+1)^{3/2}}{3} + 2\sqrt{x+1} + c$$

10.16 Esercizio

Calcolare
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

10.16.1 Risoluzione

Eseguire la sostituzione $x = (e^y - e^{-y})/2$. Il risultato è

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + c$$

10.17 Esercizio

Calcolare
$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$$

10.17.1 Risoluzione

Eseguire la sostituzione $x = (e^y - e^{-y})/2$. Il risultato è

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})}{2} + c$$

10.18 Esercizio

Calcolare
$$\int \log x \mathrm{d}x$$

10.18.1 Risoluzione

Si ha $\log x = 1 \cdot \log x$ e si integra per parti. Il risultato è

$$\int \log x \mathrm{d}x = x \log x - x + c$$

10.19 Esercizio

Calcolare
$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$
per parti.

10.19.1 Risoluzione

Si ha
$$\sqrt{1-x^2} = 1 \cdot \sqrt{1-x^2}$$

10.20 Esercizio

Calcolare
$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$$
per parti.

10.20.1 Risoluzione

Si ha
$$\sqrt{1+x^2} = 1 \cdot \sqrt{1+x^2}$$
e ci si serve dell'Esercizio 10.16.