

# Spazi di elementi finiti non convenzionali

DAVIDE BOSCAINI

Queste sono le note da cui ho tratto il seminario del giorno 4 Maggio 2012. Per scriverle mi sono basato sul capitolo 9 del testo *Analisi Numerica* di V. Comincioli, sul capitolo 8 del primo volume del testo *Finite Element Methods* di O. C. Zienkiewicz e R. L. Taylor e sull'articolo divulgativo *Metodi agli elementi finiti discontinui* di F. Brezzi. Invito chi trovasse eventuali errori a segnalarli presso [davide.boscaini@gmail.com](mailto:davide.boscaini@gmail.com).

# Capitolo 1

## Introduzione

Durante il corso di Calcolo Scientifico abbiamo avuto modo di studiare il seguente

**Teorema 1.** *Dato il problema variazionale*

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{per ogni } v \in V,$$

con soluzione  $u \in H^{p+1}(\Omega)$  per qualche  $p > 0$ , indichiamo con  $\hat{u}$  l'approssimazione di tale soluzione ottenuta con un metodo agli elementi finiti di ordine  $r$ . Sotto deboli assunzioni sulla regolarità della mesh  $T_h$ , vale

$$\|\hat{u} - u\|_{L^2} \leq Ch^{s+1}|u|_{H^{s+1}}, \quad s = \min\{r, p\}$$

dove  $h$  è definito come

$$h = \max_{K \in T_h} h_K,$$

con  $h_K = \text{diam } K$  e

$$|u|_{H^{s+1}} = \sum_{|\alpha|=s+1} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^2 d\Omega.$$

Risulta quindi interessante individuare particolari condizioni per cui l'ordine di convergenza  $s$  sia il più alto possibile. Dal momento che  $s = \min\{r, p\}$  e  $p$  è fissato dal particolare problema differenziale considerato, l'unico elemento che possiamo modificare è l'ordine  $r$  degli elementi finiti considerati.

D'altronde per definire uno spazio di elementi finiti  $V_h$  non basta specificare l'ordine desiderato ma dobbiamo conoscere

- la mesh  $T_h = \{K\}$  del dominio  $\Omega$ ;
- la natura delle funzioni  $v \in V_h$  su ogni elemento  $K$  (ad esempio lineari, quadratiche, ...);
- i parametri da usare per descrivere le funzioni in  $V_h$  (definizione della base).

Spesso i poligoni  $K$  sono triangoli, in tali casi  $T_h$  viene chiamata triangolazione. In generale, se si lavora con poligoni diversi, si può parlare di reticolazione.

Inoltre, negli esempi che seguono le funzioni su ogni elemento  $K$  saranno dei polinomi e quindi gli spazi  $V_h$  corrispondenti saranno formati da polinomi a tratti e di conseguenza l'ordine  $r$  dello spazio corrisponderà all'ordine dei polinomi considerati. Risulterà quindi interessante cercare di capire cosa succede al crescere di  $r$ , anche perché, come avremo modo

di vedere, al crescere del grado si guadagnerà sì in precisione e in ordine ma aumenterà la complessità degli elementi finiti che tratteremo e pertanto il costo computazionale richiesto per la formulazione del problema. Il nostro compito sarà quindi quello di individuare un buon compromesso.

Se vogliamo avere condizioni di tipo *interno*, e cioè che  $V_h \subset V$ , occorrono particolari condizioni di raccordo tra i polinomi corrispondenti a elementi  $K$  adiacenti. Se limitiamo la nostra attenzione a problemi ai limiti ellittici del second'ordine, allora  $V \subset H^1(\Omega)$  e per avere  $V_h \subset H^1(\Omega)$  è necessario e sufficiente che le funzioni di  $V_h$  siano continue. La condizione di continuità degli elementi di  $V_h$  può essere vista poi come una condizione sulla scelta dei nodi. Ad esempio, lavorando in  $\mathbb{R}^2$  con polinomi di primo grado su ogni triangolo  $K$ , per aver la continuità degli elementi di  $V_h$  si devono considerare come nodi i vertici dei triangoli  $K$ . Nel corso dell'esposizione vedremo quali scelte si debbano fare per preservare la continuità se si vuole lavorare con polinomi di grado superiore e ci renderemo conto che, al crescere di  $r$  queste scelte non saranno più così ovvie.

Nel seguito, se non espressamente indicato, considereremo il caso in cui  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  sia un dominio poligonale di frontiera  $\Gamma$  e supporremo che  $T_h = \{K\}$  sia una triangolazione composta da elementi  $K$  triangolari. Sotto queste ipotesi introduciamo qualche notazione che ci verrà utile nel corso di queste note. Indicheremo con

$$P_r(K) = \{v \text{ t.c. } v(\mathbf{x}) \text{ polinomio di grado } \leq r \text{ su } K\}$$

lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale ad  $r$  nelle variabili  $x$  e  $y$ , cioè

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leq i+j \leq r} a_{ij} x^i y^j, \quad \mathbf{x} \in K, a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo infine che, in generale, vale

$$\dim P_r(K) = \frac{(r+1)(r+2)}{2}.$$

## Capitolo 2

# Mesh triangolari

### 2.1 Elementi finiti lineari

Se ora, sfruttando la nuova notazione, consideriamo lo spazio

$$V_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ t.c. } v|_K \in P_1(K) \text{ per ogni } K \in T_h\},$$

pertanto una funzione  $v_h \in V_h$  risulterà univocamente determinata se consideriamo come gradi di libertà i valori in corrispondenza dei vertici dei triangoli  $K$ , come afferma la seguente

**Proposizione.** *Sia  $K \in T_h$  un triangolo con vertici  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ . Dati i valori  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , vi è un'unica funzione  $v \in P_1(K)$  tale che*

$$v(\mathbf{x}_i) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3.. \quad (2.1)$$

*Dimostrazione.* Poiché  $v(\mathbf{x}) = c_1x + c_2y + c_3$ , le condizioni (2.1) sono equivalenti al sistema lineare  $A\mathbf{c} = \boldsymbol{\alpha}$ , dove

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix},$$

mentre  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$ . Basta quindi osservare che il determinante di  $A$  è diverso da zero se e solo se i tre punti  $\mathbf{x}_i$  sono linearmente indipendenti e cioè se non appartengono alla stessa retta.

In alternativa si può osservare che

$$\dim(P_1(K)) = \{\text{gradi di libertà}\} = 3$$

e mostrare che se  $v \in P_1(K)$  è

$$v(\mathbf{x}_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

allora  $v \equiv 0$ . □

Una base per  $P_1(K)$  associata ai gradi di libertà nei nodi  $\mathbf{x}_i$  è costituita dalle *coordinate baricentriche* di  $K$ , che denotiamo con  $\lambda_j(\mathbf{x})$ . In particolare se consideriamo il triangolo di riferimento, rappresentato in Figura 2.1, di vertici  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$ , si ha

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= x, \\ \lambda_2 &= y, \\ \lambda_3 &= 1 - x - y. \end{aligned}$$

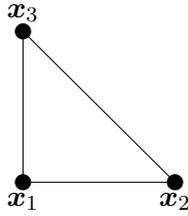


Figura 2.1: Gradi di libertà sul triangolo  $K$  “di riferimento” per il caso lineare.

## 2.2 Elementi finiti quadratici

Costruiamo ora uno spazio

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ t.c. } v|_K \in P_2(K) \text{ per ogni } K \in T_h\}$$

usando funzioni quadratiche a tratti. In tal caso vale la seguente

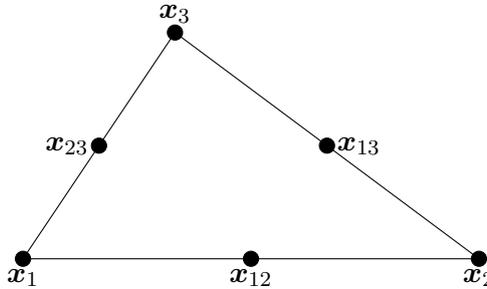


Figura 2.2: Gradi di libertà sul triangolo  $K$  per il caso quadratico.

**Proposizione.** Una funzione  $v \in P_2(K)$  è univocamente determinata dai gradi di libertà

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, 3, \\ v(\mathbf{x}_{ij}), \quad i < j, i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove i nodi  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_{ij}$  sono rispettivamente i vertici e i punti medi dei lati del triangolo  $K$ , come rappresentato in Figura 2.2.

*Dimostrazione.* Poiché la dimensione dello spazio  $P_2(K)$  coincide col numero di gradi di libertà è sufficiente provare che, se  $v \in P_2(K)$  e valgono le equazioni (2.2), allora  $v \equiv 0$ .

Per dimostrarlo cominciando considerando il lato  $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$ . Se ci si restringe a questo lato, la funzione  $v$  è quadratica e, per ipotesi, si annulla nei tre punti distinti  $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_{23}$  ed  $\mathbf{x}_3$ . Segue quindi che  $v$  si annulla su tutto il lato  $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$ . Possiamo quindi scrivere

$$v(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x})w_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in K, w_1 \in P_1(K),$$

dove  $\lambda_i$  è l' $i$ -esimo polinomio di Lagrange, cioè

$$\lambda_i(\mathbf{x}) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}.$$

Allo stesso modo si può vedere che  $v$  si annulla lungo il lato  $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3$ , quindi

$$v(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x})\lambda_2(\mathbf{x})w_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in K,$$

dove  $w_0 = \gamma = \text{cost}$ .

Se infine consideriamo il punto  $\mathbf{x}_{12}$ , si ha

$$0 = v(\mathbf{x}_{12}) = \gamma \lambda_1(\mathbf{x}_{12}) \lambda_2(\mathbf{x}_{12}) = \gamma \frac{1}{2} \frac{1}{2},$$

infatti

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{x}_{12}) &= \lambda_1\left(\frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}\right) = \left(\frac{\frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2} - \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}\right) \left(\frac{\frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2} - \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}\right) \left(\frac{\frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3}{2}}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3} + \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3}\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3} + 1\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ma allora  $\gamma = 0$  e da questo segue  $v \equiv 0$ . □

Dalla dimostrazione precedente segue che una funzione  $v \in P_2(K)$  ha la seguente rappresentazione generale

$$v = \sum_{i=1}^3 v(\mathbf{x}_i) \lambda_i(2\lambda_i - 1) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 v(\mathbf{x}_{ij}) 4\lambda_i \lambda_j.$$

## 2.3 Elementi finiti cubici

Sia  $K$  un triangolo con vertici  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  e definiamo i nodi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{ijk} &= \frac{1}{3}(2\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j), \quad i, j = 1, 2, 3, i \neq j \\ \mathbf{x}_{123} &= \frac{1}{3}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3), \end{aligned}$$

rappresentati in Figura 2.3.

Lo spazio degli elementi finiti cubici

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ t.c. } v|_K \in P_3(K) \text{ per ogni } K \in T_h\}$$

è univocamente determinato dai valori assunti dalla funzione  $v$  sui nodi precedentemente definiti disposti sia lungo i lati dei triangoli  $K$ , sia nel baricentro del triangolo  $K$ .

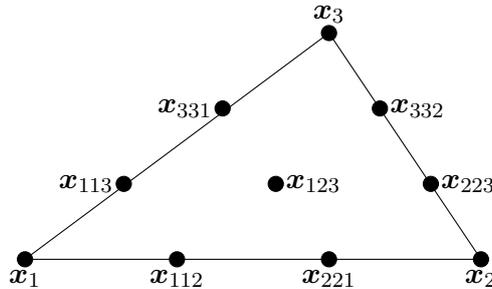


Figura 2.3: Gradi di libertà sul triangolo  $K$  per il caso cubico.

Esiste anche una definizione alternativa dello spazio degli elementi finiti cubici, sfruttando, oltre ai valori assunti da  $v$  in corrispondenza di determinati nodi, anche informazioni sulle relative derivate parziali. In particolare  $v \in P_3(K)$  è univocamente determinato dai gradi di libertà

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \\ v(\mathbf{x}_{123}), \end{aligned}$$

rappresentati in Figura 2.4. Quindi il corrispondente spazio di elementi finiti può essere descritto come

$$V_h = \{v \text{ t.c. } v|_K \in P_3(K) \text{ per ogni } K \in T_h, v \text{ e } \partial v / \partial \mathbf{x}_i, i = 1, 2, \text{ continue nei nodi}\}.$$

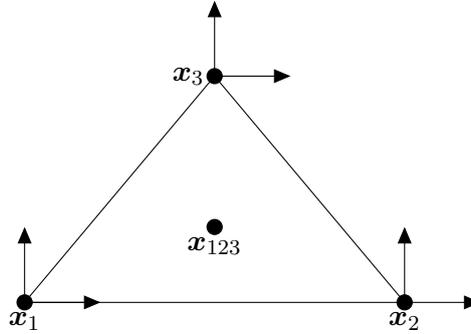


Figura 2.4: Gradi di libertà *alternativi* sul triangolo  $K$  per il caso cubico.

## 2.4 Elementi finiti lineari in dimensione tre

Gli esempi precedenti di spazi di elementi finiti in  $\mathbb{R}^2$  possono essere facilmente estesi al caso di  $\mathbb{R}^3$ . Assumiamo che  $\Omega$  sia l'unione di tetraedri  $K$  che non si sovrappongono e tali che nessun vertice di un tetraedro giaccia su un lato di un altro tetraedro. Precedendo in maniera analoga a quanto fatto in precedenza, si definisce

$$P_r(K) = \{v \text{ t.c. } v \text{ è un polinomio di grado } \leq r \text{ su } K\},$$

cioè

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i+j+k \leq r} a_{ijk} x_i y_j z_k, \quad a_{ijk} \in \mathbb{R}.$$

Per  $r = 1$  una funzione  $v \in P_1(K)$  è univocamente determinata dai valori  $v(\mathbf{x}_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , dove  $\mathbf{x}_i$  sono i vertici di  $K$ , come rappresentato in figura 2.5. Si può allora introdurre il solito spazio

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ t.c. } v|_K \in P_1(K) \text{ per ogni } K \in T_h\}$$

e come gradi di libertà globali considerare i valori nei nodi di  $T_h$ .

In Figura 2.6 si trovano i tipici gradi di libertà per la famiglia dei tetraedri per il caso quadratico e cubico.

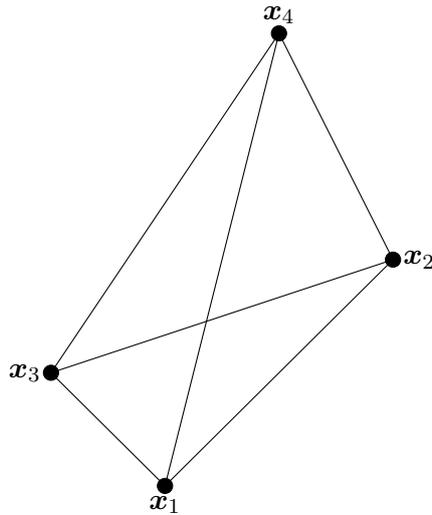


Figura 2.5: Un tetraedro: tipico esempio di elemento  $K \subset \mathbb{R}^3$ .

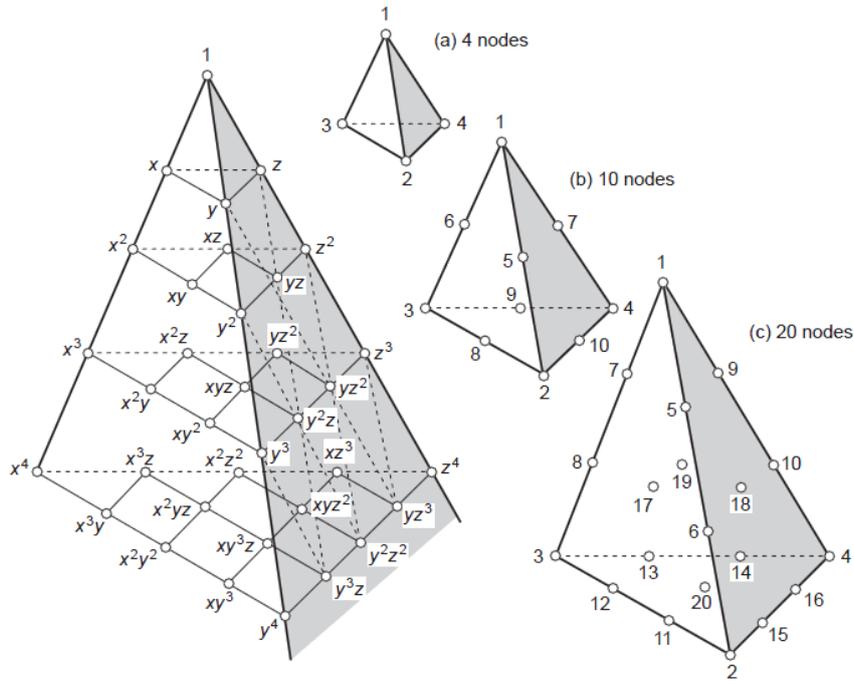


Figura 2.6: Gradi di libertà (a) lineari (b) quadratici (c) cubici su tetraedri.

## 2.5 Elementi finiti di regolarità maggiore

In alcuni casi può essere opportuno lavorare con elementi finiti di maggior regolarità, per il momento abbiamo infatti considerato solo il caso di elementi finiti continui. Uno spazio  $V_h \subset C^1(\bar{\Omega})$  può essere costruito a partire da polinomi di grado cinque su ogni triangolo. In particolare una funzione  $v \in P_5(K)$  è univocamente determinata dai seguenti 21 gradi di libertà

$$D^\alpha v(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, 3, |\alpha| \leq 2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, 3, i < j,$$

dove  $\partial/\partial\mathbf{n}$  indica la derivata normale esterna alla frontiera  $\partial K$  di  $K$ .

Ovviamente è possibile utilizzare anche polinomi di grado inferiore ma con costruzioni speciali, a scapito della semplicità di esposizione.

## Capitolo 3

# Mesh rettangolari

Consideriamo ora il caso in cui i poligoni  $K$  della reticolazione  $T_h$  siano dei rettangoli di vertici  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  e con lati paralleli agli assi coordinati in  $\mathbb{R}^2$ . Supponiamo poi che  $T_h$  sia una suddivisione di  $\Omega$  in rettangoli che non si sovrappongono e tali che nessun vertice di nessun rettangolo giaccia sul lato di un altro rettangolo.

Introduciamo le seguenti notazioni

$$\begin{aligned} Q_1(K) &= \{v \text{ t.c. } v \text{ è bilineare su } K\} \\ &= \{v \text{ t.c. } v(\mathbf{x}) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy, \mathbf{x} = (x, y) \in K, a_{ij} \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Q_2(K) &= \{v \text{ t.c. } v \text{ è biquadratica su } K\} \\ &= \{v \text{ t.c. } v(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}x_i y_j, \mathbf{x} = (x, y) \in K, a_{ij} \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

e osserviamo che in generale

$$\dim Q_r = (r + 1)^2.$$

Se allora consideriamo

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ t.c. } v|_K \in Q_1(K) \text{ per ogni } K \in T_h\},$$

usando come gradi di libertà i valori nei vertici di  $K$ , come mostrato nella parte sinistra di Figura 3.2. In tal caso, se  $K_1$  e  $K_2$  sono due rettangoli con il lato  $S$  in comune e le funzioni  $v_i \in Q_1(K_i)$  coincidono agli estremi di  $S$ , allora  $v_1 \equiv v_2$  su  $S$ , poiché  $v_1 - v_2$  varia linearmente su tale lato.

Nel caso in cui si consideri il rettangolo  $\hat{K}$  di riferimento, una possibile base di tale spazio è quella formata dalle funzioni

$$\begin{aligned} p_1(\mathbf{x}) &= (1 - x)(1 - y), \\ p_2(\mathbf{x}) &= x(1 - y), \\ p_3(\mathbf{x}) &= xy, \\ p_4(\mathbf{x}) &= (1 - x)y. \end{aligned}$$

Anche nel caso in cui gli elementi  $K$  sono rettangoli si può considerare polinomi di grado superiore, ad esempio possiamo definire lo spazio

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ t.c. } v|_K \in Q_2(K) \text{ per ogni } K \in T_h\}$$

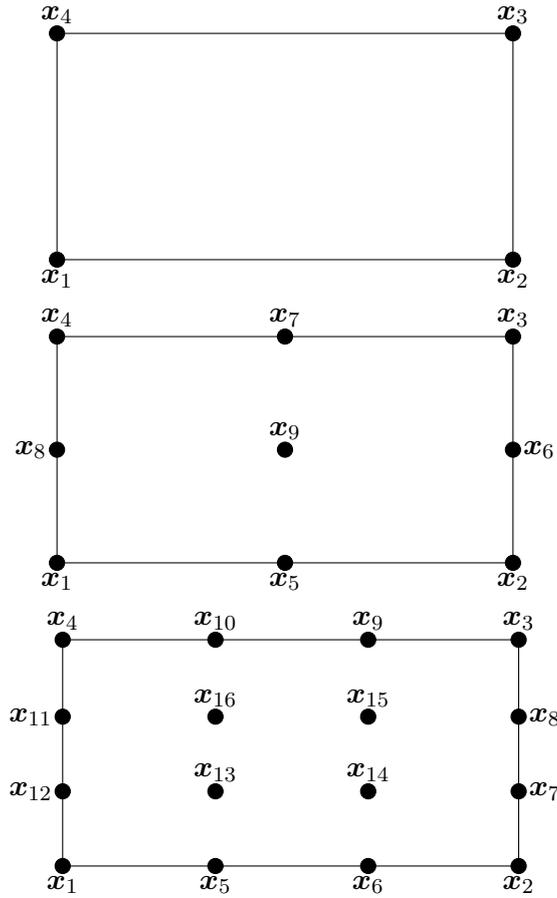


Figura 3.1: Gradi di libertà sul rettangolo  $K$ . In alto, per il caso bilineare. Al centro, per il caso biquadratico. In basso, per il caso bicubico.

con i gradi di libertà rappresentati nella parte destra di Figura 3.2, e cioè i valori di  $v$  ai vertici del rettangolo, ai punti medi e nel baricentro dell'elemento. Ancora una volta, nel caso in cui si consideri il rettangolo  $\hat{K}$  di riferimento, è facile fornire alcune possibili funzioni di base, come

$$\begin{aligned} p_1(\mathbf{x}) &= (1-x)(1-2x)(1-y)(1-2y), \\ p_5(\mathbf{x}) &= -4(1-x)(-x)(1-y)(1-2y), \\ p_9(\mathbf{x}) &= 16xy(1-x)(1-y), \end{aligned}$$

tali che  $p_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$ .

Definire delle possibili basi per un rettangolo “di riferimento” e non per il caso generale non è un problema, infatti è sempre possibile ricondursi ad un elemento di riferimento tramite la trasformazione affine invertibile  $\Phi: \hat{K} \rightarrow K$  tale che

$$\Phi(u) = Au + b,$$

con  $A \in \mathbb{R}_{2 \times 2}$  e  $b \in \mathbb{R}^2$ .

Nelle applicazioni è talvolta utile aver a che fare con elementi finiti che utilizzano come gradi di libertà soltanto i nodi della reticolazione, escludendo quindi, ad esempio, il baricentro. Ad esempio nel caso di polinomi biquadratici è possibile costruire elementi

finiti con i soli otto punti della frontiera di  $K$ , senza perdere di precisione nel senso che l'ordine di convergenza rimane lo stesso. Tale tipo di elementi è chiamato *serendipity*<sup>1</sup>.

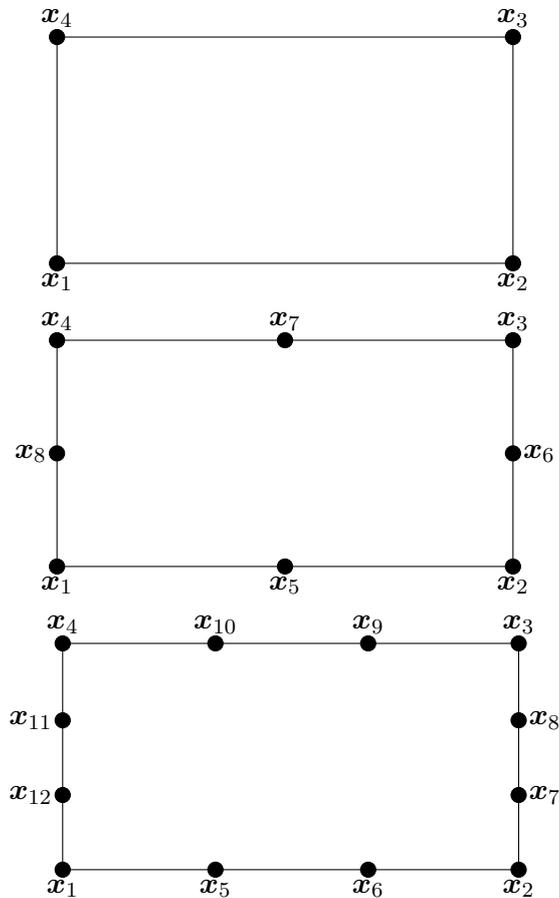


Figura 3.2: Gradi di libertà di tipo *serendipity* sul rettangolo  $K$ . In alto, per il caso bilineare. Al centro, per il caso biquadratico. In basso, per il caso bicubico.

### 3.1 Elementi finiti trilineari in dimensione tre

Così come la controparte tridimensionale del triangolo è il tetraedro, fin dai primi corsi di geometria si apprende che quella del quadrato è il cubo. Segue quindi che in dimensione tre si può lavorare non solo con tetraedri ma anche con cubi. Lo spazio di dimensione finita corrispondente è quello che corrisponde agli elementi finiti trilineari, ovvero lo spazio  $Q_1$  in  $\mathbb{R}^3$ , infatti

$$\dim Q_1 = (1 + 1)^3 = 8$$

e possiamo prendere come gradi di libertà gli 8 valori ai vertici del cubo, come rappresentato in figura 3.3.

In Figura 3.4 si trovano i tipici gradi di libertà per la famiglia dei cubi per il caso quadratico e cubico.

Questo esempio risulta particolarmente interessante per le branche dell'informatica che studiano *shape* prelevate da certi laser 3D, ad esempio quelli usati in ambiente bio-medicale.

<sup>1</sup>Si definisce *serendipity* la facoltà di cercare cose di valore senza cercarle, tale termine deriva dalla favola *The Three Princess of Serendip* di H. Walpole.

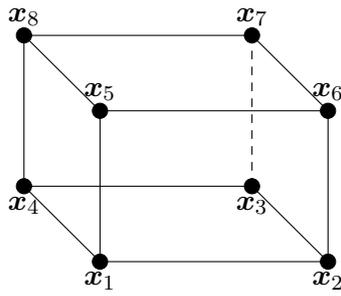


Figura 3.3: Gradi di libertà per funzioni trilineari sul cubo  $K$ .

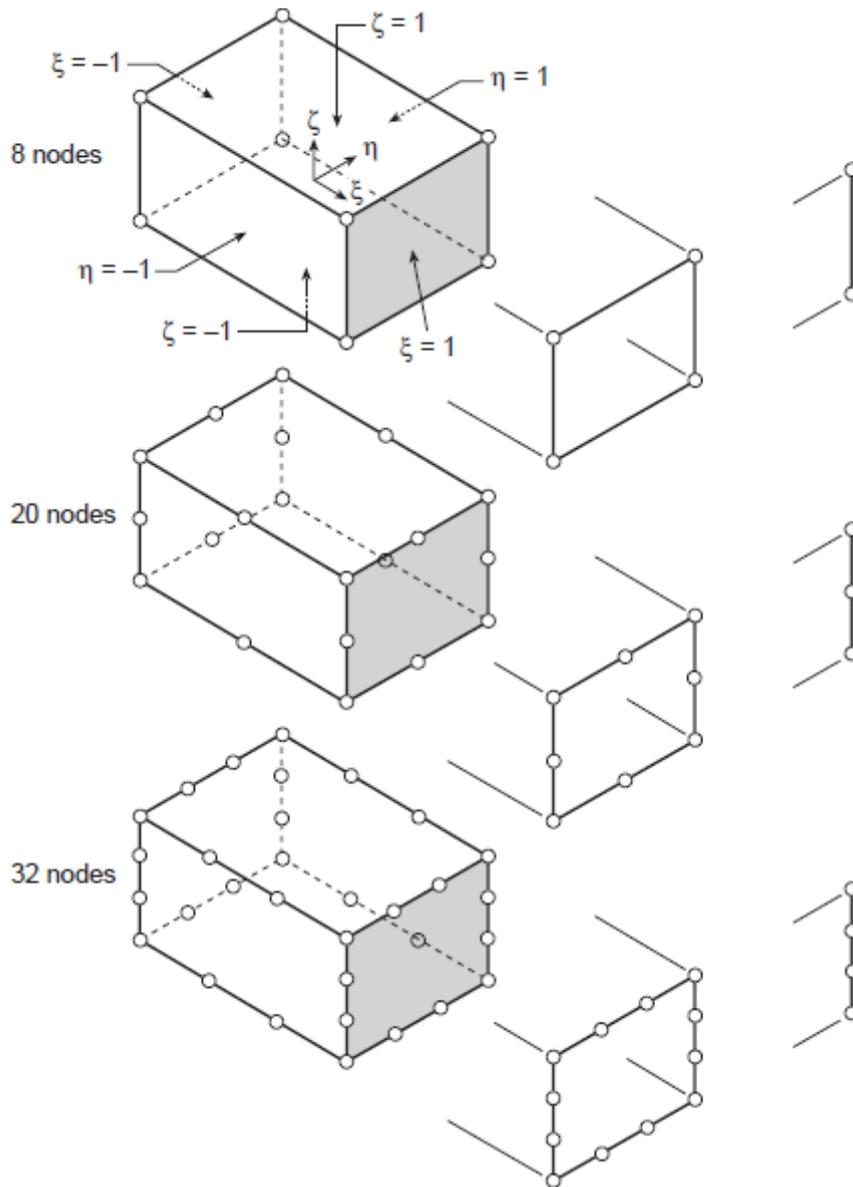


Figura 3.4: Gradi di libertà (a) lineari (b) quadratici (c) cubici su cubi.

La controparte 3D dei pixel è chiamata *voxel*, ed è costituita da cubetti tridimensionali che, una volta assemblati, costituiscono la shape. In tali casi risulta quindi naturale definire lo

spazio degli elementi finiti su cubi e non su tetraedri.

In Figura 3.5 si trova la triangolazione di un ippocampo sinistro, un organo del cervello, e la sua versione voxelizzata.

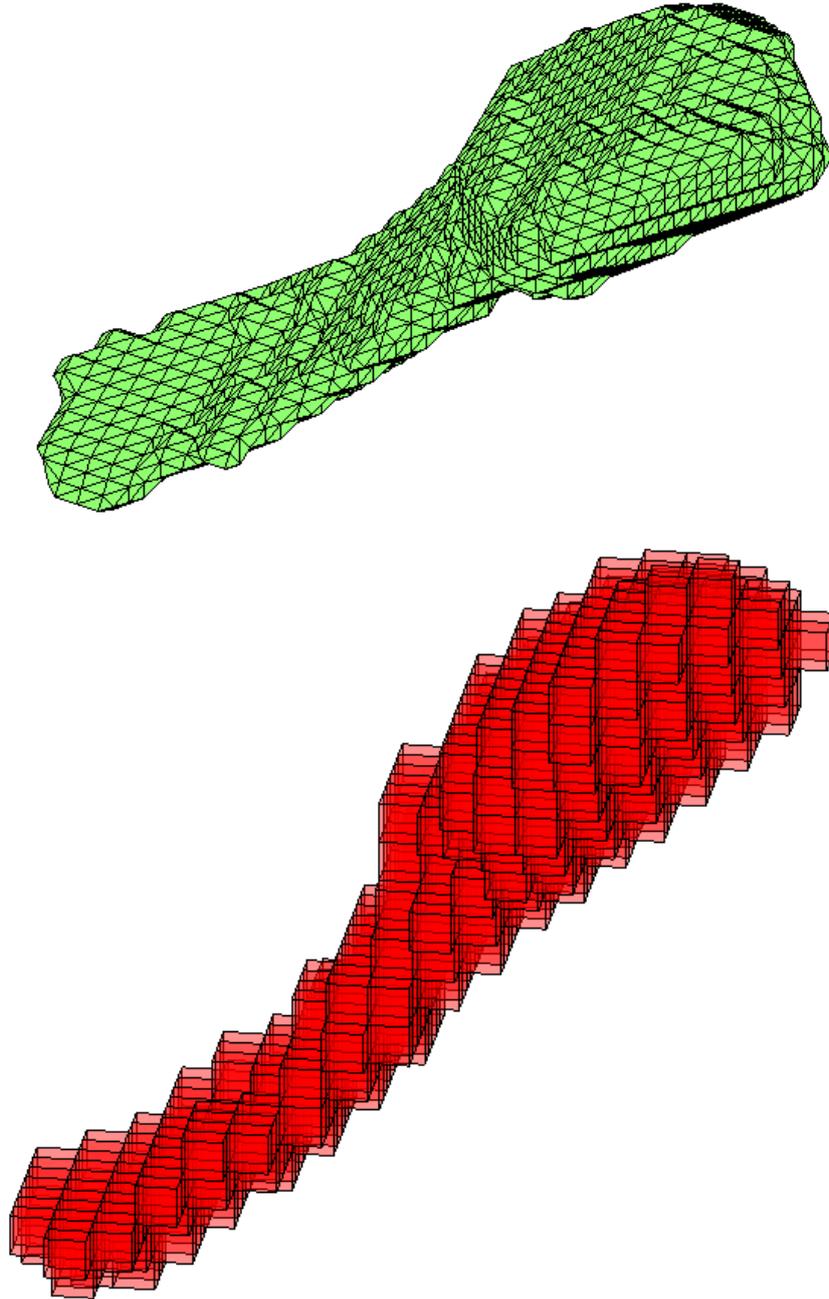


Figura 3.5: Una triangolazione di un ippocampo e la sua versione voxelizzata.

Ovviamente non ci sono limiti per il tipo di solidi da considerare come elementi di base, quindi la scelta dipende soprattutto dall'applicazione che si ha in mente. Una possibile scelta che si colloca ad un livello intermedio tra la famiglia dei tetraedri e quella dei cubi potrebbe essere quella di considerare prismi a base triangolare. In Figura 3.6 si possono trovare i vari gradi di libertà dal caso lineare a quello cubico per tale famiglia di solidi.

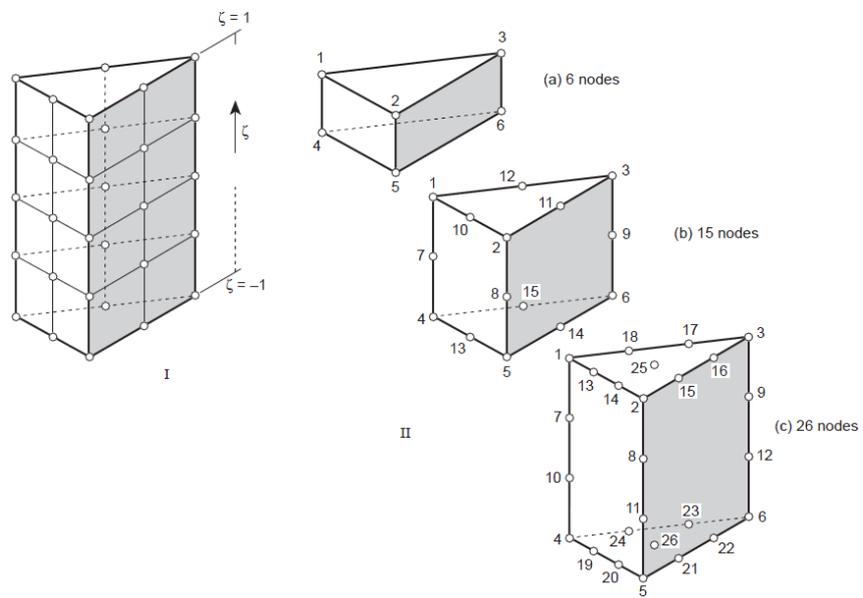


Figura 3.6: Gradi di libertà (a) lineari (b) quadratici (c) cubici su prismi a base triangolare.

## Capitolo 4

# Elementi finiti curvi

Quando il dominio  $\Omega$  non è di tipo poligonale, con gli elementi finiti che abbiamo considerato in precedenza non è possibile descrivere il dominio come unione di elementi  $K$  triangolari o rettangolari. In questo caso a formare l'errore di approssimazione  $v - v_h$  contribuisce anche il fatto che dobbiamo sostituire il dominio originale  $\Omega$  con un dominio approssimato  $\Omega_h$  costituito dall'unione di elementi  $K$ .

Tale contributo all'errore può essere, ovviamente, controllato mediante l'utilizzo di elementi finiti "curvi". Un elemento finito curvo può essere ottenuto tramite una trasformazione biunivoca  $F$  del triangolo di riferimento  $\hat{K}$  in un "triangolo curvo"  $K$ , come rappresentato in figura 4.1. Come possibile trasformazione  $F$  si può prendere

$$F(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{x}_i \hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{x}} \in \hat{K},$$

dove con  $\hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}})$  si indicano le funzioni di base di  $P_2(\hat{K})$ , ovvero  $\hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}_j) = \delta_{ij}$ .

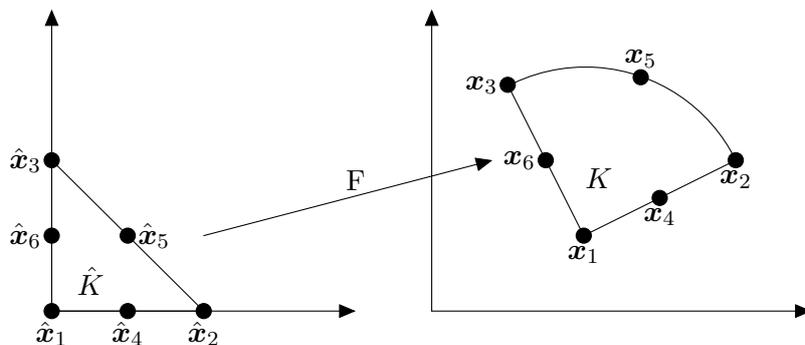


Figura 4.1: Trasformazione  $F$  dal triangolo di riferimento  $\hat{K}$  ad un generico elemento triangolare curvilineo  $K$ .

## Capitolo 5

# Elementi finiti gerarchici

Considerare spazi di elementi finiti esotici può esser utile anche quando, per i motivi più disparati, si deve effettuare un raffinamento della mesh. Infatti proprio in questo contesto ci si scontra con uno dei principali problemi che presentano le funzioni di forma *standard*: dopo un raffinamento degli elementi le funzioni di forma sono completamente diverse dalle precedenti e quindi si devono calcolare dall'inizio. Le funzioni di forma *gerarchiche* permettono di superare questo problema.

Consideriamo il problema di una trave elastica in dimensione uno soggetta ad una certa forza  $b$ . La soluzione esatta  $f$  del problema è rappresentata in Figura 5.1. Consideriamo poi due mesh distinte, una più grossolana, che in Figura 5.1 è indicata con  $c$  (*coarse*) ed una più fine, indicata con  $F$  (*fine*). Nel caso della mesh più grossolana la formulazione classica coincide con quella gerarchica, ovvero

$$K_{11}^c a_1^c = f_1,$$

dove  $f_1 = f(x_1)$ . Nella mesh più fine si considerano due nodi aggiuntivi e il sistema lineare relativo alle funzioni standard diventa

$$\begin{bmatrix} K_{11}^F & K_{12}^F & 0 \\ K_{21}^F & K_{22}^F & K_{23}^F \\ 0 & K_{32}^F & K_{33}^F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}.$$

Al contrario se si considera la forma gerarchica, la forma delle equazioni non cambia di molto e si ottiene la stessa approssimante, tuttavia la cosa interessante è che, ora, il sistema lineare diventa

$$\begin{bmatrix} K_{11}^F & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^F & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}^F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix},$$

dove  $K_{11}^F = K_{11}^c$ .

Anche se ora le variabili  $a_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ , non ha un'interpretazione fisica immediata, come invece avveniva prima, il vantaggio numerico innegabile è che ora la matrice del sistema lineare è diagonale.

In generale non si avrà una matrice diagonale ma con un pattern di sparsità molto simile, quindi le matrici relative alla forma gerarchica saranno sempre meglio condizionate di quelle relative alla forma standard.

Questa forma si dice gerarchica nel senso che la mesh più fine sfrutta la stessa informazione della mesh più grossolana.

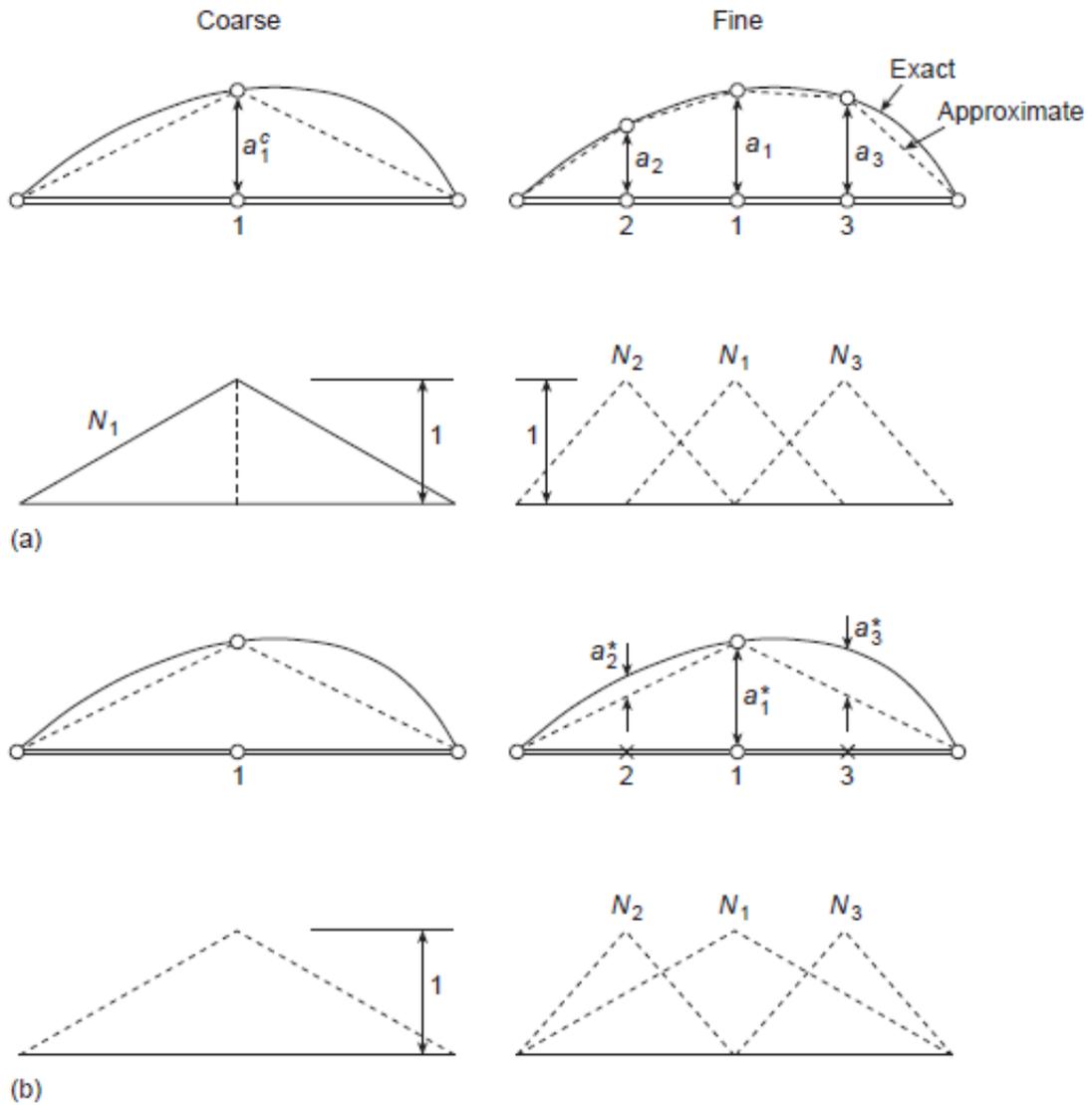


Figura 5.1: Illustrazione dell'idea che sta alla base dei metodi gerarchici per il problema dell'elasticità di una trave soggetta ad una forza prescritta in dimensione uno. Il caso (a) rappresenta l'approccio classico, (b) quello gerarchico.

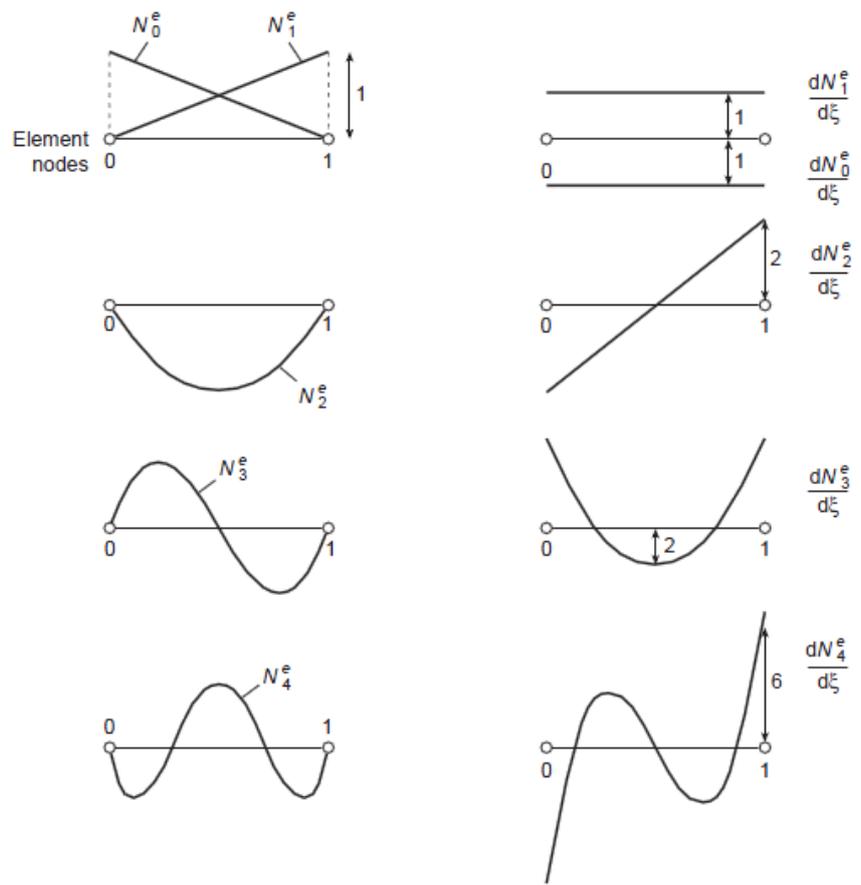


Figura 5.2: Funzioni di forma di tipo gerarchico di forma quasi-ortogonale e relative derivate.

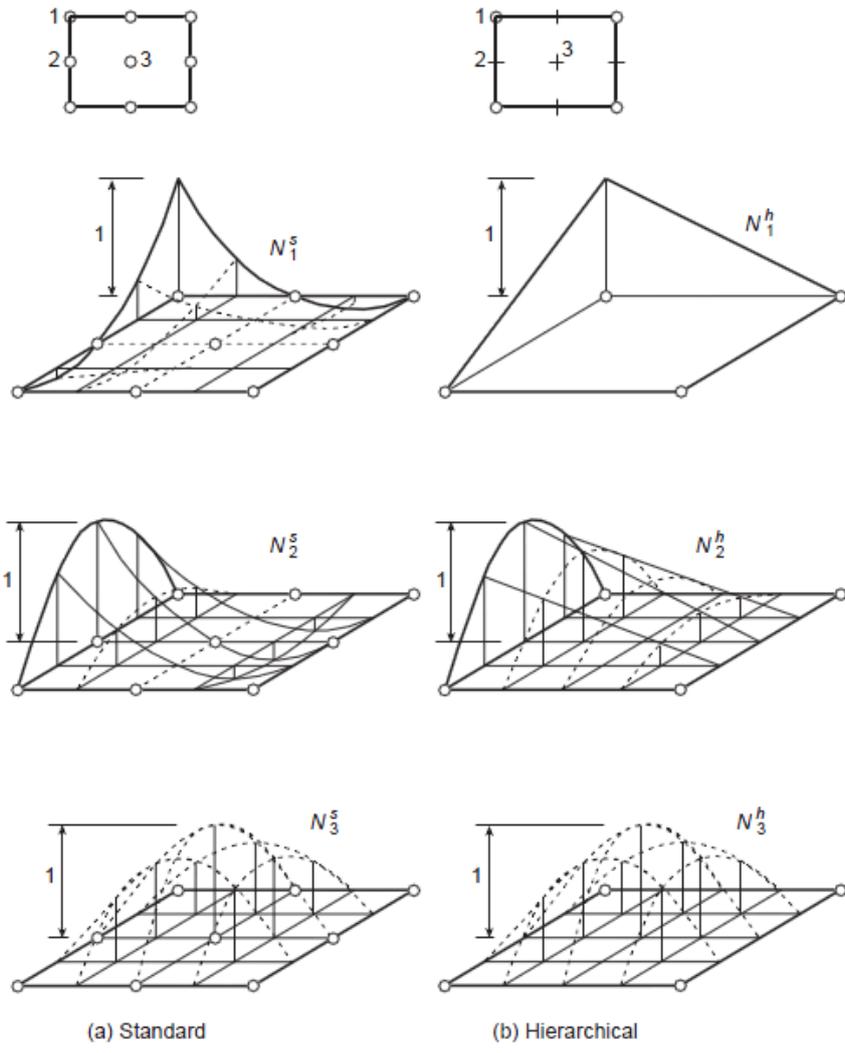


Figura 5.3: Funzioni di base lagrangiane standard e gerarchiche per elementi finiti quadratici su rettangoli.

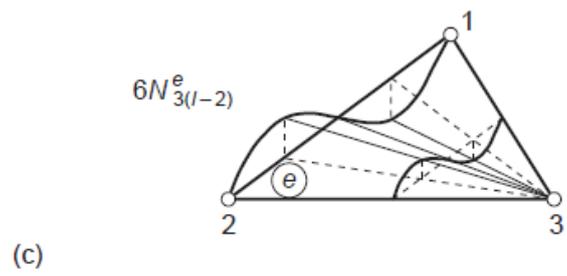
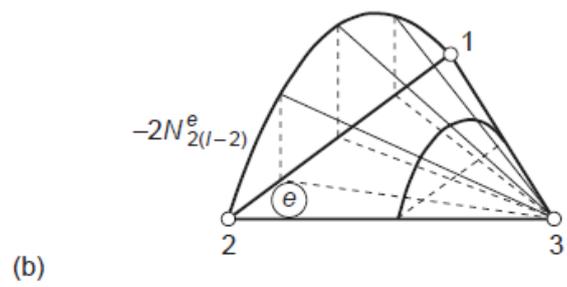
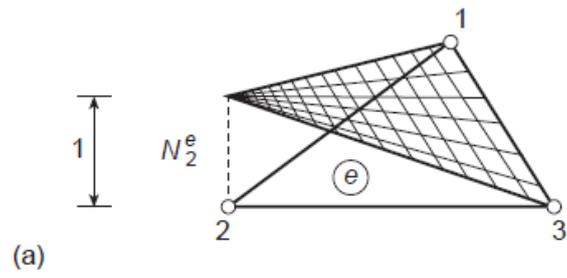
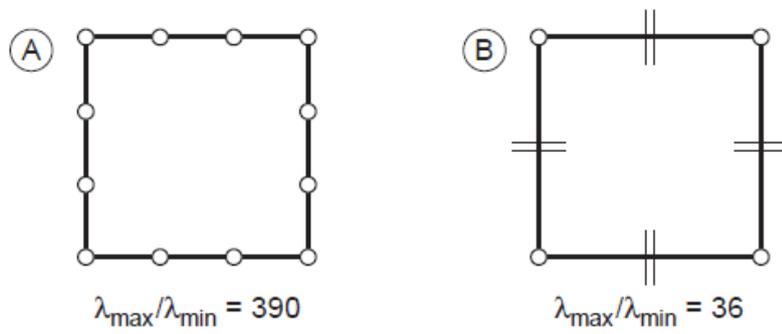


Figura 5.4: Funzioni di forma gerarchiche su un elemento triangolare nel caso (a) lineare, (b) quadratico e (c) cubico.

Single element (Reduction of condition number = 10.7)



Four element assembly (Reduction of condition number = 13.2)

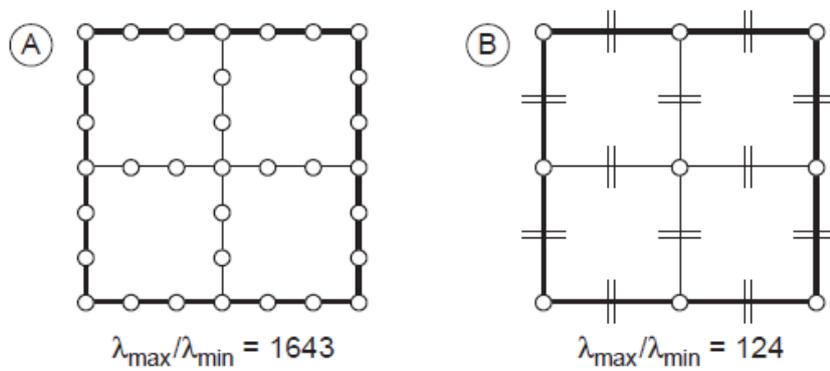


Figura 5.5: Numero di condizionamento se si usano elementi finiti cubici con: (a) funzioni di forma classiche, (b) funzioni di forma gerarchiche.

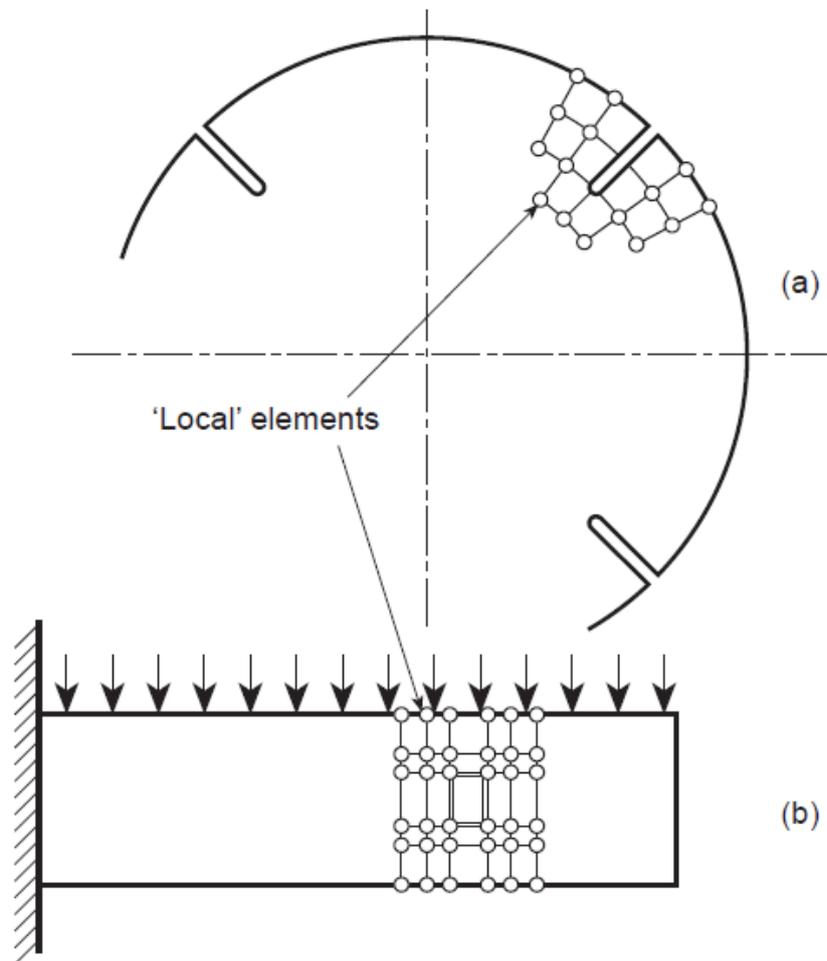


Figura 5.6: Possibili applicazioni in cui è utile un raffinamento locale della mesh.

## Capitolo 6

# Elementi finiti discontinui

Gli elementi finiti discontinui furono introdotti originariamente per risolvere problemi iperbolici ed è in questo contesto che ancora oggi sono usati e studiati.

Consideriamo il problema iperbolico

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega^-, \end{cases}$$

dove

$$\partial\Omega^- = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega \text{ t.c. } \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} < 0\}$$

e  $\mathbf{n}$  è la normale esterna. Per semplicità consideriamo il caso in cui il trasporto  $\boldsymbol{\beta}$  sia costante e il dominio  $\Omega$  sia suddiviso in due triangoli,  $T^+$  e  $T^-$ , come mostrato in Figura 6.1.

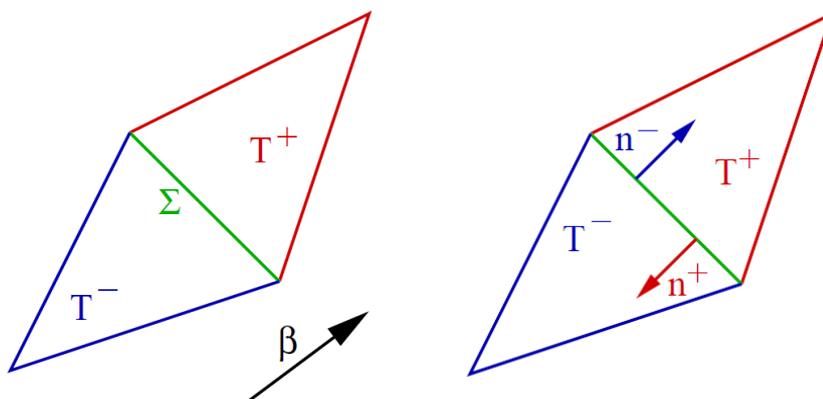


Figura 6.1: Definizione di uno spazio di elementi finiti discontinui.

Posto

$$v_{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v, \quad \beta_n^- = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}^-, \quad \beta_n^+ = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}^+,$$

moltiplicato ogni membro della precedente equazione per una funzione  $v$  discontinua e integrato per parti su ogni triangolo  $T$  si ottiene

$$-\sum_T \int_T uv_{\boldsymbol{\beta}} dx + \int_{\partial T^-} u^- v^- \beta_n^- ds + \int_{\partial T^+} u^+ v^+ \beta_n^+ ds = \int_{\Omega} f v dx.$$

Se vogliamo usare delle approssimanti discontinue anche per  $u$ , dobbiamo decidere che valore dare a  $u$  su  $\Sigma$ . La scelta più frequente è quella di prendere il valore di *upwind*. Nel caso della Figura 6.1 questo corrisponde a prendere  $u = u^-$  su  $\Sigma$ .

Per finire consideriamo il problema del trasporto passivo di uno scalare con un termine di reazione ( $\varepsilon$  =diffusione,  $\beta$  =trasporto,  $\rho$  =reazione),

$$-\varepsilon\Delta u + \beta \cdot \nabla u + \rho u = f \quad \text{in } \Omega$$

e per semplicità limitiamoci alla sua versione monodimensionale

$$-\varepsilon u'' + u' + 2u = 2. \tag{6.1}$$

Se consideriamo

$$\varepsilon = 10^{-1} \text{ e } h = 10^{-2} \tag{6.2}$$

non ci sono problemi, come si può vedere in Figura 6.2

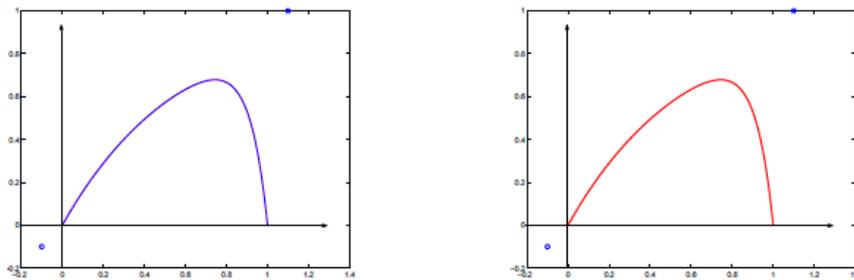


Figura 6.2: Problema 6.1 sotto le ipotesi 6.2. A sinistra soluzione esatta, a destra soluzione approssimata.

Ma se si considera

$$\varepsilon = 10^{-6} \text{ e } h = 10^{-2} \tag{6.3}$$

le cose vanno decisamente peggio, come si può vedere in Figura 6.3.

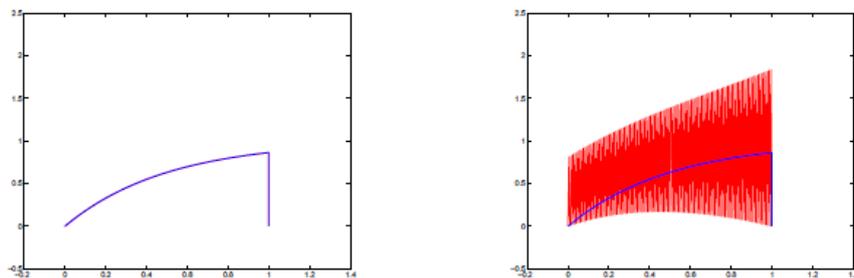


Figura 6.3: Problema 6.1 sotto le ipotesi 6.3. A sinistra soluzione esatta, a destra soluzione approssimata.

In due dimensioni le cose non migliorano. Consideriamo  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $\beta = (1, 3)$  e  $\rho = 0$  con  $h = 10^{-1}$ . Le condizioni ai limiti sono  $u = 1$  sul lato  $x = 1$  e sulla parte del lato  $y = 0$  dove  $x < 1/3$ ,  $u = 0$  altrove. La soluzione esatta ha quindi uno strato limite lungo la linea  $y = 3x - 1$  ed uno strato limite di bordo per  $y = 1$  e  $x < 2/3$ . Nella parte sinistra della Figura 6.4 è rappresentata una vista dall'alto della soluzione esatta della soluzione limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$

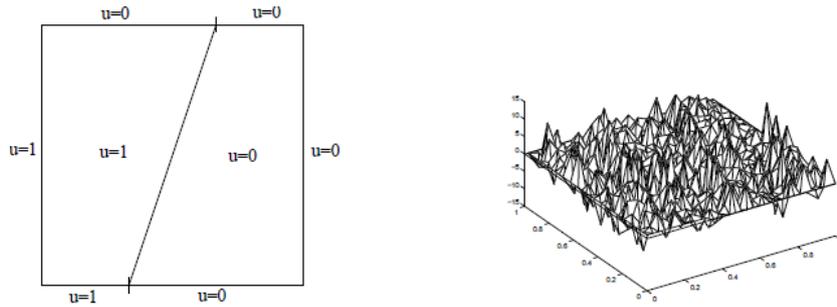


Figura 6.4: Confronto tra la soluzione esatta (a sinistra) e quella approssimata (a destra) del problema in 2D.

La soluzione classica a questo problema è quella di sfruttare il metodo *Streamline Upwind Petrov Galerkin* (SUPG) e cioè considerare al posto del problema originale la seguente formulazione debole alternativa

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \beta \cdot \nabla uv \, dx + \sum_T \tau_T \int_T (\beta \cdot \nabla u - f) \beta \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx = 0,$$

dove il parametro di stabilizzazione  $\tau_T$  va scelto opportunamente. Una soluzione alternativa è quella di considerare elementi finiti discontinui. In Figura 6.5 si confrontano la soluzione approssimata con elementi finiti discontinui simmetrizzati con il trattamento *upwind* del termine convettivo con la soluzione ottenuta usando il metodo SUPG. Come si può notare nel caso di elementi finiti discontinui lo strato limite risulta più ripido e le zone che dovrebbero essere rese piatte sono rese meglio.

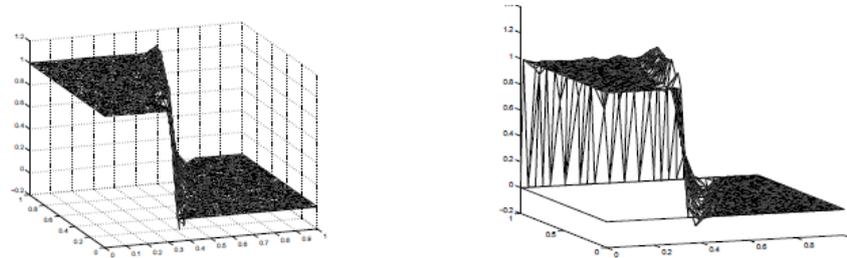


Figura 6.5: A sinistra soluzione ottenuta con elementi finiti discontinui. A destra soluzione ottenuta con il metodo SUPG.