FORONI MARCO VR090274 LAUREA SPECIALISTICA

LOGICA COMPUTAZIONALE Esercitazione n° 1

10

Esercizio 1:

(a) $(A \to (B \to \bot)) \to (B \to A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{V}{B \Rightarrow A, A} \qquad \dfrac{\overset{X}{B \Rightarrow A, B} \qquad \overset{V}{\bot, B \Rightarrow A}}{B \to \bot, B \Rightarrow A}\,{\to}L}{(A \to (B \to \bot)), B \Rightarrow A}\,{\to}L}{(A \to (B \to \bot)) \Rightarrow (B \to A)}\,{\to}R}{\Rightarrow (A \to (B \to \bot)) \to (B \to A)}\,{\to}R$$

Il sequente $S = (A \to (B \to \bot)) \to (B \to A)$ è FALSIFICABILE poiché esiste una interpretazione $\mathcal{J}$ tale che: $\mathcal{J}(B) = V$ e $\mathcal{J}(A) = F$ con la quale $\mathcal{J}(S) = F$.

1

Oppure:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{V}{B \Rightarrow A, A} \qquad \dfrac{\overset{X}{B \Rightarrow A, B}}{\neg B, B \Rightarrow A}\,\neg L}{A \to \neg B, B \Rightarrow A}\,{\to}L}{(A \to \neg B) \Rightarrow (B \to A)}\,{\to}R}{\Rightarrow (A \to \neg B) \to (B \to A)}\,{\to}R$$

(b) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{X}{A, B \Rightarrow A}}{B \Rightarrow \neg A, A}\,\neg R \qquad \dfrac{\overset{X}{B \Rightarrow \neg A, B}}{\neg B, B \Rightarrow \neg A}\,\neg L}{A \to \neg B, B \Rightarrow \neg A}\,{\to}L}{(A \to \neg B) \Rightarrow (B \to \neg A)}\,{\to}R}{\Rightarrow (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)}\,{\to}R$$

1

Il sequente $S = (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ è valido. (Non ho trovato

(c) $((A \vee B) \to C) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow C, A, B}{A \Rightarrow C, A \vee B}\,\vee R \qquad C, A \Rightarrow C}{(A \vee B) \to C,\ A \Rightarrow C}\,\to L}{((A \vee B) \to C) \Rightarrow A \to C}\,\to R \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow C, A, B}{B \Rightarrow C, A \vee B}\,\vee R \qquad C, B \Rightarrow C}{(A \vee B) \to C,\ B \Rightarrow C}\,\to L}{((A \vee B) \to C) \Rightarrow B \to C}\,\to R}{((A \vee B) \to C) \Rightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)}\,\wedge R}{\Rightarrow ((A \vee B) \to C) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))}\,\to R$$

Il sequente $S = ((A \vee B) \to C) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))$ è valido.

Non ho trovato nessuna interpretazione in grado di falsificare S.

1

(d) $((A \to B) \to A) \to A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow B, A}{\Rightarrow A, A \to B}\,\to R \qquad A \Rightarrow A}{(A \to B) \to A \Rightarrow A}\,\to L}{\Rightarrow ((A \to B) \to A) \to A}\,\to R$$

1

Il sequente $S = ((A \to B) \to A) \to A$ è valido. (si scrive: $\models S$)

Non ho trovato nessuna interpretazione in grado di falsificare S.

(e) $((A \to \neg B) \to A) \to (\neg\neg A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B, A \Rightarrow A}{B, \neg A, A \Rightarrow}\,\neg L}{\neg A, A \Rightarrow \neg B}\,\neg R}{\neg A \Rightarrow A \to \neg B}\,\to R \qquad \dfrac{A \Rightarrow A}{A, \neg A \Rightarrow}\,\neg L}{(A \to \neg B) \to A,\ \neg A \Rightarrow}\,\to L}{(A \to \neg B) \to A \Rightarrow \neg\neg A}\,\neg R}{\Rightarrow ((A \to \neg B) \to A) \to (\neg\neg A)}\,\to R$$

Valido – Tutti i sequenti hanno al più una formula a destra.

2

FORONI MARCO VR080274

(6) continua da pagina precedente →

Il sequente $S = ((A \to B) \to A) \to A$ è valido.

Non ho trovato nessuna formula in grado di falsificare S

Esercizio 2

La regola :

$$\frac{\overset{S_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \qquad \overset{S_2}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}}{\underset{S_0}{\Gamma \Rightarrow \Delta}} \text{ cut add}$$

E' VALIDA.

Dim:

Supponiamo che i sequenti premessa sia valido.

Allora per ogni valutazione $\mathfrak{I}$ esiste $C_1 \in \Gamma$ tale che $\mathfrak{I}(C_1) = F$ oppure esiste un $D_1 \in \Delta \cup \{A\}$ tale che $\mathfrak{I}(D_1) = V$ ed esiste un $C_2 \in \Gamma \cup \{A\}$ tale che $\mathfrak{I}(C_2) = F$ oppure esiste un $D_2 \in \Delta$ tale che $\mathfrak{I}(D_2) = V$.

Abbiamo vari casi:

- se $\exists C_1 \in \Gamma$ t.c. $\mathfrak{I}(C_1) = F$ allora anche il sequente - conclusione $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è valido.
- se $\exists D_1 \in \Delta \cup \{A\}$ t.c. $\mathfrak{I}(D_1) = V$ allora
  - se $D_1 \in \Delta$ allora anche il sequente - conclusione $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è valido.
  - se $D_1 = A$ $(\Rightarrow \mathfrak{I}(D_1) = \mathfrak{I}(A) = V)$ allora :
    * o esiste $C_2 \in \Gamma \cup \{A\}$ t.c. $\mathfrak{I}(C_2) = F$ ma A non può essere perché $\mathfrak{I}(A) = V$ quindi $C_2 \in \Gamma$ e quindi anche il sequente conclusione è valido
    * oppure esiste $D_2 \in \Delta$ tale che $\mathfrak{I}(D_2) = V$ e quindi anche $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è valido.

1

La regola cut add è semanticamente invertibile.

Dim: Supponiamo che il sequente conclusione sia valido dimostriamo che anche il sequente - premessa ~~è~~ sono validi.

Supponiamo che il sequente conclusione sia valido.

Allora per ogni valutazione $\mathfrak{I}$ esiste $C \in \Gamma$ tale che $\mathfrak{I}(C) = F$ oppure esiste un $D \in \Delta$ tale che $\mathfrak{I}(D) = V$

Abbiamo vari casi:

- se $\exists C \in \Gamma$ t.c. $\mathcal{I}(C) = F$ allora anche il 1° sequente premessa s_1 è valido. $(s_1 = \Gamma \Rightarrow \Delta, A)$

  Ma è valido anche il 2° sequente premessa $s_2 = \Gamma, A \Rightarrow \Delta$ in quanto basta che $\exists C \in \Gamma$ t.c. $\mathcal{I}(C) = F$ ed esiste per ipotesi.

- se $\exists D \in \Delta$ t.c. $\mathcal{I}(D) = V$ allora il 2° sequente premessa s_2 è valido banalmente.

  Ma è valido sicuramente anche il 1° sequente premessa s_1 perché esiste almeno un $D \in \Delta$ t.c. $\mathcal{I}(D) = V$ per ipotesi.

?

La regola:

$$\frac{\Gamma_1 \overset{s_1}{\Rightarrow} \Delta_1, A \qquad A, \Gamma_2 \overset{s_2}{\Rightarrow} \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \underset{s_0}{\Rightarrow} \Delta_1, \Delta_2} \text{ cut mult}$$

è VALIDA.

Dim:

Supponiamo che ~~il~~ i sequenti premessa ~~sia~~ siano validi.

Allora per ogni valutazione $\mathcal{I}$ esiste $C_1 \in \Gamma_1$ tale che $\mathcal{I}(C_1) = F$ oppure esiste $D_1 \in \Delta_1 \cup \{A\}$ tale che $\mathcal{I}(D_1) = V$ ed esiste un $C_2 \in \Gamma_2 \cup \{A\}$ tale che $\mathcal{I}(C_2) = F$ oppure esiste $D_2 \in \Delta_2$ tale che $\mathcal{I}(D_2) = V$.

Abbiamo vari casi:

- se $\exists C_1 \in \Gamma_1$ t.c. $\mathcal{I}(C_1) = F$ allora anche il sequente-conclusione $\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2$ è valido.
- se $\exists D_1 \in \Delta_1 \cup \{A\}$ t.c. $\mathcal{I}(D_1) = V$ allora:
  - se $D_1 \in \Delta_1$ allora anche il sequente-conclusione s_0 è valido.
  - se $D_1 = A$ $(\Rightarrow \mathcal{I}(D_1) = \mathcal{I}(A) = V)$ allora abbiamo 2 casi possibili (deve essere valido anche il sequente premessa s_2 per ipotesi iniziale):
    * o esiste $C_2 \in \Gamma_2 \cup \{A\}$ tale che $\mathcal{I}(C_2) = F$ ma A non può essere poiché $\mathcal{I}(A) = V$ quindi $C_2 \in \Gamma_2$ e quindi anche il sequente conclusione s_0 è valido.
    * oppure esiste $D_2 \in \Delta_2$ tale che $\mathcal{I}(D_2) = V$ e quindi anche il sequente conclusione s_0 è valido.

1

Non è semanticamente invertibile (la regola cut mult)

Dim:

FORONI MARCO VR090274

Controesempio:

$$\frac{B \Rightarrow D, A \qquad A, C \Rightarrow B}{B, C \Rightarrow D, B}\ \text{cut mult}$$

Il sequente conclusione è valido ma i sequenti premessa sono falsificabili, la regola cut mult pertanto NON è semanticamente invertibile.

1