Semantica categoriale per il lambda calcolo tipato semplice.

Maria Emilia Maietti
maietti@math.unipd.it

Lambda calcolo tipato semplice: con tale termine s'intende il lambda calcolo associato alla logica intuizionista proposizionale con connettivi: $\top$ (vero), $\wedge$ (congiunzione), $\rightarrow$ (implicazione). I suoi tipi sono generati da:

$$A ::= \top \mid A \times A \mid A \rightarrow A$$

Tale lambda calcolo è il paradigma di base della programmazione funzionale, ove un programma è pensato come una funzione.
Semantica categoriale: è una semantica matematica costruita utilizzando il linguaggio della teoria delle categorie.
Vantaggi della semantica categoriale: è una semantica delle dimostrazioni, cioè dei lambda termini, ed offre una presentazione del lambda calcolo tipato semplice in termini di operatori (detti combinatori) ed equazioni.
Applicazioni della semantica categoriale: permette di costruire la macchina astratta categoriale che preso come input un lambda termine produce come output la sua forma normale.

Da *Logical Foundations of Functional Programming* - Gerard Huet, Addison-Wesley Publishing Company, 1990 pag.6 (traduzione libera)

> "L'idea di usare l'interpretazione del lambda calcolo nella sua semantica categoriale come paradigma di compilazione dei linguaggi funzionali si sviluppò sino all' ideazione della *categorical abstract machine*. Al chè si comprese che i combinatori categoriali non sono puramente degli oggetti astratti da eseguire con regole di riscrittura attraverso equazioni ma possono essere considerati propriamente delle *istruzione macchina*."

Teoria delle categorie: il concetto base è quello di *categoria* dotata di `oggetti` e `morfismi` come dati primitivi. Il ragionamento categoriale si fonda essenzialmente su uguaglianze tra composizioni di morfismi detti *diagrammi commutativi*. La "caccia al diagramma" è un modo per ragionare su una serie di complicate uguaglianze simultaneamente.

Bibliografia:
Michael Barr and Charles Wells - *Category theory for Computing Science*. Prentice Hall International. Series in Computer Science. 1989
J. Lambek and P.J. Scott- *Introduction to higher order categorical logic*. Cambridge University Press, 1986.
Saunders MacLane - *Categories for the Working Mathematician*. Springer Verlag, 1971
(è uno dei primi testi di teoria delle categorie)

La nozione di categoria

Una categoria $\mathcal{C}$ è costituita da
- una collezione $Ob\mathcal{C}$ di *oggetti*

$$A\ ,\ B\ ,\ C\ \ldots$$

- una collezione $Mor\mathcal{C}$ di *morfismi*

$$f : A \to B \qquad\qquad g : C \to B$$

In particolare con $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ si intendono i morfismi di $\mathcal{C}$ del tipo $f : A \to B$ aventi A come dominio e B come codominio.
(fin qui è come aver dato un grafo con nodi e archi orientati)
Inoltre è definita un'operazione di composizione

$$\cdot :\ Hom_{\mathcal{C}}(A,B)\ \times\ Hom_{\mathcal{C}}(B,C)\ \to\ Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$$

$$(f : A \to B, g : B \to C) \longrightarrow \quad g \cdot f : A \to C$$

che è *associativa*: per ogni $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$

$$h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$$

e ha un *elemento neutro*: per ogni oggetto A in $Ob\mathcal{C}$ esiste un morfismo $id : A \to A$ tale che

$$id \cdot f = f = f \cdot id$$

Esempi:

1. la categoria *Set* ove
   $ObSet$: gli insiemi di ZF(C)
   $Hom_{Set}(A,B)$: sono le funzioni f da A a B.

2. la categoria *FinSet* ove
   $ObFinSet$: gli insiemi finiti di ZF(C)
   $Hom_{FinSet}(A,B)$: sono le funzioni f da A a B.

   Nota che *FinSet* è una sottocategoria di *Set*, cioè ha come oggetti una sottocollezione di oggetti di *Set* e come morfismi una sottocollezione dei morfismi corrispondenti di *Set*

3. la categoria *Graf* ove
   $ObGraf$: i grafi orientati, cioè nodi con archi orientati
   $Hom_{Graf}(A,B)$: sono i morfismi di grafo che associano ad un nodo del grafo dominio un nodo del grafo codominio e ad un arco del grafo dominio un arco del grafo codominio tale che i nodi finale ed iniziale dellarco nel grafo dominio sono mandati esattamente nel nodo finale ed iniziale dellarco associato nel grafo codominio.

Definizione di categoria cartesiana chiusa

Definizione di oggetto terminale:
Una categoria $\mathcal{C}$ ha un *oggetto terminale* 1 se per ogni oggetto A di $\mathcal{C}$

- *esistenza*
  esiste un morfismo
  $$nil_A : A \to 1$$
- *unicità*
  nil_A è unico, cioè in $Hom_{\mathcal{C}}(A, 1)$ c'è solo nil_A.

Definizione di prodotto binario:
Dati A, B oggetti in una categoria $\mathcal{C}$ si dice che $A \times B$ è il prodotto di A e B se esistono due morfismi
$$\pi_A : A \times B \to A \qquad \pi_B : A \times B \to B$$
tali che dati comunque due morfismi $f : C \to A$ e $g : C \to B$

- *esistenza*
  esiste un morfismo $\langle f, g\rangle : C \to A \times B$ per cui vale
  $$\pi_A \cdot \langle f, g\rangle = f \qquad \pi_b \cdot \langle f, g\rangle = g$$
  $$\begin{tikzcd}
  & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f,g\rangle"'] \arrow[dr, "g"] & \\
  A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
  \end{tikzcd}$$
- *unicità*
  il morfismo $\langle f, g\rangle$ è unico, cioè per ogni $h : C \to A \times B$
  $$\langle \pi_A \cdot h, \pi_B \cdot h\rangle = h$$

Definizione di categoria con prodotti binari:
Una categoria $\mathcal{C}$ ha *prodotti binari* se dati comunque due oggetti A, B esiste un oggetto di $\mathcal{C}$ che è il loro prodotto $A \times B$.
Definizione di categoria cartesiana:
Una categoria $\mathcal{C}$ è *cartesiana* se ha un oggetto terminale e prodotti finiti.
Definizione di categoria cartesiana chiusa:
Una categoria $\mathcal{C}$ cartesiana si dice *chiusa* se dati comunque due oggetti A, B esiste un oggetto di $\mathcal{C}$, detto oggetto dei morfismi da A in B
$$[A \to B]$$
e un morfismo
$$App : \ [A \to B] \times A \ \to B$$
tali che dato comunque un morfismo $f : C \times A \to B$

- *esistenza*
  esiste un morfismo
$$cur(f) : C \to [A \to B]$$
  tale che
$$App \cdot \langle cur(f) \cdot \pi_C, \pi_A \rangle = f$$
$$\begin{tikzcd}
& C \times A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle Cur(f) \cdot \pi_C, \pi_A \rangle"] \\
B & {[A \to B] \times A} \arrow[l, "App"]
\end{tikzcd}$$

- *unicità*
  $Cur(f)$ è unico, cioè per ogni $g : C \to [A \to B]$
$$Cur(App \cdot \langle g \cdot \pi_C, \pi_A \rangle) = g$$

Esempi
- *Set* è una categoria cartesiana chiusa: come oggetto terminale basta prendere un singoletto, come prodotto binario di due insiemi il loro prodotto cartesiano e come oggetto dei morfismi tra due insiemi esattamente l'insieme delle funzioni tra i due insiemi.

- *FinSet* è cartesiana chiusa: la struttura cartesiana chiusa è quella di *Set*, perché prodotti e spazi delle funzioni di insiemi finiti sono finiti.

Lambda calcolo tipato semplice

Ora ricordiamo la definizione del lambda calcolo tipato semplice, che indichiamo con λ. I suoi tipi sono generati da:
$$A ::= \top \mid A \times A \mid A \to A$$
Le regole per generare i contesti sono:
$$\text{c1) } \emptyset\ Cont \qquad \text{c2) } \frac{\Gamma\ Cont \quad x : A\ Var}{\Gamma, x : A\ cont}\ (x : A \notin \Gamma)$$
Le regole per i termini sono le seguenti:
$$\text{ass) } \frac{\Gamma\ Cont}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \qquad \text{ter) } \frac{\Gamma\ Cont}{\Gamma \vdash * : \top}$$
$$\text{I-pro) } \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \langle a, b \rangle : A \times B}$$
$$\text{E-pro1) } \frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_1(t) : A} \qquad \text{E-pro2) } \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{C}} t : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_2(t) : B}$$
$$\text{I-ar) } \frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.b : A \to B} \qquad \text{E-ar) } \frac{\Gamma \vdash t : A \to B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash t(a) : B}$$

Le regole di conversione per i termini sono:

$$\eta - \top) \quad \frac{\Gamma \vdash t : \top}{\Gamma \vdash t = \star : \top}$$

$$\beta - \text{pro1}) \quad \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \pi_1(\langle a, b\rangle) = a : A} \qquad \beta - \text{proj2}) \quad \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \pi_2(\langle a, b\rangle) = b : A}$$

$$\eta\text{-pro}) \quad \frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash \langle \pi_1(t), \pi_2(t)\rangle = t : A \times B}$$

$$\beta\text{-ar}) \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash t : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (\lambda x : A.t)(a) = t[x/a] : B} \qquad \eta\text{-ar}) \quad \frac{\Gamma \vdash t : A \to B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.t(x) = t : A \to B} \quad (x : A \notin \Gamma)$$

Nota che per induzione sulla derivazione del giudizio si dimostra che le regole di indebolimento e sostituzione sono ammissibili.

Proposition 0.1. Nel sistema λ sopra definito le seguenti regole sono ammissibili:

$$\text{indebolimento} \quad \frac{\Gamma \vdash b : B}{\Gamma, x : A \vdash b : B}$$

$$\text{sostituzione} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash b[x/a] : B}$$

Legame tra lambda calcolo e semantica categoriale

Interpretazione del lambda calcolo in una categoria:
- un *lambda termine* tipato viene interpretato in un `morfismo` della categoria in modo tale che il suo *tipo* risulti interpretato nel `codominio` del morfismo e il suo *contesto* nel `dominio` del morfismo;
- la *conversione* tra due lambda termini viene interpretata nell' `uguaglianza` tra i morfismi che interpretano i lambda termini.

Nota che non si definisce l'interpretazione di lambda termini non tipati.
Validità e completezza della semantica categoriale:
le regole di conversione del lambda calcolo sono valide nella semantica categoriale perchè risultano interpretate in uguaglianze categoriali.
È possibile poi costruire la categoria dei lambda termini per dimostrare la completezza:
cioè se due morfismi interpretanti ciascuno un lambda termine sono uguali allora anche i lambda termini che denotano sono uguali per conversione.
In particolare proveremo che:

Theorem 0.2. La semantica valida e completa per il *frammento cartesiano del lambda calcolo*, cioè con soli tipo terminale $\top$, tipo prodotto $A \times B$ è data da una `categoria cartesiana`, cioè con prodotti finiti.

Theorem 0.3. La semantica valida e completa per il *lambda calcolo semplice* con tipo terminale $\top$, tipo prodotto $A \times B$ e tipo $A \to B$ è data da una `categoria cartesiana chiusa`, cioè con prodotti finiti e spazio delle funzioni.

Interpretazione del lambda calcolo in una categoria cartesiana chiusa:
Data una categoria cartesiana chiusa $\mathcal{C}$ definiamo un'interpretazione

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}: \ \lambda \to \mathcal{C}$$

come segue: i *tipi* sono interpretati in `oggetti` della categoria per ricorsione sulla loro derivazione

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\top) \equiv 1\\
&\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(A \times B) \equiv \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(A) \times \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(B)\\
&\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(A \to B) \equiv [\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(A) \to \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(B)]
\end{aligned}$$

i *contesti* in `oggetti` della categoria e i *termini tipati* in `morfismi` pure per ricorsione sulla loro derivazione:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\emptyset) \equiv 1\\
&\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma, x : A) \equiv \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma) \times \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(A)\\
&\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma, x : A \vdash x : A) \equiv \pi_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(A)}\\
&\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash * : \top) \equiv nil_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma)}\\
&\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash \langle a, b\rangle : A \times B) \equiv \langle \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash a : A), \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash b : B)\rangle\\
&\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash \pi_1(t) : A) \equiv \pi_A \cdot \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash t : A \times B)\\
&\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash \pi_2(t) : A) \equiv \pi_B \cdot \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash t : A \times B)\\
&\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash \lambda x : A.b : A \to B) \equiv Cur(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma, x : A \vdash b : B))\\
&\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash t(a) : B) \equiv App \cdot \langle \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash t : A \to B), \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash a : A)\rangle
\end{aligned}$$

Lemma 0.4. *(Indebolimento) Per ogni giudizio $\Gamma \vdash b : B$ derivabile in λ allora*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma, x : A \vdash b : B) = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash b : B) \cdot \pi_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma)}$$

Lemma 0.5. *(Sostituzione) Se $\Gamma, x : A \vdash b : B$ e $\Gamma \vdash a : A$ sono derivabili in λ allora*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash b[x/a] : B) = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma, x : A \vdash b : B) \cdot \langle id_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma)}, \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash a : A)\rangle$$

Questi lemmi si dimostrano per induzione sulla derivazione dei giudizi. Servono per poter dimostrare

Theorem 0.6. *(validità e completezza) Assumiamo che i giudizi $\Gamma \vdash b : B$ e $\Gamma \vdash c : B$ siano derivabili in λ allora:*

- *se pure $\Gamma \vdash b = c : B$ è derivabile ne segue che*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash b : B) = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash c : B)$$

- *viceversa se $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash b : B) = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma \vdash c : B)$ per ogni categoria cartesiana chiusa $\mathcal{C}$ allora in λ è derivabile*

$$\Gamma \vdash b = c : B$$

Proof. La dimostrazione segue per induzione sulla derivazione del giudizio di conversione.

Esercizi

1. Verificare che *Pset* avente come oggetti gli insiemi e come morfismi le funzioni parziali è una categoria.

2. Verificare che *FinVect* avente come oggetti gli spazi vettoriali finiti sui reali R e come morfismi le matrici a righe e colonne finite è una categoria.

3. Descrivere la categoria con il numero minimo di oggetti e morfismi.

4. Si consideri il calcolo dei sequenti intuizionista proposizionale e si costruisca $Seq(IL)$ prendendo come oggetti le formule e come morfismi $Hom_{Seq(IL)}(A, B)$ i sequenti $A \vdash B$. Verificare che $Seq(IL)$ è una categoria.

5. Si consideri il lambda calcolo semplice associato al frammento della logica intuizionista con solo vero, congiunzione ed implicazione, cioè con tipo $\top$ terminale, tipo prodotto $A \times B$ e tipo $A \to B$. Si costruisca $C(\lambda)$ avente come oggetti i tipi $A, B, C\ldots$ e come morfismi $Hom_{C(\lambda)}(A, B)$ la classe di lambda termini $x : A \ \vdash b(x) : B$ ove

$$x : A \ \vdash \ b(x) : B \quad \simeq \quad y : A \ \vdash b(y) : B$$

   se $b(y)[y/x] = b(x)$ Verificare che $C(\lambda)$ è una categoria.

6. Dato un grafo orientato con nodi: A, B, C, D, E, F e archi:

$$a : A \to B, \quad c : C \to B, \quad d : D \to C, \quad a : C \to A \quad e : A \to E$$

   -quali nodi e archi orientati occorre aggiungere per chiuderlo sulla composizione di archi?
   -una volta chiuso sulla composizione, quali archi ed equazioni di uguaglianza tra archi occorre aggiungere perchè diventi una categoria?
   - sai descrivere una procedura che dato un un grafo orientato genera una categoria avente come oggetti i nodi dell'arco tale che la sua collezione di morfismi contenga tutti gli archi del grafo?

7. Verificare che $Seq(IL)$ è cartesiana

8. Verificare che $C(\lambda)$ ha i prodotti finiti.

9. *Pset* ha oggetto terminale e prodotti finiti?

10. Verificare che in una categoria con oggetto terminale 1 e prodotti finiti allora $A \times 1$ è isomorfo ad A (scritto $A \times 1 \simeq A$) ossia esistono $f : A \times 1 \to A$ e $f' : A \to A \times 1$ tale $f' \cdot f = id$ ed $f \cdot f' = id$.

11. Verificare che in una categoria con prodotti vale sempre $A \times (B \times C) \simeq (A \times B) \times C$.

12. Verificare che in *Set* si ha $Hom(1, A) \simeq A$, cioè gli elementi globali di A (ossia i morfismi f : $1 \to A$ da 1 verso A) sono in corrispondenza con gli elementi di A.

13. Verificare che in una categoria cartesiana chiusa
    $[1 \to A] \simeq A$ e che $[A \times B \to C] \simeq [A \to [B \to C]]$.

14. Verificare che *FinSet* è cartesiana chiusa.

15. Verificare che $C(\lambda)$ e $Seq(IL)$ sono cartesiane chiuse.

16. Verificare che la regola di scambio

$$\frac{\Gamma, x : A, y : B \vdash t : C}{\Gamma, y : B, x : A \vdash t : C}$$

è derivabile nel lambda calcolo tipato semplice λ.
Verificare inoltre che se $\Gamma, x : A, y : B \vdash t : C$ è derivabile in λ allora secondo l'interpretazione $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ in una categoria cartesiana chiusa $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{l} \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma, x : A, y : B \vdash t : C) = \\ \qquad \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma, y : B, x : A \vdash t : C) \cdot \langle\langle \pi_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma)} \cdot \pi_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma, x:A)}, \pi_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(B)} \rangle, \pi_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(A)} \cdot \pi_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma, x:A)} \rangle \end{array}$$

Si consiglia di disegnare l'interpretazione diagrammatica del suddetto lemma.