

Logica proposizionale: lezione 1 e compito 1

Gianluigi Bellin

October 12, 2011

1 Sintassi, Semantica, Prammatica.

Vogliamo costruire un linguaggio simbolico che sia completamente privo di ambiguità ed adatto per essere implementato in un computer. Cercheremo di tradurre il linguaggio ordinario in questo linguaggio simbolico.

Nella logica proposizionale ci occupiamo delle proposizioni, entità che possono essere *vere* o *false*.

Parliamo di *proposizioni* o di *enunciati*: c'è una differenza filosofica, gli enunciati sono espressioni linguistiche (scritte o parlate) dotate di senso, le proposizioni sono i pensieri associati agli enunciati. Questa scelta è un problema di *filosofia del linguaggio* (G. Frege, B. Russell, L. Wittgenstein, M. Dummett, ...)

Ogni linguaggio si può studiare dal punto di vista della *sintassi*, della *semantica* e *della* prammatica.

1.1 Sintassi

La **sintassi** consiste nelle *regole che specificano quando le componenti del linguaggio sono ben formate*.

Avremo alcune *componenti atomiche* del linguaggio e dei *costruttori* di componenti complesse a partire da componenti meno complesse. Il caso del linguaggio della *logica proposizionale* è semplice. Abbiamo

- Una lista $p_0, p_1, p_2 \dots$ di *formule proposizionali atomiche*;
- l'operazione di *negazione* \neg : scriviamo $\neg A$ per *non A (connettivo unario)*;
- le operazioni di *implicazione* \rightarrow , *coniunzione* \wedge , *disgiunzione* \vee ; $A \rightarrow B$ sta per *A implica B*, $A \wedge B$ sta per *A e B*, $A \vee B$ sta per *A o B (connettivi binari)*.

La **grammatica** è definita dalla regole seguente:

$$A, B \quad := \quad p \mid \neg A \mid A \rightarrow B \mid A \wedge B \mid A \vee B$$

da leggere così:

1. Una formula atomica p è una formula proposizionale;
2. Se A è una formula proposizionale, allora $\neg A$ è una formula proposizionale;

3. Se A e B sono formula proposizionali, allora $A \rightarrow B$, $A \wedge B$, $A \vee B$ sono formule proposizionali;
4. Solo espressioni costruite applicando le regole 1, 2, 3 sono formule proposizionali.

1.2 Semantica

Per definizione le proposizioni sono entità che possono essere *vere* o *false*.

Potremmo anche considerare la possibilità che le proposizioni abbiano valore di verità *vero*, *falso* o *indefinito*. La **logica classica** non ammette la possibilità che le proposizioni abbiano un valore di verità indefinito.

La **semantica** della logica proposizionale classica è data dalla specificazione di

- una assegnazione \mathcal{V} di valori di verità alle formule proposizionali atomiche, $\mathcal{V}(p_i) = v$ oppure f ;
- regole per assegnare un valore di verità alle formule proposizionali composte, dati i valori dei verità delle fomule componenti (**tabelle di verità**).

A	B	$\neg A$	$A \rightarrow B$	$A \wedge B$	$A \vee B$
v	v	f	v	v	v
v	f	f	f	f	v
f	v	v	v	f	v
f	f	v	v	f	f

1.3 Prammatica

La prammatica del linguaggio studia *quello che facciamo con il linguaggio*, cioè in primo luogo gli **atti linguistici**: *asserzioni, ipotesi, congetture, domande, risposte, comandi, promesse, . . .*

Un atto linguistico non è ne vero nè falso; piuttosto, è *giustificato* o *ingiustificato*.

Assumiamo qui la tesi che *ogni atto linguistico del tipo sopra indicato contenga una proposizione che dunque in opportune circostanze può essere vera o falsa*.

Per esempio, abbiamo i seguenti atti linguistici:

- **asserzione**: “*La porta è chiusa*”. Se faccio questa asserzione, asserisco una proposizione *la porta è chiusa* . L’asserzione è *giustificata* dalle prove che ho del fatto che la proposizione è vera (p. es., vedo la porta chiusa).
- **ipotesi**: “*Forse la porta è chiusa*”. È giustificato fare questa ipotesi se non so che la porta è aperta.
- **domanda**: “*La porta è chiusa?*” È giustificato fare questa domanda se si ritiene che la porta possa essere chiusa e che la persona cui la domanda è rivolta possa essere in grado di rispondere.
- **risposta**: “*La porta è chiusa!*”. Quali sono le condizioni di giustificazione?
- **comando**: “*Chiudi la porta!*”. È giustificato comandare se si ha l’autorità per farlo, se la persona comandata è in grado di eseguire l’ordine ecc.

In tutti questi casi, l'atto linguistico contiene la stessa proposizione *la porta è chiusa*. Nel caso di un comando possiamo parafrasare “*Chiudi la porta!*” come “*Fai in modo che la proposizione la porta è chiusa diventi vera*”.

Il nostro compito qui è di *astrarre* dagli atti linguistici e concentrarci sulle proposizioni in essi contenute.

2 Esercizio 1.

Traduci i seguenti enunciati in formule del calcolo proposizionale fornendo la chiave della traduzione. Scrivi la tabella di verità della formula ottenuta.

Esempio:

Se si dà il caso che ho perso quando non posso fare alcuna mossa, allora ho perso.

Chiave:

p = io ho perso;

q = io posso fare una mossa

Traduzione:

$$((\neg q) \rightarrow p) \rightarrow p$$

Tabella di verità:

p	q	$\neg q$	$(\neg q) \rightarrow p$	$((\neg q) \rightarrow p) \rightarrow p$
v	v	f	v	v
v	f	v	v	v
f	v	f	v	f
f	f	v	f	v

oppure, in forma più compatta,

p	q	$((\neg q) \rightarrow p) \rightarrow p$
v	v	$((f\ v)\ v\ v)\ \mathbf{v}\ v$
v	f	$((v\ f)\ v\ v)\ \mathbf{v}\ v$
f	v	$((f\ v)\ v\ f)\ \mathbf{f}\ f$
f	f	$((v\ f)\ f\ f)\ \mathbf{v}\ f$

- 1) Questo motore non è rumoroso, ma consuma molta energia.
- 2) Non è vero che Gianni viene se Pietro o Enrico viene.
- 3) Non è vero che Caino è colpevole e Abele no.
- 4) Questo testo non è stato scritto con una penna o con una matita.
- 5) Caino non è solo irragionevole ma anche crudele.
- 6) Gianni vuole sia il trenino che la bicicletta per la Befana, ma non avrà né l'una né l'altra.
- 7) Nessuno rise o applaudí.

- 8) Vado alla spiaggia o al cinema a piedi o in bicicletta.
...
- 12) Se piove quando il sole splende, allora appare l'arcobaleno.
...
- 19) Gianni viene solo se Pietro non viene.
- 20) Gianni viene precisamente se Pietro non viene.
- 21) Gianni viene precisamente quando Pietro resta a casa.
- 22) Noi andiamo, a meno che non piova.