

## PITAGORISMO

### Losee Capitolo 2

La scuola Pitagorica (scuola di matematici e scienziati, ma anche congregazione religiosa che credeva nella reincarnazione e sembra aver assorbito alcune idee che troviamo anche nei culti orfici e dionisiaci) riteneva che i rapporti numerici ed in particolare dai rapporti dati da numeri razionali (l'insieme denotato oggi da  $Q$ ), fossero l'essenza della realtà. Aristotele li criticherà per avere dato troppa importanza alle cause formali. La fiducia nel fatto che i numeri razionali fossero l'essenza della realtà fu scossa quando nella scuola pitagorica si scoprì che la radice quadrata di due è irrazionale.

Esercizio. Dimostra che la radice quadrata di due è irrazionale. Supponi che lo sia, poniamo  $\sqrt{2} = p/q$  e supponiamo che  $p$  e  $q$  siano primi tra loro. Allora  $p^2/q^2 = 1 + 1$  per il teorema di Pitagora (perché?) e dunque  $p^2 = 2 \cdot q^2$ . Ne segue (perché?) che  $p$  è pari, diciamo  $p = 2r$ . Ma allora  $2 \cdot r^2 = q^2$ . Concludi l'argomento.

Evidenza per la teoria pitagorica veniva dalla scoperta che le altezze percepite dei suoni erano correlate a rapporti razionali tra lunghezze delle corde vibranti o, negli strumenti a fiato, delle colonne d'aria vibranti.

### RICHIAMI DI TEORIA MUSICALE.

La differenza in altezza percepita tra due suoni si dice intervallo. Nella musica occidentale l'intervallo più piccolo è detto semitono; un tono corrisponde (circa) a due semitoni. Ricorda che la scala musicale occidentale consiste dei suoni

re b	mi b			sol b	la b	si b													
≈	≈			≈	≈	≈													
do#	re#			fa#	sol#	la#		....											
do	re	mi	fa	sol	la	si	do'	re'	mi'	fa'	...								

dove le note do, re, mi, fa, sol, la, si (scala naturale) sono dette note naturali; una nota con il diesis è un semitono sopra la nota naturale (do# - do) ; una nota con il bemolle è un semitono sotto la nota naturale (re b - re).

L'intervallo tra due note naturali è sempre di un tono eccetto che tra mi-fa e si-do dove è di un semitono. (In un pianoforte le note naturali si suonano sui tasti bianchi; i tasti neri danno i suoni intermedi a distanza di un semitono tra i due toni).

L'intervallo di quinta è definito come la distanza di tre toni ed un semitono. Nella scala naturale questo è l'intervallo tra una nota e la quinta nota superiore, do-sol, re-la), con l'eccezione dell'intervallo tra si-fa, che è di soli tre toni; dunque la nota una quinta sopra il si è il fa#, non il fa naturale.

## LA SCOPERTA DEI PITAGORICI.

I pitagorici scoprirono che il rapporto tra le lunghezze delle corde che producono una nota e quella dell'ottava superiore è di 2:1 e quello tra una nota e quella della quinta nota superiore è 3:2 (da cui segue che il rapporto tra una nota e quella della quarta è 4:3 - perché?) Poiché la frequenza delle note è inversa alla lunghezza della corda vibrante, ponendo uguale ad 1 la frequenza di una nota data, assegnamo all'ottava superiore frequenza 2, alla quinta  $3/2$  ed alla quarta  $3/4$ .

Le frequenze delle altre note nella scala naturale sono calcolabili attraverso il ciclo delle quinte: sol =  $3/2$  do, re =  $3/2$  sol, ..., fa diesis =  $3/2$  si ed inoltre si bemolle =  $4/3$  fa. Tuttavia questo modo di calcolare le altezze delle note e di intonare gli strumenti conduce ad intervalli non uniformi, come vedremo nell'esercizio qui sotto. Per esempio  $do\# \neq re\flat$ ,  $re\# \neq mi\flat$ , eccetera.

## IL TEMPERAMENTO EQUABILE.

Pertanto questo modo di accordare gli strumenti (temperamento naturale) entrò in conflitto con le esigenze espressive della musica barocca e venne sostituito nel corso del XVIII secolo dal temperamento equabile (usato da Bach nel Clavicembalo ben temperato) in cui tutte le 12 note della scala cromatica hanno lo stesso intervallo con la nota precedente, il  $do\#$  è uguale al  $re\flat$ , eccetera. Si può mostrare che la differenza di frequenza di un semitono deve essere la radice 12esima di 2.

Infatti in una ottava, per esempio, tra il do ed il do' all'ottava superiore, ci sono 12 semitoni e per aumentare di un semitono si moltiplica la frequenza data di un numero  $x$  tale che moltiplicando dodici volte per quel numero  $x$  si ottiene il doppio della frequenza data. Quindi ci sono rapporti razionali tra i logaritmi in base 2 delle frequenze, non tra le frequenze stesse. Per esempio l'intervallo tra do e mi (due toni) corrisponde ad un rapporto di frequenze che è la radice terza di due.

**ESERCIZIO.** Computa il rapporto di frequenza della terza mi/do e della terza si bemolle/fa diesis nella scala naturale pitagorica applicando il ciclo delle quinte.

Dato che la radice cubica di 2 è approssimativamente 1,259921, confronta i rapporti mi/do e si bemolle/fa diesis (due distinti toni naturali) con l'unico valore di due toni nella scala temperata equabile.