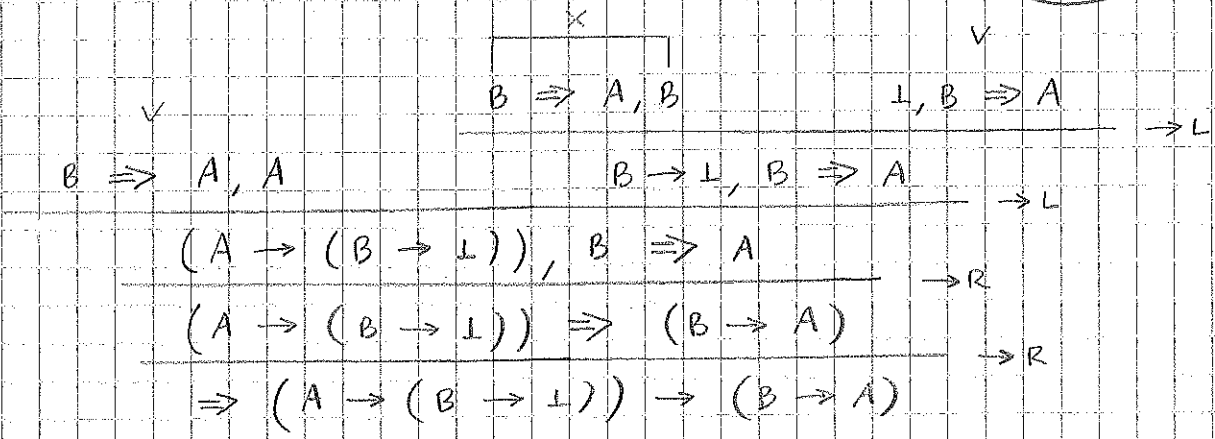
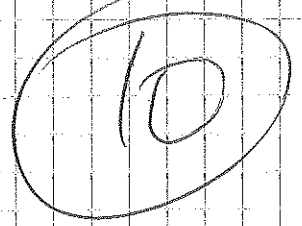


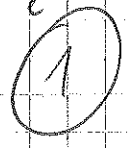
LOGICA COMPUTAZIONALE Esercitazione n° 1

Esercizio 1:

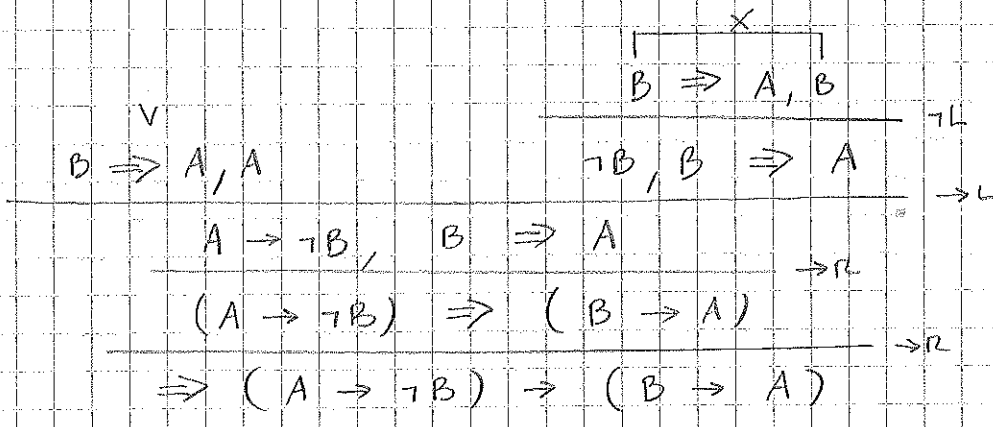
(a) $(A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow (B \rightarrow A)$



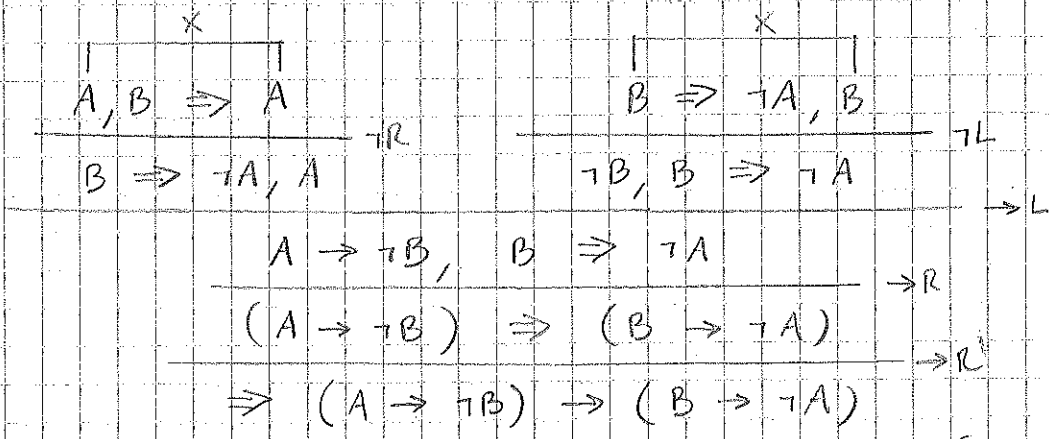
Il sequente $S = (A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow (B \rightarrow A)$ è FALSIFICABILE poiché esiste una interpretazione \mathcal{I} tale che: $\mathcal{I}(B) = V$ e $\mathcal{I}(A) = F$ con la quale $\mathcal{I}(S) = F$.



Oppure:



(b) $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$



Il sequente $S = (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$ è valido (Non ho trovato)

$$(c) \quad ((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$$

$\frac{\frac{\frac{A \Rightarrow C, A, B}{A \Rightarrow C, A \vee B} \text{VR}}{(A \vee B) \rightarrow C, A \Rightarrow C} \rightarrow L}{((A \vee B) \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C} \rightarrow R$	$\frac{\frac{\frac{B \Rightarrow C, A, B}{B \Rightarrow C, A \vee B} \text{VR}}{(A \vee B) \rightarrow C, B \Rightarrow C} \rightarrow R}{((A \vee B) \rightarrow C) \Rightarrow B \rightarrow C} \rightarrow R$
$\frac{((A \vee B) \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C \quad ((A \vee B) \rightarrow C) \Rightarrow B \rightarrow C}{((A \vee B) \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)} \rightarrow R$	
$\Rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow R$	

Il sequente $S = ((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$ è valido.

Non ho trovato nessuna interpretazione in grado di falsificare S .

(1)

$$(d) \quad ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

$\frac{\frac{A \Rightarrow B, A}{\Rightarrow A, A \rightarrow B} \rightarrow R}{(A \rightarrow B) \rightarrow A \Rightarrow A} \rightarrow L$	$\frac{A \Rightarrow A}{(A \rightarrow B) \rightarrow A \Rightarrow A} \rightarrow R$
$\Rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow R$	

(1)

Il sequente $S = ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ è valido. (si scrive: $\models S$)

Non ho trovato nessuna interpretazione in grado di falsificare S .

$$(e) \quad ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg \neg A)$$

$\frac{\frac{B, A \Rightarrow A}{B, \neg A, A \Rightarrow} \neg L}{\neg A, A \Rightarrow \neg B} \rightarrow R$	$\frac{A \Rightarrow A}{A, \neg A \Rightarrow} \neg L$
$\frac{\neg A, A \Rightarrow \neg B}{\neg A \Rightarrow A \rightarrow \neg B} \rightarrow R$	$\frac{A, \neg A \Rightarrow}{(A \rightarrow \neg B) \rightarrow A, \neg A \Rightarrow} \rightarrow L$
$\frac{(A \rightarrow \neg B) \rightarrow A, \neg A \Rightarrow}{(A \rightarrow \neg B) \rightarrow A \Rightarrow \neg \neg A} \rightarrow R$	
$\Rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg \neg A) \rightarrow R$	

Valido -
Tutti i sequenti
hanno al più
una formula
a destra di \Rightarrow

(2)

(c) continua da pagina precedente \rightarrow

Il sequente $S = (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow A$ è valido.

Non ho trovato nessuna formula in grado di falsificare S .

Esercizio 2

La regola:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ cut add}$$

È VALIDA.

Dim:

Supponiamo che il sequente premessa sia valido.

Allora per ogni valutazione \mathcal{V} esiste $C_1 \in \Gamma$ tale che $\mathcal{V}(C_1) = F$ oppure esiste un $D_1 \in \Delta \cup \{A\}$ tale che $\mathcal{V}(D_1) = V$ ed esiste un $C_2 \in \Gamma \cup \{A\}$ tale che $\mathcal{V}(C_2) = F$ oppure esiste un $D_2 \in \Delta$ tale che $\mathcal{V}(D_2) = V$.

Abbiamo vari casi:

- se $\exists C_1 \in \Gamma$ t.c. $\mathcal{V}(C_1) = F$ allora anche il sequente - conclusione $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è valido.

- se $\exists D_1 \in \Delta \cup \{A\}$ t.c. $\mathcal{V}(D_1) = V$ allora

- se $D_1 \in \Delta$ allora anche il sequente - conclusione $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è valido.

- se $D_1 = A$ ($\Rightarrow \mathcal{V}(D_1) = \mathcal{V}(A) = V$) allora:

- * o esiste $C_2 \in \Gamma \cup \{A\}$ t.c. $\mathcal{V}(C_2) = F$ ma A non può essere perché $\mathcal{V}(A) = V$ quindi $C_2 \in \Gamma$ e quindi anche il sequente conclusione è valido.

- * oppure esiste $D_2 \in \Delta$ tale che $\mathcal{V}(D_2) = V$ e quindi anche $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è valido.

La regola cut add è semanticamente invertibile.

Dim: Supponiamo che il sequente conclusione sia valido dimostriamo che anche il sequente - premessa è valido.

Supponiamo che il sequente - conclusione sia valido.

Allora per ogni valutazione \mathcal{V} esiste $C \in \Gamma$ tale che $\mathcal{V}(C) = F$ oppure esiste un $D \in \Delta$ tale che $\mathcal{V}(D) = V$.

Abbiamo vari casi:

- se $\exists C \in \Gamma$ t.c. $\mathcal{J}(C) = F$ allora anche il 1° sequente premessa s_1 è valido. ($s_1 = \Gamma \Rightarrow \Delta, A$)

Ma è valido anche il 2° sequente premessa $s_2 = \Gamma, A \Rightarrow \Delta$ in quanto basta che $\exists c \in \Gamma$ t.c. $\mathcal{J}(C) = F$ ed esiste per ipotesi.

- se $\exists D \in \Delta$ t.c. $\mathcal{J}(D) = V$ allora il 2° sequente premessa s_2 è valido banalmente.

Ma è valido sicuramente anche il 1° sequente premessa s_1 perché esiste almeno un $D \in \Delta$ t.c. $\mathcal{J}(D) = V$ per ipotesi.

La regola: $\frac{\Gamma_1 \xrightarrow{s_1} \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \xrightarrow{s_2} \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \xrightarrow{s_3} \Delta_1, \Delta_2}$ cut mult

è VALIDA.

Dim:

Supponiamo che il sequente premessa ~~non~~ ^{non} ~~è~~ ^è valido.

Allora per ogni valutazione \mathcal{J} esiste $C_1 \in \Gamma_1$ tale che $\mathcal{J}(C_1) = F$ oppure esiste $D_1 \in \Delta_1 \cup \{A\}$ tale che $\mathcal{J}(D_1) = V$ ed esiste un

$C_2 \in \Gamma_2 \cup \{A\}$ tale che $\mathcal{J}(C_2) = F$ oppure esiste $D_2 \in \Delta_2$ tale che $\mathcal{J}(D_2) = V$.

Abbiamo vari casi:

- se $\exists C_1 \in \Gamma_1$ t.c. $\mathcal{J}(C_1) = F$ allora anche il sequente - conclusione $\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2$ è valido.

- se $\exists D_1 \in \Delta_1 \cup \{A\}$ t.c. $\mathcal{J}(D_1) = V$ allora:

• se $D_1 \in \Delta_1$ allora anche il sequente - conclusione s_3 è valido.

• se $D_1 = A$ ($\Rightarrow \mathcal{J}(D_1) = \mathcal{J}(A) = V$) allora abbiamo 2 casi possibili (deve essere valido anche il sequente premessa s_2 per ipotesi iniziale):

* o esiste $C_2 \in \Gamma_2 \cup \{A\}$ tale che $\mathcal{J}(C_2) = F$ ma A non può essere poiché $\mathcal{J}(A) = V$ quindi $C_2 \in \Gamma_2$ e quindi anche il sequente conclusione s_3 è valido.

* oppure esiste $D_2 \in \Delta_2$ tale che $\mathcal{J}(D_2) = V$ e quindi anche il sequente conclusione s_3 è valido.

Non è semanticamente invertibile (la regola cut mult)

Dim:

Controesempio:

$$\frac{B \Rightarrow D, A \quad A, C \Rightarrow B}{B, C \Rightarrow D, B} \text{ cut mult}$$

Il sequente conclusione è valido ma i sequenti premissa sono falsificabili, la regola cut mult pertanto non è semanticamente inevitabile.

