6 Continuità

6.1 Definizione

La domanda "la funzione $f(x)$ è continua?" significa "la funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$, ove D è il suo dominio di definizione, è continua?".

6.2 Esercizio

La funzione $f(x) = 1/x$ è continua?

6.2.1 Risoluzione

Sì, perché è continua nel suo dominio di definizione $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

6.3 Esercizio

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua?

6.3.1 Risoluzione

No, perché

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty \neq f(0) = 0.$$

6.4 Esercizio

Supponiamo che f sia una funzione reale definita su $\mathbb{R}$ che soddisfi

$$\lim_{h\to 0}[f(x+h) - f(x-h)] = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Questo implica che f è continua?

6.4.1 Risoluzione

No, basta considerare

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

6.5 Esercizio

La funzione continua $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(1/x)$ può essere estesa ad una funzione continua su $\mathbb{R}$ (esiste cioè $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua che, ristretta a $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, coincide con f)?

6.5.1 Risoluzione

No, perché non esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$.

6.6 Esercizio

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(1/x)}{1/x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua?

6.6.1 Risoluzione

Sì, perché

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

6.7 Esercizio

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}-1}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

è continua?

6.7.1 Risoluzione

Poiché

$$\lim_{x\to 0} f(x) = a$$

(esercizio), la funzione è continua per $a = 2$.

6.8 Esercizio

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\sin x)}{x} & x \neq 0 \\ a^2 - 1 & x = 0 \end{cases}$$

è continua?

6.8.1 Risoluzione

Poiché

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{x} = 1$$

la funzione è continua per $a^2 - 1 = 1$, cioè $a = \pm\sqrt{2}$.

6.9 Esercizio

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} & x < 0 \\ x - a^2 + 2a & x \geq 0 \end{cases}$$

è continua?

6.9.1 Risoluzione

La funzione vale $-a^2 + 2a$ in 0 e tale è il limite destro verso 0. Il limite sinistro è

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{2x} + \frac{e^{-x} - 1}{2(-x)} = 1.$$

Dunque la funzione è continua per $-a^2 + 2a = 1$, cioè $a = 1$.

6.10 Funzioni iperboliche

La funzione

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

si chiama *seno iperbolico*. La funzione

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

si chiama *coseno iperbolico*.

1. Mostrare che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;
2. calcolare la funzione inversa di $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
3. calcolare la funzione inversa di $\cosh\colon [0, +\infty) \to [1, +\infty)$;
4. calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh x}{x^2}$$

6.10.1 Risoluzione

1. Facile;
2. poniamo
$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
Allora
$$e^x - \frac{1}{e^x} - 2y = 0$$
da cui
$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$
e quindi
$$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$$
da cui
$$x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$$
3. analogamente,
$$x = \log(y + \sqrt{y^2-1})$$
4. Facili.

6.11 Esercizio

Risolvere l'equazione
$$\sinh x + \cosh x = 1$$

6.11.1 Risoluzione

Con il cambio di variabile $X = \cosh x$, $Y = \sinh x$, si ha
$$\begin{cases} Y + X = 1 \\ X^2 - Y^2 = 1 \end{cases}$$
la cui soluzione è $X = 1$, $Y = 0$, cioè $x = 0$.

6.12 Esercizio

Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ continua e sia $f(0) = 2$. Quanto vale $f(\sqrt{3})$?

6.12.1 Risoluzione

Vale 2. Infatti f deve essere la funzione costante $f(x) = 2$. Se così non fosse, supponiamo, per assurdo, $f(a) \neq f(b)$, con $a \neq b$. Allora dovrebbe essere $f([a,b]) \supseteq [f(a), f(b)]$ ma $f([a,b]) \subset \mathbb{N}$ per ipotesi, mentre $[f(a), f(b)]$ è un intervallo reale.

6.13 Esercizio

Dimostrare che l'equazione

$$2x^3 + 3x - 3 = 0$$

ha una ed una sola soluzione reale.

6.13.1 Risoluzione

La funzione $f(x) = 2x^3 + 3x - 3$ è continua e vale -3 in 0 e 2 in 1. Dunque ha sicuramente uno zero in $[0, 1]$. Poi, per $x < 0$, è negativa (e dunque non può avere altri zeri) e per $x > 0$ è chiaramente crescente. Dunque ha un solo zero in $[0, 1]$.