

## FREGE: LOGICA E FILOSOFIA

Il filosofo tedesco Gottlob Frege (1848-1925) è forse il più grande logico dopo Aristotele; è anche uno dei fondatori della moderna *filosofia analitica*. La scoperta dei *quantificatori universale ed esistenziale* consente di formalizzare in notazione logica il concetto matematico di funzione. In effetti Bertrand Russell (1872-1970) e Alfred Whitehead (1861-1947) nei *Principia Mathematica* e molti altri logici nel XX secolo mostrarono che è possibile formalizzare tutta la matematica, e quindi anche la fisica matematica, nel linguaggio della logica, come proposto da Frege. Questa formalizzazione non era assolutamente possibile nella logica di Aristotele: i sillogismi infatti consentono di trattare solo relazioni di inclusione tra le estensioni dei predicati, non le funzioni.

Dati due insiemi di elementi A e B, una relazione R su A e B associa elementi di A ed elementi di B; l'*estensione* di R è dunque un insieme di coppie ordinate  $\langle a, b \rangle$  dove  $a \in A$  e  $b \in B$ .

Una funzione  $f: A \rightarrow B$  è una regola che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B. L'*estensione* della funzione f è un insieme di coppie che soddisfano quella proprietà.

Per esempio l'espressione "il padre di x" associa ad ogni elemento dell'insieme A degli esseri umani uno ed un solo elemento dell'insieme B che comprende gli esseri umani (ed inoltre chi diede origine ai primi esseri umani non umanamente generati). Se  $P(y, x)$  formalizza la relazione "y è padre di x" allora l'espressione "il padre di x" è definita se e solo se

$$\forall x \in A \exists y \in B. [ P(y, x) \wedge \forall z \in B. P(z, x) \supset y = z ].$$

In questo caso possiamo introdurre una funzione  $f: A \rightarrow B$  e scrivere

$$\forall x \in A. P(f(x), x)$$

(Si ricordi anche come si è formalizzato in classe l'espressione "il re di Francia".) Inoltre le principali proprietà delle funzioni si possono formalizzare nel linguaggio della logica: per esempio una funzione f è *iniettiva* se manda elementi distinti di A in elementi distinti di B;

$$\forall x, y \in A. x \neq y \supset f(x) \neq f(y)$$

una funzione è *suriettiva* se ogni elemento di B è raggiunto da un elemento di A attraverso f:  $A \rightarrow B$ :

$$\forall z \in B. \exists x \in A. f(x) = z$$

La funzione "il padre di x" non è né iniettiva (consideriamo due fratelli dello stesso padre) né suriettiva (non tutti sono padri). Invece "il cuore di x", la funzione  $g: A \rightarrow B$  dove A è l'insieme degli esseri umani viventi e B l'insieme degli organi di esseri umani viventi, è sia iniettiva che suriettiva.

## IL CONCETTO DI NUMERO SECONDO FREGE (\*non esaminabile\*)

Una funzione che sia *suriettiva* ed *iniettiva* si dice *biettiva* (una *biezione*).

Se  $f: A \rightarrow B$  è biettiva, allora esiste una funzione  $g: B \rightarrow A$  tale che  $g(f(a)) = a$  per ogni  $a \in A$  e  $f(g(b)) = b$  per ogni  $b \in B$ . L'idea di Frege è di definire il concetto di *numero* a partire da quello di funzione biettiva.

Diciamo che due insiemi  $A$  e  $B$  sono *altrettanto numerosi* se esiste una biezione  $f: A \rightarrow B$ . Allora il *numero dell'insieme*  $A$  è l'insieme degli insiemi  $B$  che sono altrettanto numerosi che  $A$ ; per esempio, il numero tre è il numero dell'insieme  $\{\text{Paolo, Marco, Maria}\}$ , dove Paolo, Marco e Maria sono tre individui distinti.

Un aspetto interessante di questa definizione è che consente di definire anche *numeri infiniti*. Per esempio, come ha mostrato il grande matematico Georg Cantor (1845-1918), non esiste una biezione tra l'insieme dei numeri naturali  $N$  e quello dei numeri reali  $R$ , ma solo tra  $N$  e sottoinsiemi di  $R$ ; dunque  $N$  *ha un numero minore* di  $R$ , mentre l'insieme dei naturali è *altrettanto numeroso* dell'insieme dei razionali  $Q$ .

Da un punto di vista filosofico il risultato di Frege è importante: non solo il concetto di funzione ma anche quello di numero sono definiti a partire dal concetto di insieme usando gli operatori della logica (*logicismo in filosofia della matematica*).

Tuttavia questa definizione presenta alcuni problemi. Pare che possiamo attribuire un numero all'estensione di qualsiasi concetto, a condizione di poter raccogliere in un insieme e confrontare insieme arbitrari. Ma se assumiamo che esista *l'insieme di tutti gli insiemi* allora incorriamo in un paradosso, come fu mostrato da Bertrand Russell a Frege nel 1900.

Infatti sia  $S$  l'insieme di tutti gli insiemi e sia  $P$  il sottoinsieme di  $S$  che consiste di tutti e soli gli insiemi che non appartengono a se stessi. In simboli:

$$P = \{ X \in S : X \notin X \}$$

Ma vale  $P \in P$ ? Se  $P \in P = \{ X \in S : X \notin X \}$  allora  $P \notin P$  per definizione di  $P$ , cioè perché  $P$  contiene solo elementi che non appartengono a se stessi, contraddizione.

Se invece  $P \notin P$  allora  $P \in P$  per definizione di  $P$ , perché  $P$  contiene tutti gli elementi che non appartengono a se stessi, contraddizione.

Poiché in ogni caso otteniamo una contraddizione, questa deriva dalla definizione dell'insieme  $P$ . Ma se l'insieme  $S$  potesse essere definito correttamente, anche  $P$  lo sarebbe, usando solo il concetto di appartenenza; dunque neppure l'insieme  $S$  è definibile correttamente.

Ma allora non possiamo passare da un concetto arbitrariamente definito alla sua estensione, come Frege faceva: Frege riconobbe il problema e non offrì una soluzione.

La soluzione proposta da Russell è di introdurre una gerarchia di *tipi*:  $x \in A$  implica che A sia di un tipo superiore a x, e dunque non potremo mai domandarci se  $x \in x$ .

Un'altra soluzione, adottata generalmente dai matematici, è quella di distinguere tra *insiemi* e *classi*: possiamo parlare della classe di tutti gli insiemi ma una classe non può essere elemento di un insieme. Che cosa sia un insieme viene poi definito assiomaticamente: vengono cioè presentati degli *assiomi* dai quali solamente possiamo definire le classi che sono anche insiemi.

## LA FILOSOFIA DEL LINGUAGGIO DI FREGE

Frege riteneva che fosse possibile usare gli strumenti della logica per disciplinare non solo il linguaggio della scienza ma anche il linguaggio ordinario, togliendone le ambiguità ed imprecisioni. Attraverso la formalizzazione diviene possibile specificare anche le proprietà semantiche delle proposizioni del linguaggio ordinario, in particolare stabilire se siano *logicamente valide*, *soddisfacibili*, *falsificabili* o *contraddittorie*: il concetto di *modello* formalizzato dal logico Alfred Tarski negli anni 30 diventerà strumento importante per la semantica del linguaggio naturale.

Il linguaggio è un fenomeno inter-soggettivo, pubblico: noi riusciamo a comunicare perché, data una proposizione ben formata del linguaggio naturale, siamo in grado di concordare nel giudizio che in determinate circostanze essa è vera o falsa. Frege vuole spiegare come questo sia possibile: una prima risposta è che il significato di una proposizione dipende dal significato delle parole che la compongono (*principio di composizionalità*) ed inoltre che il significato fornisce un metodo per cercare di valutare se le proposizioni siano vere o false; noi concordiamo nel significato delle parole e quindi della proposizione stessa e quando riusciamo a stabilirne la verità, questa può essere riconosciuta anche da altri.

Frege critica la teoria di David Hume e di tutti i filosofi che riducono i concetti a combinazioni di immagini sensoriali. Infatti le immagini sensoriali sono soggettive: su questa base non arriveremo mai a concordare sul significato delle proposizioni.

Ma Frege è in disaccordo anche con la dottrina di Kant che attribuisce alle funzioni sintetiche dell'intuizione pura (spazio e tempo) e dell'intelletto (categorie) una funzione costitutiva dell'esperienza, rendendo in questo modo impossibile una conoscenza della realtà in se stessa (noumeno). Infatti lo sviluppo della logica dei predicati, effettuata dallo stesso Frege, gli consente di sostenere che la conoscenza esatta consiste di giudizi analitici a priori (solo la geometria per Frege consiste di giudizi sintetici). Inoltre Frege ritiene che i dubbi scettici di Hume si applichino solamente se la conoscenza viene fondata solo sulle *impressioni dei sensi*, non sui concetti del *pensiero*.

Nel famoso saggio *Sinn und Bedeutung* Frege sostiene che le espressioni ben formate del linguaggio hanno un *senso* (Sinn) ed una *referenza* o *denotazione* (Bedeutung).

Il *senso* del nome "*Barak Obama*" è un insieme di pensieri che ogni persona linguisticamente competente associa a quel nome, tra cui il fatto che egli era il presidente degli Stati Uniti nel 2012. La *referenza* di "*Barak Obama*" è la persona fisica che era presidente degli Stati Uniti nel 2012.

Il predicato "*x è presidente degli Stati Uniti nel 2012*" non ha un significato compiuto, è una *espressione insatura*. Una espressione insatura acquista senso e referenza quando sostituiamo in essa un nome o un'altra espressione che denoti un individuo, come quando diciamo

(i) *Barack Obama è presidente degli Stati Uniti nel 2012*

oppure (i)

(ii) *La seconda persona di razza nera che cercò di divenire candidato alle elezioni presidenziali è presidente degli Stati Uniti nel 2012*

oppure

(iii) *Jessie Jackson è presidente degli Stati Uniti nel 2012.*

Il *senso* di una proposizione è il pensiero da essa espresso. Ciascuna delle proposizioni (i) - (iii) ha un senso diverso dalle altre. Ma (i) e (ii) sono vere mentre la (iii) è falsa: qual è la loro referenza? Frege sostiene che la *referenza* di una proposizione ben formata è un *valore di verità*, considerato come un *oggetto logico*. Per garantire l'oggettività della conoscenza Frege postula l'esistenza di tali oggetti astratti.

Le espressioni come "*il presidente degli Stati Uniti nel 2012*" o "*la seconda persona di razza nera che cercò di divenire candidato alle elezioni presidenziali negli USA*" non sono insature, ma hanno il *senso* che è dato da quello delle espressioni che le compongono e che consente di ricercare un individuo che le soddisfi nell'insieme degli esseri umani; hanno come *referenza* le persone che esse descrivono, cioè Barak Obama. Mentre il predicato "*x è marito di Michelle Obama*" è una espressione che applicata ad una persona ritorna un valore di verità, "*il marito di x*" è una espressione funzionale che applicata ad una persona ritorna una persona. Le espressioni del tipo "*il marito di Michelle Obama*" sono chiamate *descrizioni definite*. La teoria delle descrizioni definite venne sviluppata da Bertrand Russell, sulla base dell'interpretazione logica delle espressioni funzionali.

Una tesi importante di Frege è che il significato di una espressione non dipende solamente dalla *referenza* delle espressioni che la compongono. Consideriamo i seguenti esempi di Frege:

(iv) *la stella della sera è uguale alla stella del mattino*

(v) *la stella della sera è uguale alla stella della sera.*

Forse già gli antichi astronomi babilonesi sapevano che l'oggetto celeste che più

d'ogni altro brilla nel cielo la sera e la mattina è il pianeta che chiamiamo Venere. Sia in (iv) che in (v) abbiamo identità della referenza dei termini; ma (iv) è una scoperta astronomica, mentre (v) è una tautologia logica. Dunque, conclude Frege, il senso delle espressioni è fondamentale nel determinare il significato dei termini, non solo la loro referenza.

Un altro aspetto del significato si aggiunge alla teoria di Frege e complica molto il quadro: le espressioni *indicali*, come *qui*, *là*, *ora*, *poi*, *oggi*, *domani*, *questo*, *quello*, ecc. Queste espressioni hanno una *referenza diretta* che viene determinata dal contesto, dalla situazione in cui la frase viene pronunciata. Il senso e la referenza delle espressioni che contengono espressioni indicali non può essere determinato senza conoscere il contesto. Inoltre l'interpretazione delle espressioni indicali richiede talvolta di comprendere le *intenzioni* del parlante. Qui la psicologia, che Frege aveva nettamente separata dalla teoria del significato, rientra nel quadro in modo importante. Infatti l'interpretazione delle descrizioni definite dipende talvolta dalle intenzioni del parlante. Consideriamo l'esempio di Keith Donnellan (1931-): qualcuno ad un party domanda ad un amico

(vi) *Chi è l'uomo che beve Martini?*

Nella stanza c'è un uomo che ha in mano un bicchiere con una bevanda rossa e parla con la moglie dell'amico. In effetti, la bevanda rossa è un'aranciata, dunque non esiste uno ed un solo uomo che beve Martini nella stanza e la descrizione definita non denota nessuno. Ma l'amico capisce ugualmente la referenza di quella espressione, guidato dall'intenzione del parlante. In questo caso si parla di *uso referenziale delle descrizioni definite*.

La teoria della referenza diretta è stata sviluppata nella seconda metà del XX secolo ed è tuttora un argomento di ricerca importante in linguistica e filosofia.

## BERTRAND RUSSELL E LUDWIG WITTGENSTEIN

Come detto precedentemente, il contributo di Bertrand Russell alla logica ed ai fondamenti della matematica è legato alla sua scoperta del paradosso nel sistema di Frege ed alla soluzione di esso attraverso la teoria dei tipi. Il concetto di tipo ha trovato importanti applicazioni nella linguistica e nell'informatica, dove viene spesso considerato nel contesto della *logica intuizionistica*. Tuttavia Bertrand Russell mantenne la logica classica come fondamentale per il suo sistema logico-matematico.

La filosofia del linguaggio di Bertrand Russell si discosta da quella di Frege sul ruolo delle entità astratte. Russell si ricollega alla tradizione empirista inglese distinguendo tra "knowledge by acquaintance" e "knowledge by description". Per conoscenza diretta (*acquaintance*) conosciamo i *dati dei sensi*, per esempio verificando espressioni come "*qui c'è verde*". Attraverso la conoscenza descrittiva conosciamo tutto il resto: non abbiamo accesso ad oggetti astratti come il *vero* ed il *falso* di Frege; la referenza di una proposizione è un fatto, una situazione, se la proposizione è vera, la referenza di una descrizione definita la persona da essa descritta, secondo l'analisi logica delle proprietà funzionali.

Toccò a Ludwig Wittgenstein (1889 - 1951) di formulare la metafisica corrispondente alla nuova logica di Frege. Nelle prime cinque asserzioni principali del *Tractatus Logico-Philosophicus* 1922 Wittgenstein sostiene che

1. Il mondo è tutto ciò che accade.
2. Ciò che accade, il fatto, è il sussistere di stati di cose.
3. L'immagine logica dei fatti è il pensiero.
- 4 Il pensiero è la proposizione munita di senso.
5. La proposizione è una funzione di verità delle proposizioni elementari.
  
7. Su tutto ciò di cui non si è in grado di parlare, si deve tacere.

La proposizione 6 presenta la forma generale della funzione di verità nella nozione di Wittgenstein.

(L'espressione tedesca "sinnvoll" che compare nella proposizione 4 vuol dire "sensato" e non va intesa come referenza al concetto di "senso" in Frege.)

Dunque il mondo è la totalità dei *fatti*, non delle *cose*, ed i fatti sono ciò cui corrispondono le proposizioni vere. Il linguaggio logico *mostra* la struttura logica della realtà, ma la corrispondenza tra linguaggio logico e realtà non appartiene alla logica.

## WITTGENSTEIN L'ETICA E LA RELIGIONE

La conferenza sull'etica, pubblicata in *Lezioni e conversazioni sull'etica, l'estetica, la psicologia e la credenza religiosa*, Adelphi, Milano 1967, riflette opinioni vicine all'impostazione filosofica del *Tractatus*. L'idea di un (1) *bene assoluto*, indipendente dalle circostanze, come le esperienze del (2) sentimento di *stupore per il fatto che il mondo esiste* o di (3) *sicurezza assoluta* associato all'idea di "essere nelle mani di Dio" o il senso di (4) *vergogna* associato all'idea che le mie azioni siano disapprovate da Dio, sono alla radice sia delle credenze religiose sia dell'etica *non consequenzialista* (come quella sostenuta da Kant) in cui un'azione può venire considerata buona in un senso assoluto, indipendente dalle sue conseguenze. Ma secondo Wittgenstein quando diamo un nome agli oggetti di queste esperienze e ne sosteniamo la validità stiamo forzando il senso che le parole *buono, stupore, sicurezza, vergogna* hanno nel linguaggio comune, dove sono perfettamente sensate e comprensibili. Nel nuovo contesto tuttavia esprimono sentimenti condivisibili ma non hanno un significato ben definito: prenderle come descrizioni significa "*avventarsi conto i limiti del linguaggio*"

Nelle lezioni e scritti successivi pubblicati postumi, come le *Osservazioni sui fondamenti della matematica* 1956 e le *Osservazioni filosofiche* 1964 Wittgenstein si allontana dal punto di vista del *Tractatus*. Una nozione fondamentale del "secondo Wittgenstein" è quella di *gioco linguistico*: come vi sono tanti giochi, ciascuno con le proprie caratteristiche, e si fatica ad identificare caratteristiche comuni a tutti i giochi, così il linguaggio ha forme diverse di cui le asserzioni descrittive sono solo un caso particolare. Le regole delle asserzioni descrittive specificate nel *Tractatus* non valgono per altre forme del ragionamento.

In questo periodo Wittgenstein è divenuto consapevole della logica e matematica *intuizionista*, dove viene posta in dubbio l'esistenza di entità matematiche di cui non si possa in alcun definire un principio di costruzione. Se consideriamo i numeri reali come l'insieme delle sequenze infinite di cifre decimali, di un numero reale che non abbia una legge di costruzione (come la radice quadrata di 2) non si può conoscere altro che una approssimazione finita. Pertanto per certe asserzioni sui numeri reali il principio del terzo escluso ( $A \vee \neg A$ ) non vale. Il matematico Brouwer ha sviluppato una teoria dell'analisi matematica diversa da quella classica che è conforme a questi principi logico-filosofici. La possibilità di analizzare i concetti logici e matematici in modo diverso da quello della logica classica di Cantor e di Russell toglie credito all'idea che l'unica forma di linguaggio capace di significato sia quella descritta nel *Tractatus*.

Le Lezioni sulla credenza religiosa di Wittgenstein appartengono a questo periodo della sua ricerca filosofica. Wittgenstein in particolare sostiene che non ha senso considerare l'asserzione "*ci sarà il giudizio universale*" alla stessa stregua delle asserzioni scientifiche. Chi fa questa asserzione partecipa ad un sistema di pratiche di vita che rende completamente superflua ed inopportuna la domanda "*che giustificazione hai per fare questa asserzione?*". Wittgenstein trova del tutto inopportune le argomentazioni di chi vuole mostrare la ragionevolezza delle fedi religiose e la loro compatibilità con la scienza moderna. Il discorso religioso ed il discorso scientifico sono incomparabili, appartengono a "forme di vita" ed a "giochi linguistici" del tutto diversi. Ma mentre nel punto di vista del *Tractatus* e della *Conferenza sull'Etica* il discorso religioso è uno sforzo di estendere il significato che le parole hanno nel linguaggio ordinario in un ambito dove non riescono a denotare alcun fatto, e quindi falliscono nel loro intento, nell'ultima fase del suo pensiero Wittgenstein ritiene che il linguaggio religioso obbedisca a regole proprie, incomparabili con l'accertamento della verità e la giustificazione delle asserzioni propria del linguaggio scientifico, ma non per questo sono prive di senso e di efficacia nella forma di vita umana cui appartengono.

NOTA: Recentemente la logica intuizionista ha trovato applicazioni importanti anche nell'informatica; in particolare la *teoria dei tipi* intuizionistica viene applicata nello studio dei linguaggi di programmazione.

Una recente interpretazione filosofica della logica intuizionista la considera come logica dei *giudizi assertivi* e delle loro giustificazioni. È infatti evidente che data una certa proposizione **p** possiamo avere *evidenza conclusiva* che giustifica l'asserzione che **p** vale e possiamo anche avere evidenza conclusiva che giustifica il negare **p**, cioè per sostenere che asserire **p** porterebbe ad una contraddizione. Ma è anche possibile non avere evidenza sufficiente nè per asserire nè per negare la proposizione **p** e dunque la legge del terzo escluso non vale per la logica dei giudizi. L'"unità della logica" potrebbe allora essere ristabilita spiegando le diversità delle leggi logiche con il diverso dominio linguistico in cui si applicano.