Esercizi sulle funzioni

Esercizio 1. *Siano* $f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definite da*

$$f(x) = x - \sqrt{1 - x^2} \qquad g(x) = \ln x$$

1. *Trovare l'insieme di definizione di* f *e l'insieme di definizione di* g.
2. *Determinare le funzioni composte* $f \circ g$ *e* $g \circ f$*, specificandone gli insiemi di definizione.*

Soluzione

- $Def(f) = [-1, 1]$, $Def(g) = (0, +\infty)$.
- $f \circ g : \left[\frac{1}{e}, e\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = \ln x - \sqrt{1 - (\ln x)^2}$.
  $1 - (\ln x)^2 \geq 0$ iff $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$.
- $(g \circ f) : [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = \ln(x - \sqrt{1 - x^2})$.
  $x - \sqrt{1 - x^2} > 0$ per i valori di x per cui è soddisfatto il seguente sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ (\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1) \geq 0 \end{cases}$$

Cioè se e solo se $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

Esercizio 2. *Sia* $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 0 \\ \lambda x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

in cui λ *è un parametro reale.*
Dire se f *è una funzione da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ *e, in caso affermativo, dire per quali valori del parametro reale* λ f *è*

(i) *totale;*

(ii) *iniettiva;*

(iii) *suriettiva.*

Per i valori del parametro λ *per cui* f *è invertibile, determinare la funzione inversa di* f.

Soluzione

f è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, indipendentemente dai valori che assume il parametro λ. L'unico problema riguardo l'univocità di f si incontra in $x = 0$. Tuttavia si osserva che

$$f(0) = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$

e quindi f è effettivamente una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

(i) $Def(f) = \mathbb{R}$, indipendentemente da λ, quindi f è totale, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) • se $\lambda = 0$, f non è iniettiva, infatti $f^{\leftarrow}(1) = \mathbb{R}_+$.
• se $\lambda < 0$, f non è iniettiva, infatti $f^{\leftarrow}(0) = \{-1, -\frac{1}{\lambda}\}$.
• se $\lambda > 0$, f è iniettiva, infatti

- siano $x_1, x_2 > 0$, $\lambda x + 1$ è iniettiva;
- siano $x_1, x_2 < 0$, $1 - x^2$ è iniettiva;
- siano, $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$. Supponiamo, per assurdo, che $1 - x_2^2 = \lambda x_1 + 1$, da cui $x_1 = -\frac{x_2^2}{\lambda}$, che contraddice $x_1 > 0$.

(iii) Se $\lambda \leq 0$ f non è suriettiva.
Se $\lambda > 0$, f è suriettiva, l'inversa è

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x}, & x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\lambda}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. *Sia $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \leq 1 \\ -\ln x & x \geq 1 \end{cases}$$

Dire se f è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e, in caso positivo, dire se f è totale, iniettiva, suriettiva.
Esiste l'inversa di f? In caso affermativo, trovare f^{-1}.

Soluzione

f è una funzione poichè $(x-1)^2|_1 = 0 = -\ln x|_1$, inoltre è totale. f è inoltre iniettiva, infatti per $x \leq 1$ $(x-1)^2$ è iniettiva e positiva, mentre, per $x \geq 1$, $-\ln x$ è iniettiva e negativa. La suriettività di f la mostriamo esibendo l'inversa di f e mostrando che il suo insieme di definizione è tutto $\mathbb{R}$.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ e^{-x}, & x \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. *Siano $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definite da*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} \qquad g(x) = 1 - e^{\frac{1}{x}}$$

1. *Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g.*
2. *Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.*

Soluzione

$Def(f) = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.
$Def(g) = \mathbb{R}^*$.

$h(x) = (g \circ f)(x) = 1 - e^{\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}}$ e $Def(h) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
$k(x) = (f \circ g)(x) = \sqrt{e^{\frac{1}{x}}\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}$, $Def(k) = (0, +\infty)$.

Esercizio 5. *Sia $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 & x \leq 1 \\ \ln x & x \geq 1 \end{cases}$$

Dire se f è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e, in caso positivo, se f è totale, iniettiva, suriettiva. Esiste l'inversa di f? In caso affermativo, travare f^{-1}.

Sololuzione

f è una funzione poiché soddisfa la proprietà di univocità, infatti f è definita in due intervalli non disgiunti che hanno in comune in punto $x = 1$. Nei due intervalli $x < 1$ e $x > 1$ f è una funzione poiché è definita da funzioni, per cui l'unico punto in cui controllare l'univocità è $x = 1$ e in tale punto si ha che $-(1-1)^2 = 0 = \ln 1$.

f è totale (poichè il suo insieme di definizione è $\mathbb{R}$), è suriettiva dal momento che per $x \leq 1$ f è definita da un arco di parabola che assume solamente valori negativi e che si annulla solo in $x = 1$, che è anche il vertice di tale parabola; per $x \geq 1$ f è definita dalla funzione logaritmo che è positiva e assume tutti i valori positivi per $x > 1$ e si annulla solo per $x = 1$. Inoltre f è iniettiva, dal momento che le due funzioni che la definiscono nei due intervalli $x \leq 1$ e $x \geq 1$, sono iniettive nei due intervalli, nulle in $x = 1$ e $-(x-1)^2$ è negativa in $x < 1$ e $\ln x$ è positiva per $x > 1$.
Di conseguenza f ammette inversa:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} - 1 & x \leq 0 \\ e^x & x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 6. *Sia* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & x \geq 0 \end{cases}$$

Dire se f *è una funzione da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ *e, in caso positivo, dire se è totale, iniettiva, suriettiva. Esiste l'inversa di* f*? In caso affermativo trovare* f^{-1}*.*

Soluzione

Per $x > 0$ e per $x < 0$ f è certamente univa, poiché le due componenti x^2 e $-\frac{x^2}{4}$ sono univoche. Quindi l'unico punto in cui controllare l'univocità è il punto $x = 0$. Ora $x^2|_{x=0} = 0 = -\frac{x^2}{4}\Big|_{x=0}$ e quindi f è univoca.

f è totale, poiché $Def(f) = \mathbb{R}$. Inoltre f è suriettiva, infatti le due componenti di f lo sono. Infine f è anche iniettiva, infatti:
• siano $x_1, x_2 \geq 0$
tali che $f(x_1) = f(x_2)$, cioè $x_1^2 = x_2^2$ ed essendo $x_1, x_2 \geq 0$ deve essere $x_1 = x_2$;
• se $x_1, x_2 \leq 0$ si procede con in precedenza;
• se invece x_1 e x_2 sono discordi, prendiamo ad esempio $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$ allora $f(x_1) > f(x_2)$ dal momento che il membro di sinistra è positivo mentre quello di destra è negativo.

Poichè f è totale, iniettiva e suriettiva f è invertibile e la sua inversa è

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 2\sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 7. *Sia* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ \lambda x^3 + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$*, dire quando*

1. f *è una funzione da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$*;*
2. f *è suriettiva, e quando non lo è determinare* $Im(f)$*;*
3. f *è totale;*
4. f *è iniettiva;*
5. f *è biettiva.*
6. *Infine determinare l'inversa di* f *ove possibile.*

Soluzione

1. f_λ è funzione per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, infatti l'unico punto in cui si deve controllare l'univocità è $x = 0$ e $f_\lambda(0) = 1$ indipendentemente da λ.

2. • È semplice notare che se $\lambda > 0$ f_λ non è suriettiva, infatti $\lambda x^3 + 1 \leq 1$, mentre $e^{-x} \in (0,1]$, quindi tutti i valori $y \in (1,+\infty)$ non stanno nell'immagine di f. Quindi se $\lambda > 0$ allora $Im(f_\lambda) = (-\infty, 1]$.
   • Se $\lambda = 0$ allora f_λ è la funzione costante $f(x) = 1$ che non è suriettiva e $Im(f_1) = \{1\}$.
   • Se $\lambda < 0$ f_λ non è suriettiva poiché $f_\lambda > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi $Im(f_\lambda) = [1,+\infty)$. Riassumendo

$$Im(f) = \begin{cases} (-\infty, 1] \text{ se } x > 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \\ (0,+\infty) \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

3. f è totale dal momento che $Def(f_\lambda) = \mathbb{R}$ indipendentemente da λ.

4. È semplice provare che se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sono concordi, f è iniettiva. Siano, ad esempio, $x_1, x_2 > 0$ tale che $f(x_1) = f(x_2)$, cioè $e^{-x_1} = e^{-x_2}$ se e solo se $x_1 = x_2$. Analogamente si provano i casi $x_1, x_2 < 0$ e $x_1 = x_2 = 0$. La cosa è più delicata se x_1 e x_2 sono discordi. Assumiamo che $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$, cioè $e^{-x_1} = \lambda x_2^3 + 1$ e cioè è vero se e solo se

$$x_1 = -\ln(\lambda x_2^3 + 1)$$

   Ricordiamo che $x_1 \geq 0$ e quindi deve essere $\lambda x_2^3 + 1 < 1$ e $\lambda x_2^3 + 1 > 0$. La prima disuguaglianza è verificata se e solo se $\lambda > 0$. Restringiamoci, quindi al caso $\lambda > 0$. In tal caso la seconda disuguaglianza è verificata se e solo se $-\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}} < x_2 < 0$.

   Quindi f è iniettiva se e solo se $\lambda > 0$.

5. f non è mai biettiva.

6. f è invertibile solamente per $\lambda > 0$ e

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln x^{-1} \text{ se } x \in (0,1] \\ \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{\lambda}} \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

Esercizio 8. *Siano $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definite da*

$$f(x) = \ln \frac{x-1}{x} \qquad g(x) = \sqrt{e^x - 1}$$

1. *Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g.*

2. *Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.*

Soluzione

1. $Def(f) = (-\infty, 0) \cap (1,+\infty)$;
   $Def(g) = [0,+\infty)$.

2. $f \circ g : [\ln 2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = \ln \frac{\sqrt{e^x-1}-1}{\sqrt{e^x-1}}$;

   $(g \circ f)(x)$ non è mai definita.

Esercizio 9. *Date le seguenti funzioni $f(x)$ e $g(x)$ di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, determinare per ciascuna l'insieme di definizione, l'immagine, dire se sono, totali, iniettive, suriettive e biettive. Se le funzioni risultano iniettive calcolare l'inversa (sull'immagine). Quindi calcolare e dire dove sono definite $h := f \circ g$ e $k := g \circ f$.*

a. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x - 3$;

b. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$;

b. $f(x) = x - 5$, $g(x) = x^2 - 1$;

c. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \frac{1}{x}$[1];

d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$;

e. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x^2 - 1$;

Esercizio 10. *Date le funzioni* $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ *e* $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x+2}$, *dire se sono iniettive e in caso affermativo, determinare le inverse sull'imagine.*

Esercizio 11. *Data la funzione di* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-3}{x-3}$ *determinare insieme di definizione e immagine. Dire se* f *è iniettiva e iniettiva, suriettiva e biettiva. In caso di risposta* f *sia iniettiva, determinare l'inversa di* f.

Esercizio 12. *Data la funzione di* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 7 & per\ x \leq -2 \\ x - 1 & per\ -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{x^2}{4} - x + 2 & per\ x \geq -2 \end{cases}$$

determinare insieme di definizione e immagine. Disegnare $f(x)$. *Dire se* f *è iniettiva, suriettiva e biettiva. In caso di risposta* f *sia iniettiva, determinare l'inversa di* f.

Esercizio 13. *Sia* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ e^x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Dire se f *è una funzione da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ *e, in caso positivo, dire se è totale, iniettiva, suriettiva. Esiste l'inversa di* f*? In caso affermativo trovare* f^{-1}.

Esercizio 14. *Siano* $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definite da*

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad g(x) = 1 - e^x$$

1. *Trovare l'insieme di definizione di* f *e l'insieme di definizione di* g.

2. *Determinare le funzioni composte* $f \circ g$ *e* $g \circ f$, *specificandone gli insiemi di definizione.*

Esercizio 15. *Sia* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & se\ x \geq 0 \\ e^x - 1 & se\ x \leq 0 \end{cases}$$

Dire se f *è una funzione di* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$, *e in caso positivo, dire se* f *è totale, iniettiva o suriettiva. Esiste la funzione inversa di* f*? In caso affermativo, trovare* f^{-1}.

Esercizio 16. *Siano* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definite da*

$$f(x) = \ln\left[\sqrt{1 + x^3} - \sqrt{2x}\right], \quad g(x) = e^{-x}$$

Determinare $Def(f)$, $Def(g)$, $Im(f)$ *e* $Im(g)$. *Inoltre determinare* $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *dove sono definite.*

Esercizio 17. *Siano* $\varphi : A \longrightarrow B$ *e* $\psi : B \longrightarrow C$ *due funzioni. Si dimostri che:*
1. se $\psi \circ \varphi$ *è suriettiva allora* ψ *è suriettiva;*
2. se $\psi \circ \varphi$ *è iniettiva allora* φ *è iniettiva.*

[1] Questo l'ho fatto in aula.