

Logica Computazionale 2009 - Compito 3

Gianluigi Bellin

October 29, 2009

Assegnato il 2 novembre 2009 – da ritornare entro il 9 novembre

Esercizio 1. Ricorda che in logica modale classica possiamo porre $\diamond A =_{df} \neg \Box \neg A$ (nello stesso modo in cui possiamo scrivere $\exists x.A =_{df} \neg \forall x. \neg A$). Tuttavia, se poniamo l'operatore “ \diamond ” come un primitivo, allora la procedura *semantic tableaux* produrrà sequenti della forma

$$(\dagger) \quad p_1, \dots, p_k, \diamond C_1, \dots, \diamond C_m, \Box \Gamma \Rightarrow \Box D_1, \dots, \Box D_n, \diamond \Delta, q_1, \dots, q_\ell$$

Quali sono le regole modali per i sistemi **K**, **KD**, **K4** e **S4** con questa sintassi estesa?

4 punti

Suggerimento: Le nuove regole possono essere derivati dalle regole modali note:

$$\mathbf{K} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box \Gamma \Rightarrow \Box A} ;$$

$$\mathbf{KD} \quad \text{La regola } \mathbf{K} \text{ anche nella forma } \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Box \Gamma \Rightarrow} ;$$

$$\mathbf{K4} \quad \frac{\Gamma, \Box \Gamma \Rightarrow A}{\Box \Gamma \Rightarrow \Box A} ;$$

$$\mathbf{S4} \quad \Box\text{-L: } \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \text{e } \Box\text{-R: } \frac{\Box \Gamma \Rightarrow A}{\Box \Gamma \Rightarrow \Box A} .$$

Esercizio 2. Applica la procedura *semantic tableaux* per **K** ai seguenti sequenti. Se una sequente non è logicamente valido, ricava dalla procedura *semantic tableaux* una interpretazione che lo rende falso.

$$(a) \quad (\diamond A \rightarrow \Box B) \Rightarrow \Box(A \rightarrow B)$$

1 punto

(b) $\Box(A \rightarrow B) \Rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Box B)$

1 punto

Trova un modello nella semantica di **S4** che falsifichi il seguente sequente

(c) $\Box(\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box A) \Rightarrow \Box A.$

1 punto

(d) Dimostra il seguente sequente nel calcolo dei sequenti per **S4**.

$$\Box(\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box A) \Rightarrow (\Box \Diamond A).$$

1 punto

Esercizio 3. Il sistema **K4D** è basato sugli assiomi

- **K:** $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$;
- **D:** $\Box A \rightarrow \Diamond A$
- $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ (*transitività*)

La semantica di **K4D** è basata sulla seguente definizione:

Una formula A è valida in **K4D** (in simboli $\models_{\mathbf{K4D}} A$) se e solo se A è valida in tutte le cornici transitive e senza punti terminali.

Verificare che gli assiomi **D** e *transitività* sono validi in una cornice di Kripke \mathcal{F} se e solo se \mathcal{F} è transitiva e senza punti terminali.

2 punti