

Spazi di elementi finiti

Marcella Bonazzoli

29 aprile 2013

Sommario

Nelle lezioni iniziali di calcolo scientifico abbiamo studiato il metodo di Galerkin con elementi finiti lineari per l'approssimazione del problema di Poisson. In queste note descriveremo altri spazi di elementi finiti: inizieremo con quelli quadratici e cubici, poi considereremo il caso di una mesh rettangolare e infine studieremo il metodo di Galerkin discontinuo e il metodo mortar, entrambi basati su sottospazi di funzioni polinomiali discontinue fra un elemento e l'altro.

1 Elementi continui

1.1 Elementi finiti quadratici e cubici

Possiamo costruire un sottospazio di elementi finiti V_h usando funzioni *quadratiche* a tratti, cioè funzioni v tali che $v|_K$ appartenga a $\mathbb{P}_2(K)$, dove con K indichiamo un triangolo della triangolazione \mathcal{T}_h del dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Ricordiamo che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_r(K) &= \{v \mid v \text{ polinomio di grado } \leq r \text{ su } K\} \\ &= \{v \mid v(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leq i+j \leq r} a_{ij} x^i y^j, \mathbf{x} = (x, y) \in K, a_{ij} \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

e che

$$\dim \mathbb{P}_r(K) = \frac{(r+1)(r+2)}{2}.$$

Per descrivere tali funzioni su un certo elemento, scegliamo come *parametri*, o *gradi di libertà*, i valori della funzione nei vertici del triangolo, $\mathbf{x}_i, i = 1, 2, 3$, e i valori nei punti medi dei lati, $\mathbf{x}_{ij}, i < j, i, j = 1, 2, 3$ (si veda la figura 1). Si dimostra che:

Proposizione 1. *Una funzione $v \in \mathbb{P}_2(K)$ è univocamente determinata da*

$$\begin{aligned}v(\mathbf{x}_i) & \quad i = 1, 2, 3 \\ v(\mathbf{x}_{ij}) & \quad i < j, i, j = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

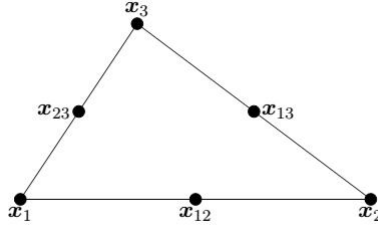


Figura 1: Elementi finiti quadratici

Dimostrazione. Poiché la dimensione di $\mathbb{P}_2(K) = 6$ è uguale al numero di gradi di libertà, è sufficiente provare che se $v \in \mathbb{P}_2(K)$ e

$$v(\mathbf{x}_i) = 0, v(\mathbf{x}_{ij}) = 0, i < j, i, j = 1, 2, 3$$

allora $v \equiv 0$ (in questo modo stiamo mostrando che il sistema omogeneo che impone i valori del polinomio nei 6 punti ha un'unica soluzione).

A questo scopo, consideriamo il lato $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$. Lungo questo lato la funzione v è un polinomio di grado 2 e si annulla nei 3 punti distinti $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_{23}, \mathbf{x}_3$. Allora v si annulla su $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$ e quindi, indicando con $\lambda_j(\mathbf{x})$ le *coordinate baricentriche* di K , possiamo scrivere

$$v(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x})w_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in K,$$

dove $w_1 \in \mathbb{P}_1(K)$ (si noti che λ_1 si annulla sul lato $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$). Allo stesso modo si vede che v si annulla sul lato $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3$, quindi

$$v(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x})\lambda_2(\mathbf{x})w_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in K,$$

dove ora w_0 ha grado 0, cioè $w_0 = \gamma = \text{cost.}$ Se infine prendiamo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{12}$, si vede che

$$0 = v(\mathbf{x}_{12}) = \gamma\lambda_1(\mathbf{x}_{12})\lambda_2(\mathbf{x}_{12}) = \gamma\frac{1}{2}\frac{1}{2},$$

da cui $\gamma = 0$ e $v \equiv 0$. □

Si trova che una funzione $v \in \mathbb{P}_2(K)$ ha la seguente rappresentazione:

$$v = \sum_{i=1}^3 v(\mathbf{x}_i)\lambda_i(2\lambda_i - 1) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 v(\mathbf{x}_{ij})4\lambda_i\lambda_j. \quad (1)$$

Grazie alla proposizione precedente, basta mostrare che i due membri dell'uguaglianza assumono gli stessi valori nei nodi $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{ij}$: il secondo membro valutato in \mathbf{x}_i dà $v(\mathbf{x}_i)1(2 \cdot 1 - 1) + 0 = v(\mathbf{x}_i)$ e in \mathbf{x}_{ij} vale $0 + v(\mathbf{x}_{ij})4\frac{1}{2}\frac{1}{2} = v(\mathbf{x}_{ij})$. Nella formula 1 si possono leggere le funzioni di base relative ai gradi di libertà

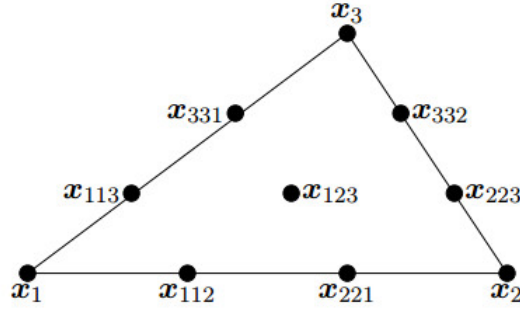


Figura 2: Elementi finiti cubici

scelti. Si tratta di una base *lagrangiana*, cioè i coefficienti dello sviluppo di una generica funzione sulla base stessa sono i valori assunti dalla funzione in certi punti.

Inoltre si può mostrare che se K_1 e K_2 sono due triangoli con lato comune S e $v_i \in \mathbb{P}_2(K_i)$, $i = 1, 2$, allora dalla uguaglianza delle due funzioni negli estremi e nel punto medio di S segue che v_1 e v_2 coincidono su S . Definiamo allora

$$V_h = \{ v \mid v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), v|_K \in \mathbb{P}_2(K) \text{ per ogni } K \in \mathcal{T}_h \}.$$

Il caso di un sottospazio costituito da polinomi *cubici* a tratti si tratta in modo analogo. Si dimostra che una funzione $v \in \mathbb{P}_3(K)$ è univocamente determinata da 10 gradi di libertà:

- i valori di v nei vertici del triangolo, \mathbf{x}_i , $i = 1, 2, 3$;
- i valori di v nei nodi $\mathbf{x}_{ij} = \frac{1}{3}(2\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$ sui lati del triangolo;
- il valore di v nel baricentro del triangolo, $\mathbf{x}_{123} = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$.

1.2 Elementi finiti rettangolari

Fino a questo momento abbiamo preso in considerazione solo mesh triangolari. In realtà è possibile assumere che \mathcal{T}_h sia una suddivisione di $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ in *rettangoli* K , che non si sovrappongono e tali che nessun vertice di ciascun rettangolo giace sul lato di un altro rettangolo.

Per descrivere le funzioni del sottospazio, consideriamo un rettangolo K di vertici \mathbf{x}_i , $i = 1, 2, 3, 4$ e con i lati paralleli agli assi coordinati in \mathbb{R}^2 . Definiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_1(K) &= \{ v \mid v \text{ è bilineare su } K \} \\ &= \{ v \mid v(\mathbf{x}) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy, \mathbf{x} = (x, y) \in K, a_{ij} \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

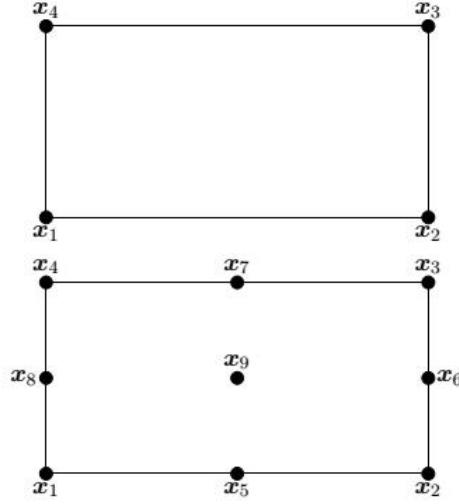


Figura 3: Elementi finiti rettangolari

Si può dimostrare che una funzione $v \in \mathbb{Q}_1(K)$ è univocamente determinata dai valori $v(\mathbf{x}_i), i = 1, 2, 3, 4$ e che se K_1 e K_2 sono due rettangoli con in comune il lato S e $v_i \in \mathbb{Q}_1(K_i), i = 1, 2$, allora dalla uguaglianza delle due funzioni negli estremi di S segue che v_1 e v_2 coincidono su S . Si può allora definire

$$V_h = \{ v \mid v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), v|_K \in \mathbb{Q}_1(K) \text{ per ogni } K \in \mathcal{T}_h \}.$$

Assumendo come rettangolo di riferimento $\hat{K} = [0, 1] \times [0, 1]$, si possono scegliere come funzioni di base

$$p_1(\mathbf{x}) = (1 - x)(1 - y),$$

$$p_2(\mathbf{x}) = x(1 - y),$$

$$p_3(\mathbf{x}) = xy,$$

$$p_4(\mathbf{x}) = (1 - x)y.$$

Anche nel caso di mesh rettangolari si possono considerare polinomi di grado superiore:

$$V_h = \{ v \mid v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), v|_K \in \mathbb{Q}_2(K) \text{ per ogni } K \in \mathcal{T}_h \},$$

dove $\mathbb{Q}_2(K)$ è l'insieme delle funzioni v biquadratiche su K , cioè:

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} x^i y^j, \mathbf{x} \in K, a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

I gradi di libertà sono i valori nei vertici, i valori nei punti medi dei lati e il valore nel baricentro di ogni rettangolo.

Gli spazi di elementi finiti con mesh rettangolari sono particolarmente utili per le immagini, pensate come unioni di quadrati, e si preferiscono alle differenze finite in quanto per avere una precisione maggiore non occorre considerare più punti, ma basta aumentare il numero di gradi di libertà all'interno di ogni quadrato.

2 Elementi discontinui

Finora abbiamo considerato metodi di Galerkin con sottospazi di funzioni polinomiali continue. Adesso consideriamo invece metodi di approssimazione basati su sottospazi di funzioni polinomiali discontinue fra un elemento e l'altro. In particolare introdurremo il metodo di Galerkin discontinuo (DG come *Discontinuous Galerkin* in inglese) e il metodo *mortar*, come al solito nel caso del problema di Poisson.

2.1 Il metodo di Galerkin discontinuo (DG) per il problema di Poisson

Consideriamo il problema di Poisson con condizioni al contorno omogenee di Dirichlet in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ partizionato nell'unione di M elementi disgiunti $\Omega_m, m = 1, \dots, M$:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Per prima cosa deriviamo una formulazione debole alternativa a quella tradizionale, che sarà alla base del metodo DG. Per semplicità supponiamo che la soluzione esatta sia sufficientemente regolare, ad esempio $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, in modo che abbiano senso le operazioni che faremo nel seguito.

Introduciamo lo spazio

$$W^0 = \{ v \in W \mid v|_{\partial\Omega} = 0 \},$$

dove

$$W = \{ v \in L^2(\Omega) \mid v|_{\Omega_m} \in H^1(\Omega_m), m = 1, \dots, M \}.$$

Grazie alla formula di Green applicata a ogni Ω_m si ha, per ogni $v \in W^0$,

$$\sum_{m=1}^M (-\Delta u, v)_{\Omega_m} = \sum_{m=1}^M \left((\nabla u, \nabla v)_{\Omega_m} - \int_{\partial\Omega_m} v \nabla u \cdot \mathbf{n}_m \right), \quad (2)$$

dove \mathbf{n}_m è la normale unitaria esterna a $\partial\Omega_m$ e $(\cdot, \cdot)_{\Omega_m}$ indica il prodotto scalare di $L^2(\Omega_m)$.

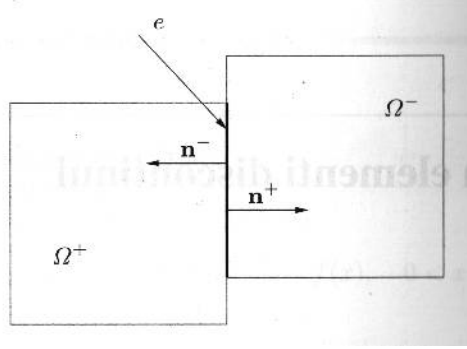


Figura 4: Un lato e che separa due sottodomini

Indicando con ε_δ l'unione di tutti i lati interni, cioè le interfacce tra i sottodomini (i lati sul bordo esterno possono essere trascurati in quanto su di essi v è nulla), possiamo scrivere

$$-\sum_{m=1}^M \int_{\partial\Omega_m} v \nabla u \cdot \mathbf{n}_m = -\sum_{e \in \varepsilon_\delta} \int_e (v^+ \nabla u^+ \cdot \mathbf{n}^+ + v^- \nabla u^- \cdot \mathbf{n}^-)|_e, \quad (3)$$

in cui i segni $+$ e $-$ denotano informazioni provenienti dai due differenti versi normali al lato e in esame (si veda la figura 4 e si noti che $\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-$).

Usiamo le seguenti notazioni per indicare rispettivamente le medie e i salti di una funzione w sui lati degli elementi:

$$\{w\} = \frac{w^+ + w^-}{2}, \quad [w] = w^+ \cdot \mathbf{n}^+ + w^- \cdot \mathbf{n}^-,$$

dove, nel caso in cui w sia una funzione vettoriale (come ad esempio un gradiente), si deve intendere \cdot come un prodotto scalare. Si trova che

$$\begin{aligned} (v^+ \nabla u^+ \cdot \mathbf{n}^+ + v^- \nabla u^- \cdot \mathbf{n}^-) &= \\ 2[v] \cdot \{\nabla u\} - (v^+ \nabla u^- \cdot \mathbf{n}^+ + v^- \nabla u^+ \cdot \mathbf{n}^-) &= \\ 2[v] \cdot \{\nabla u\} + 2[\nabla u] \{v\} - (v^+ \nabla u^+ \cdot \mathbf{n}^+ + v^- \nabla u^- \cdot \mathbf{n}^-), \end{aligned}$$

da cui

$$(v^+ \nabla u^+ \cdot \mathbf{n}^+ + v^- \nabla u^- \cdot \mathbf{n}^-) = [v] \cdot \{\nabla u\} + [\nabla u] \{v\}. \quad (4)$$

Dunque, usando le formule (2), (3) e (4), troviamo che la soluzione del problema di Poisson verifica:

$u \in W^0$ t.c.

$$\sum_{m=1}^M (\nabla u, \nabla v)_{\Omega_m} - \sum_{e \in \varepsilon_\delta} \int_e ([v] \cdot \{\nabla u\} + [\nabla u] \{v\}) = \sum_{m=1}^M (f, v)_{\Omega_m} \quad \forall v \in W^0.$$

Introduciamo ora lo spazio discreto

$$W_\delta = \{ v_\delta \in W \mid v_\delta|_{\Omega_m} \in \mathbb{P}_r(\Omega_m), m = 1, \dots, M \}$$

e il suo sottospazio

$$W_\delta^0 = \{ v_\delta \in W_\delta \mid v_\delta|_{\partial\Omega} = 0 \}.$$

Osservando che, se $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, allora il termine $[\nabla u]\{v\}$ è nullo poiché $[\nabla u] = 0$ su ogni lato $e \in \varepsilon_\delta$, otteniamo finalmente la seguente approssimazione DG per il problema di Poisson: cerchiamo $u_\delta \in W_\delta^0$ che soddisfi

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M (\nabla u_\delta, \nabla v_\delta)_{\Omega_m} - \sum_{e \in \varepsilon_\delta} \int_e [v_\delta] \cdot \{\nabla u_\delta\} - \tau \sum_{e \in \varepsilon_\delta} \int_e [u_\delta] \cdot \{\nabla v_\delta\} \\ + \sum_{e \in \varepsilon_\delta} \gamma |e|^{-1} \int_e [u_\delta] \cdot [v_\delta] = \sum_{m=1}^M (f, v_\delta)_{\Omega_m} \quad \forall v_\delta \in W_\delta^0, \end{aligned} \quad (5)$$

dove $\gamma = \gamma(r)$ è un'opportuna costante positiva, $|e|$ è la lunghezza del lato $e \in \varepsilon_\delta$ e τ è un'opportuna costante. I nuovi termini con τ e γ , che sono stati aggiunti, non compromettono la consistenza forte (poiché $[u] = 0$ se u è la soluzione esatta del problema di Poisson) e garantiscono migliori proprietà di stabilità.

La formulazione (5), introdotta alla fine degli anni settanta, è detta della *penalizzazione interna* (*Interior Penalty*, IP). Per $\tau = 1$ il metodo conserva la simmetria e la formulazione risultante è chiamata metodo SIPG (*Symmetric Interior Penalty Galerkin*). Per $\tau \neq 1$ la forma bilineare non è più simmetrica e le scelte $\tau = -1$ e $\tau = 0$ danno luogo rispettivamente ai metodi NIPG (*Non-symmetric Interior Penalty Galerkin*) e IIPG (*Incomplete Interior Penalty Galerkin*). Il metodo NIPG è stabile per ogni scelta di $\gamma > 0$, mentre i metodi SIPG e IIPG lo sono solo per γ sufficientemente grande.

Per studiare l'accuratezza del metodo introduciamo la cosiddetta norma dell'energia:

$$\|v\| = \left(\sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} |\nabla v|^2 + \sum_{e \in \varepsilon_\delta} \gamma |e|^{-1} \int_e [v]^2 \right)^{1/2}.$$

Si può dimostrare che, se la soluzione esatta è sufficientemente regolare, per il metodo SIPG con elementi finiti di grado r si ha la seguente stima dell'errore (purché il parametro di penalizzazione γ sia preso sufficientemente grande):

$$h \|u - u_\delta\| + \|u - u_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{r+1} |u|_{H^{r+1}(\Omega)},$$

dove C è una opportuna costante positiva che dipende da r . Nel caso dei metodi non simmetrici NIPG e IIPG non è possibile ottenere stime ottimali nella norma L^2 , comunque in molti casi entrambi i metodi mostrano ordini di convergenza ottimali quando il grado di approssimazione è dispari e le griglie sono sufficientemente regolari.

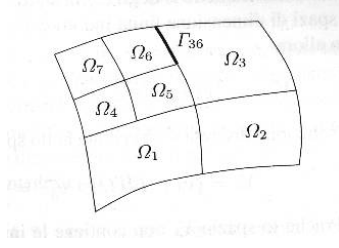


Figura 5: Una possibile partizione del dominio Ω in cui è stata evidenziata una sola interfaccia Γ_{ij}

2.2 Il metodo mortar

Consideriamo di nuovo il problema di Poisson con condizioni al contorno omogenee di Dirichlet in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Definiamo su Ω una partizione in sottoregioni $\Omega_i \subset \Omega, i = 1, \dots, M$, con gli Ω_i aperti non vuoti, disgiunti a due a due e tali che $\Omega = \bigcup_{i=1}^M \Omega_i$. Quindi definiamo le interfacce $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ tra i domini Ω_i e Ω_j , per $i \neq j$, e l'interfaccia globale $\Gamma = \bigcup_{ij} \Gamma_{ij}$ (si veda la figura 5).

Risolvere il problema di Poisson con il metodo mortar vuol dire cercare una soluzione discreta u_δ che sia continua e polinomiale all'interno di ogni sottoregione Ω_i della partizione e che soddisfi una *condizione di continuità* sull'interfaccia Γ detta *debole* o *integrale*, cioè tale che per ogni $i, j, 1 \leq i \neq j \leq M$ si abbia

$$\int_{\Gamma_{ij}} (u_\delta|_{\Omega_i} - u_\delta|_{\Omega_j})\psi = 0 \quad \forall \psi \in \tilde{\Lambda}, \quad (6)$$

dove $\tilde{\Lambda}$ è un opportuno spazio di dimensione finita che dipende dalla discretizzazione scelta nelle sottoregioni Ω_i ; a tali vincoli saranno poi aggiunte delle condizioni di continuità forte in alcuni punti dell'interfaccia Γ . Osserviamo che le condizioni (6) non impongono che il salto della soluzione sia identicamente nullo sull'interfaccia, ma che lo sia la sua proiezione sullo spazio $\tilde{\Lambda}$. Di conseguenza, in generale $u_\delta \notin H_0^1(\Omega)$, ma piuttosto $u_\delta \in L^2(\Omega)$ con $u_\delta|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$.

Per semplicità consideriamo una partizione di Ω in $M = 2$ sottoregioni Ω_1 e Ω_2 e quindi denotiamo con Γ l'interfaccia tra di esse. In ciascun $\Omega_i, i = 1, 2$ definiamo un'ulteriore partizione $\mathcal{T}_i = \bigcup_k T_{i,k}$ in triangoli e consideriamo gli usuali spazi di elementi finiti di grado r_i (la scelta della mesh e del grado polinomiale in un sottodominio è del tutto indipendente dalla scelta effettuata nell'altro). Gli spazi di dimensione finita indotti dalle discretizzazioni locali in $\Omega_i, i = 1, 2$ sono allora

$$V_{i,\delta_i} = \{ v_\delta \in \mathcal{C}^0(\Omega_i) \mid v_\delta|_{T_{i,k}} \in \mathbb{P}_{r_i}(T_{i,k}), \forall T_{i,k} \in \mathcal{T}_i \},$$

e la soluzione discreta u_δ è cercata nello spazio

$$Y_\delta = \{ v_\delta \in L^2(\Omega) \mid v_\delta^i = v_\delta|_{\Omega_i} \in V_{i,\delta_i}, i = 1, 2 \}.$$

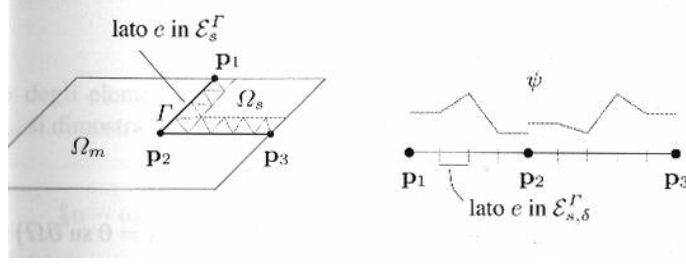


Figura 6: A sinistra una decomposizione di Ω , a destra una funzione dello spazio $\tilde{\Lambda}_\delta$ rappresentata su una rettificazione dell'interfaccia Γ

Poiché lo spazio Y_δ non contiene le informazioni su come raccordare le funzioni v_δ^i all'interfaccia, dovremo introdurre un sottospazio $V_\delta \subset Y_\delta$ di funzioni che soddisfino le condizioni (6) e cercare la soluzione mortar u_δ nello spazio V_δ .

Per prima cosa denotiamo con \mathcal{M}_i l'insieme dei nodi indotti dalla discretizzazione scelta in Ω_i , con $\mathcal{M}_i^\Gamma = \mathcal{M}_i \cap \Gamma$ l'insieme dei nodi su Γ e con \mathcal{U}_i^Γ l'insieme di gradi di libertà su Γ i cui elementi sono i valori delle funzioni u_δ^i nei nodi di \mathcal{M}_i^Γ .

Tra i due insiemi di gradi di libertà su Γ , uno, detto *mortar* o *master*, svolge un ruolo attivo nella formulazione del problema, l'altro, invece, detto *non-mortar* o *slave*, viene usato per caratterizzare lo spazio $\tilde{\Lambda}$ della condizione di continuità debole. Utilizzeremo gli indici m, s per riferirci rispettivamente agli oggetti del dominio master e del dominio slave e indicheremo con $\mathcal{N}_{\text{master}}$ e $\mathcal{N}_{\text{slave}}$ le cardinalità di \mathcal{U}_m^Γ e \mathcal{U}_s^Γ .

2.2.1 Caratterizzazione dello spazio dei vincoli $\tilde{\Lambda}$

Denotiamo con \mathcal{E}_s^Γ l'insieme dei lati di Ω_s che giacciono su Γ , con $\mathcal{E}_{s,\delta}^\Gamma$ l'insieme dei lati dei triangoli $T_{s,k}$ di Ω_s che giacciono su Γ e con

$$P_\delta = \{ \mathbf{p} \in \mathcal{M}_s^\Gamma \mid \mathbf{p} \text{ è estremo di almeno un lato } e \in \mathcal{E}_s^\Gamma \}$$

(si veda la figura 6). Definiamo

$$\tilde{\Lambda}_\delta = \text{span}\{ \psi \in L^2(\Gamma) \mid \psi|_e \in \mathbb{P}_{r_s}(e) \forall e \in \mathcal{E}_{s,\delta}^\Gamma \text{ t.c. } \bar{e} \cap P_\delta = \emptyset \\ \psi|_e \in \mathbb{P}_{r_s-1}(e) \forall e \in \mathcal{E}_{s,\delta}^\Gamma \text{ t.c. } \bar{e} \cap P_\delta \neq \emptyset \},$$

in cui $\mathbb{P}_r(e)$ è lo spazio dei polinomi di grado r in una variabile sull'intervallo e . In Figura 6 a destra è rappresentata una generica funzione dello spazio $\tilde{\Lambda}_\delta$ su una rettificazione dell'interfaccia Γ .

Per caratterizzare una base di $\tilde{\Lambda}_\delta$ nel caso di elementi finiti \mathbb{P}_1 , denotiamo con $\mathbf{x}_j^e, j = 1, \dots, N_{s+1}$ i nodi che appartengono a $\mathcal{M}_s^\Gamma \cap \bar{e}$, dove e è un lato di \mathcal{E}_s^Γ . Le funzioni di base di $\tilde{\Lambda}$ sono funzioni di $L^2(\Gamma)$ che hanno

supporto limitato ad un solo lato $e \in \mathcal{E}_s^\Gamma$, sono associate ai nodi interni di e e, quando $j = 3, \dots, N_s - 1$ coincidono con le funzioni lineari a tratti della base Lagrangiana associata ai nodi \mathbf{x}_j^e , mentre quando $j = 2$ (risp. $j = N_s$) ψ_j vale 1 sul segmento $[\mathbf{x}_1^e, \mathbf{x}_2^e]$ (risp. $[\mathbf{x}_{N_s}^e, \mathbf{x}_{N_s+1}^e]$) e coincide con la funzione caratteristica di Lagrange lineare a tratti associata al nodo \mathbf{x}_2^e (risp. $\mathbf{x}_{N_s}^e$) nel resto del lato e .

2.2.2 Formulazione mortar del problema di Poisson

A questo punto siamo in grado di caratterizzare il sottospazio V_δ all'interno del quale cerchiamo la soluzione mortar del problema di Poisson. Diciamo che una funzione $v_\delta \in Y_\delta$ soddisfa le condizioni mortar se

$$\begin{cases} \int_\Gamma (v_\delta^m - v_\delta^s) \psi = 0 & \forall \psi \in \tilde{\Lambda} \\ v_\delta^m(\mathbf{p}) = v_\delta^s(\mathbf{p}) & \forall \mathbf{p} \in P_\delta \end{cases} \quad (7)$$

e definiamo

$$V_\delta = \{ v_\delta \in Y_\delta \mid v_\delta \text{ soddisfa le condizioni (7) e } v_\delta = 0 \text{ su } \partial\Omega \}.$$

La formulazione mortar del problema di Poisson è allora

$$\text{trovare } u_\delta \in V_\delta : \sum_{i=1}^2 a(u_\delta^i, v_\delta^i) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} f v_\delta^i \quad \forall v_\delta \in V_\delta. \quad (8)$$

La soluzione mortar soddisfa quindi una condizione di continuità debole su ogni lato slave ($e \in \mathcal{E}_s^\Gamma$) dell'interfaccia Γ e una condizione di raccordo puntuale negli estremi ($\mathbf{p} \in P_\delta$) dei lati slave.

Se consideriamo la cosiddetta *broken-norm* H^1

$$\| \| v \| \| = \left(\sum_{i=1}^M \| v|_{\Omega_i} \|_{H^1(\Omega_i)}^2 \right)^{1/2},$$

e denotiamo con h_i il massimo dei diametri dei triangoli $T_{i,k}$, si può dimostrare che se $u|_{\Omega_i} \in H^{\sigma_i}(\Omega_i)$ con $\sigma_i > \frac{3}{2}$, allora

$$\| \| u - u_\delta \| \| \leq C \sum_{i=1}^M h_i^{\min\{\sigma_i, r_i+1\}-1} \| u|_{\Omega_i} \|_{H^{\sigma_i}(\Omega_i)}.$$

2.2.3 Scelta delle funzioni di base

Vediamo ora come definire le funzioni di base $v_\delta \in V_\delta$. Denotiamo con:

- φ_k^m per $k' = 1, \dots, \mathcal{N}_{\Omega_m}$, le funzioni caratteristiche di Lagrange in Ω_m associate ai nodi di $\mathcal{M}_m \setminus \mathcal{M}_m^\Gamma$ (queste funzioni sono identicamente nulle su Γ);

- $\varphi_{k''}^s$ per $k'' = 1, \dots, \mathcal{N}_{\Omega_s}$, le funzioni caratteristiche di Lagrange in Ω_s associate ai nodi di $\mathcal{M}_s \setminus \mathcal{M}_s^\Gamma$ (queste funzioni sono identicamente nulle su Γ);
- μ_k^m per $k = 1, \dots, \mathcal{N}_{\text{master}}$, le funzioni caratteristiche di Lagrange in Ω_m associate ai nodi di \mathcal{M}_m^Γ (queste funzioni si annullano nei nodi di $\mathcal{M}_m \setminus \mathcal{M}_m^\Gamma$);
- μ_j^s per $j = 1, \dots, \mathcal{N}_{\text{slave}}$, le funzioni caratteristiche di Lagrange in Ω_s associate ai nodi di \mathcal{M}_s^Γ (queste funzioni si annullano nei nodi di $\mathcal{M}_s \setminus \mathcal{M}_s^\Gamma$);
- μ_k per $k = 1, \dots, \mathcal{N}_{\text{master}}$, le funzioni di base associate ai nodi master di Γ , così definite:

$$\mu_k = \begin{cases} \mu_k^m \in V_{m, \delta_m} & \text{t.c. } \mu_k^m(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in M_m \setminus \mathcal{M}_m^\Gamma \\ \tilde{\mu}_k^s \in V_{s, \delta_s} & \text{t.c. } \tilde{\mu}_k^s(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in M_s \setminus \mathcal{M}_s^\Gamma, \end{cases}$$

dove $\tilde{\mu}_k^s$ sono $\mathcal{N}_{\text{master}}$ funzioni in V_{s, δ_s} che possiamo esprimere come combinazione lineare delle funzioni μ_j^s usando una matrice rettangolare $\Xi = [\xi_{jk}]$:

$$\tilde{\mu}_k^s = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{\text{slave}}} \xi_{jk} \mu_j^s, \quad k = 1, \dots, \mathcal{N}_{\text{master}}.$$

Ora, poiché le funzioni $\varphi_{k'}^m$ e $\varphi_{k''}^s$ sono identicamente nulle su Γ , chiedere che $v \in V_\delta = \text{span}\{\varphi_{k'}^m, \varphi_{k''}^s, \mu_k\}$, cioè che soddisfi le condizioni mortar (7), equivale a chiedere che per $k = 1, \dots, \mathcal{N}_{\text{master}}$ valgano

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} (\mu_k^m - \tilde{\mu}_k^s) \psi_l = 0 \quad \forall \psi_l \in \tilde{\Lambda}_\delta \\ \mu_k^m(\mathbf{p}) = \tilde{\mu}_k^s(\mathbf{p}) \quad \forall \mathbf{p} \in P_\delta \end{cases}$$

cioè che

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{\text{slave}}} \xi_{jk} \int_{\Gamma} \mu_j^s \psi_l = \int_{\Gamma} \mu_k^m \psi_l \quad \forall \psi_l \in \tilde{\Lambda}_\delta \\ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{\text{slave}}} \xi_{jk} \mu_j^s(\mathbf{p}) = \mu_k^m(\mathbf{p}) \quad \forall \mathbf{p} \in P_\delta \end{cases}$$

per $k = 1, \dots, \mathcal{N}_{\text{master}}$.

Tale sistema può essere riscritto nella forma matriciale

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{\text{slave}}} \xi_{jk} P_{lj} = \Phi_{lk},$$

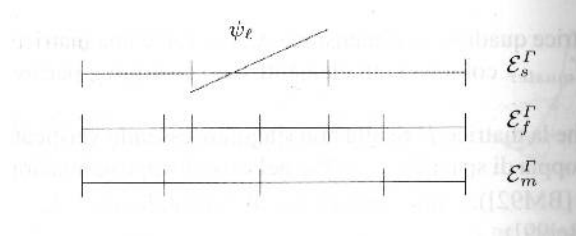


Figura 7: Le partizioni \mathcal{E}_m^Γ , $\mathcal{E}_{s,\delta}^\Gamma$, \mathcal{E}_f^Γ su Γ

dove P è una matrice quadrata di dimensione $\mathcal{N}_{\text{slave}}$ e Φ è una matrice rettangolare di $\mathcal{N}_{\text{slave}}$ righe e $\mathcal{N}_{\text{master}}$ colonne. Si dimostra che la matrice P risulta non singolare e quindi la matrice Ξ può essere determinata risolvendo il sistema lineare $P\Xi = \Phi$.

2.2.4 Scelta delle formule di quadratura

Il calcolo degli elementi P_{lj} e Φ_{lk} con formule di quadratura adeguatamente accurate è cruciale per garantire una stima dell'errore ottimale.

Nel caso di elementi finiti lineari, scrivendo

$$P_{lj} = \int_{\Gamma} \mu_j^s \psi_l = \sum_{e \in \mathcal{E}_{s,\delta}^\Gamma} \int_e \mu_j^s \psi_l,$$

poiché su ogni lato $e \in \mathcal{E}_{s,\delta}^\Gamma$ il prodotto $\mu_j^s \psi_l$ è un polinomio di grado ≤ 2 , possiamo integrare esattamente su ogni lato e usando la formula di Simpson.

Per il calcolo degli elementi Φ_{lk} costruiamo una nuova partizione \mathcal{E}_f^Γ più fine di \mathcal{E}_m^Γ e di $\mathcal{E}_{s,\delta}^\Gamma$ tale che ogni lato $\tilde{e} \in \mathcal{E}_f^\Gamma$ sia contenuto in un solo lato di \mathcal{E}_m^Γ e in un solo lato di $\mathcal{E}_{s,\delta}^\Gamma$ (si veda la figura 7). In questo modo, scrivendo

$$\Phi_{lk} = \int_{\Gamma} \mu_k^m \psi_l = \sum_{\tilde{e} \in \mathcal{E}_f^\Gamma} \int_{\tilde{e}} \mu_k^m \psi_l,$$

sia $\mu_k^m|_{\tilde{e}}$ che $\psi_l|_{\tilde{e}}$ hanno al più grado 1 su ogni lato $\tilde{e} \in \mathcal{E}_f^\Gamma$ e possiamo integrare esattamente su ogni lato \tilde{e} con la formula di Simpson.

Riferimenti bibliografici

- [1] Quarteroni, Alfio (2012), *Modellistica numerica per problemi differenziali*, Springer.
- [2] Comincioli, Valeriano, *Analisi numerica*, Apogeo.