1 Progetto 1

L'obbiettivo di questo progetto è dimostrare che

Teorema 1 *Le funzioni parziali ricorsive sono λI-definibili.*

Assumeremo inoltre il seguente risultato

Teorema 2 *Ogni lambda-I termine è normalizzabile se e solo se è fortemente normalizzabile.*

Ricordiamo che l'insieme Λ_I dei lambda-I termini è così definito:
- Per ogni variabile x, $x \in \Lambda_I$
-Se $u, t \in \Lambda_I$, allora $ut \in \Lambda_I$
-Se $u \in \Lambda_I$ e x è una variabile che occorre libera in u, allora $\lambda xu \in \Lambda_I$.

Lavoreremo in questo progetto *esclusivamente* con lambda-I termini.
L'unica differenza fra il lambda calcolo e il lambda-I calcolo consiste nel fatto che nel secondo non esiste la possibilità di cancellazione. Ciò crea un piccolo problema ogni qual volta bisogna definire una funzione che sceglie alcuni argomenti e ne cancella altri. Ad esempio, per ogni $i, n \in \mathbb{N}$, vogliamo avere una lambda-I termine P_i^n tale che, per opportune classi di termini $t_1, \ldots, t_n$, $P_i^n t_1 \ldots t_n \ \beta \ t_i$. In qualche modo dovremo far sparire i termini t_k, con $k \neq i$. Introduciamo allora il seguente concetto:

Definizione 1 *Sia $\boldsymbol{I} = \lambda xx$. Un lambda-I termine u si dice fortemente risolvibile se $u\boldsymbol{II} \ \beta \ \boldsymbol{I}$*

Un termine fortemente risolvibile può essere fatto sparire. Vogliamo ora definire i numerali e i valori di verità in modo che siano lambda-I termini fortemente risolvibili. I numerali di Church sono tutti adatti allo scopo, a parte lo zero $\lambda f \lambda xx$ che non è un lambda-I termine.

Definizione (Barendregt) 2 *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, definiamo $\bar{n} = \lambda f \lambda x f^n(x)$, e inoltre definiamo $\bar{0} = \lambda f \lambda x f \boldsymbol{II} x$.*
Definiamo inoltre $\boldsymbol{T} = \lambda y \lambda x \ x\boldsymbol{II}y$ e $\boldsymbol{F} = \lambda y \ y\boldsymbol{III}$.
Infine, definiamo $< u, t >= \lambda x \ xut$ e $\pi_0 = \lambda x \ x\boldsymbol{T}$ e $\pi_1 = \lambda x \ x\boldsymbol{F}$.

Possiamo ora dare la seguente

Definizione 3 *Una funzione parziale $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ si dice λI-definibile se esiste un lambda-I termine F tale che per ogni $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$*

$$f(n_1, \ldots, n_k) \downarrow \ \Rightarrow \ F\bar{n_1} \ldots \bar{n_k} \ \beta \ \overline{f(n_1, \ldots, n_k)}$$

e

$$f(n_1, \ldots, n_k) \uparrow \ \Rightarrow \ F\bar{n_1} \ldots \bar{n_k} \ non \ ha \ forma \ normale$$

Dimostrare la seguente proposizione

Proposizione 1 *Per ogni tripla di termini E, u, t, se u e t sono fortemente risolvibili, allora esiste un termine ($if\ E\ then\ u\ else\ t$) tale che*

$$E\ \beta\ \boldsymbol{V} \Rightarrow (if\ E\ then\ u\ else\ t)\ \beta\ u$$

e

$$E\ \beta\ \boldsymbol{F} \Rightarrow (if\ E\ then\ u\ else\ t)\ \beta\ t$$

Hint: sfruttare il comportamento di $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{F}$*...*

Dimostrare che

Proposizione 2 *Per ogni coppia di termini u, t, se u e t sono fortemente risolvibili, $\pi_0 < u, t > \ \beta\ u$ e $\pi_1 < u, t > \ \beta\ t$.*

Rispondere alla seguente domanda:

Domanda 3 *Definiamo $Zero = \lambda x\ x(\boldsymbol{TF})\boldsymbol{T}$. Quale funzione $f : \mathbb{N} \to \{True, False\}$ definisce il termine $Zero$?*

Dimostrare che

Proposizione 4 *Per ogni $n, i \in \mathbb{N}$, la funzione $p_i^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ $p_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, è λI-definibile da un termine P_i^n. (Hint: I numerali di Church sono fortemente risolvibili e quindi possono essere fatti sparire...)*

Dimostrare che

Proposizione 5 *La funzione successore $Succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $Succ(n) = n+1$ è λI-definibile.*

Dimostrare che

Proposizione (Kleene) 6 *Esiste un λI-termine $Pred$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $Pred\ \overline{n+1}\ \beta\ \overline{n}$. (Hint: n è la seconda componente del risultato della $n+1$-esima iterazione della funzione $(m, n) \mapsto (m+1, m)$ applicata inizialmente a $(0, 0)$.)*

Dimostrare che

Proposizione (Composizione di funzioni) 7 *Siano $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ e $h : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ funzioni λI-definibili. Allora la funzione $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ tale che*

$$f(x_1, \ldots, x_k) = h(g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_k))$$

è λI-definibile. (Hint: sarà necessario il fatto che un λI termine è normalizzabile sse è fortemente normalizzabile)

Abbreviamo d'ora in avanti la scrittura $x_1 \ldots x_n$ con $\vec{x}$ e la scrittura $\lambda x_1 \ldots \lambda x_n$ con $\lambda\vec{x}$.
Dimostrare la seguente proposizione

Proposizione (Ricorsione primitiva) 8 *Siano $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ e $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ funzioni totali λI-definite rispettivamente da termini G e H. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ così definita*

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$$

$$f(x_1, \ldots, x_n, k+1) = h(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n, k), k)$$

Definiamo

$$Iterator = \lambda y < H\vec{x}(\pi_0 y)(\pi_1 y), Succ(\pi_1 y) >$$

e

$$F = \lambda \vec{x}\ \lambda n\ \pi_0((if\ (Zero\ n)\ then\ (\lambda zz < \bar{0}, \bar{0} > \boldsymbol{TII})\ else\ n) Iterator < G\vec{x}, \bar{0} >)$$

Allora f è λI-definita da F.
(Osservazione: il termine $\lambda zz < \bar{0}, \bar{0} > \boldsymbol{TII}$ è fortemente risolvibile e inoltre serve a far sparire Iterator quando non serve...)

Proposizione (Minimizzazione) 9 *Sia $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ una funzione λI-definita dal termine G. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definita per minimizzazione*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y.[(\forall z \leq y\ g(x_1, \ldots, x_n, z) \downarrow) \wedge g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$$

Definiamo

$$K = \lambda y_1 \lambda y_2 (y_1 \boldsymbol{I}\bar{0}\boldsymbol{II})(y_2 \boldsymbol{I}\bar{0}\boldsymbol{II})$$

e

$$U = \lambda y\ \lambda n\ (if\ (Zero\ G\vec{x}n)\ then\ K\ else\ (\lambda z \lambda w zw)) yy(Succ(n))$$

e

$$F = \lambda \vec{x}\ Pred\ (UU\bar{0})$$

Allora f è λI-definita da F.
(Osservazione: il termine K è fortemente risolvibile e K è introdotto per eliminare gli U quando non servono)

Abbiamo a questo punto dimostrato il Teorema 1. Per la tesi di Church possiamo allora concludere che tutte le funzioni calcolabili sono definibili nel λI-calcolo.

Esercizio FACOLTATIVO 10 *Sia $t_0, t_1, \ldots, t_n$ una enumerazione dei lambda termini (Tutti, non solo i lambda-I termini!). Supponiamo che la funzione $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tale che $A(n, m) = k$ sse $t_k = t_n t_m$, sia ricorsiva (come succede con qualunque enumerazione ragionevole). Dimostrare che l'insieme dei lambda termini fortemente normalizzabili non è ricorsivo (i.e. non esiste una funzione totale ricorsiva D tale che $D(n) = 1$ se t_n è SN e $D(n) = 0$ se t_n non è SN.)*

2 Progetto 2

L'obbiettivo di questo progetto è l'esplorazione della teoria del punto fisso nel lambda calcolo.

Definizione 1 *Rappresentiamo i naturali con i numerali di Church (i.e., per $n \in \mathbb{N}$, poniamo $\bar{n} = \lambda f \lambda x f^n(x)$). Una funzione parziale $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ si dice λ-definibile se esiste un lambda termine F tale che per ogni $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$*

$$f(n_1, \dots, n_k) \downarrow \Rightarrow \; F\bar{n_1} \dots \bar{n_k} \; \beta \; \overline{f(n_1, \dots, n_k)}$$

e

$$f(n_1, \dots, n_k) \uparrow \Rightarrow \; F\bar{n_1} \dots \bar{n_k} \; non \; ha \; forma \; normale$$

Assumiamo il seguente

Teorema 1 $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *è parziale ricorsiva se e solo se f è λ-definibile.*

Un lambda termine θ di dice un combinatore di punto fisso se, per ogni termine u, $\theta u =_\beta u(\theta u)$. Ricordiamo che per ogni u, t, per definizione $u =_\beta t$ sse esiste v tale che $u \; \beta \; v$ e $t \; \beta \; v$ e che $=_\beta$ è una relazione di equivalenza..

Esercizio (Klop) 1 *Siano*

$$L = \lambda abcdefghijklmnopqstuvzr. \; r(thisisafixedpointcombinator)$$

e

$$S = LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL$$

Dimostrare che S è un combinatore di punto fisso. (Nota: abbiamo abbreviato la scrittura $\lambda a \lambda b \lambda c \dots$ con $\lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr$)

Esercizio 2 *Sia X un insieme di lambda termini chiuso per applicazione ($u, t \in X \Rightarrow ut \in X$). Supponiamo che X contenga tre elementi B, C, M tali che per ogni tripla di termini a, b, c, $Babc =_\beta a(bc)$, $Cabc =_\beta acb$ e $Ma =_\beta aa$. Dimostrare che X contiene un combinatore di punto fisso. (Hint: dimostrare prima che X contiene un termine U tale che per ogni a, b, $Uab =_\beta a(bb)$)*

Esercizio (Recursion) 3 *Dimostrare che per ogni lambda termine M esiste un lambda termine A tale che $A \; \beta \; M[A/x]$.*

Esercizio (Double fixed point theorem) 4 *Dimostrare che per ogni coppia di lambda termini F, G esistono lambda termini A, B tali che $A \; \beta \; FAB$ e $B \; \beta \; GAB$. (Hint: considera i lambda termini $W = \lambda x \lambda y F(xxy)(yy)$ e $Z = \lambda x \lambda y G(xxy)(yy)$.)*

Fissiamo ora una qualunque enumerazione effettiva $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ dei termini del lambda calcolo. Per ogni lambda termine u, denotiamo con $[u]$ il numerale di Church $\bar{n}$ tale che $u = t_n$.

Esercizio (Second fixed point theorem) 5 *Dimostrare che per ogni lambda termine F esiste un lambda termine M tale che $M \; \beta \; F[M]$. (Hint: Osservare che, per la tesi di Church, esiste un lambda termine A tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $A\bar{n} \; \beta \; [t_n\bar{n}]$.)*

Esercizio (Scott's Theorem) 6 *Un insieme X di lambda termini si dice estensionale se, per ogni $u \in X$, $u =_\beta t \Rightarrow t \in X$.*
Un insieme X di lambda termini si dice ricorsivo se esiste una funzione f totale ricorsiva tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 1$ se $t_n \in X$, mentre $f(n) = 0$ se $t_n \notin X$. Dimostrare che non esistono insiemi estensionali e ricorsivi di lambda termini, eccetto Λ (l'insieme di tutti i lambda termini) e $\emptyset$. (Hint: procedere per assurdo, considerare due termini A, B con rispettivamente $A \in X$ e $B \notin X$ e definire un termine F tale che $F[M]$ β A quando $M \notin X$, e $F[M]$ β B quando $M \in X$)

Esercizio 7 *Dimostrare che l'insieme dei lambda termini normalizzabili non è ricorsivo.*

3 Progetto 3

Con riferimento ai concetti e alla dimostrazione semantica del teorema di normalizzazione forte introdotti a lezione, risolvere i seguenti esercizi.

Esercizio 1 *Siano T un tipo e $f, g, h \in G_T$. Dimostrare che:*

- *La relazione $>$ su G_T è transitiva, ovvero $f > g$ e $g > h \Rightarrow f > h$.*
- *$f + g > f$.*
- *Siano $f', g' \in G_T$. Allora ($f > f'$ e $g > g'$) $\Rightarrow$ ($f + g > f' + g$ e $f + g > f + g'$).*
- *$f + g \in G_T$.*
- *Siano $T = A \to B$ e $a, b \in G_A$. Allora ($f \geq g$ e $a \geq b$) $\Rightarrow$ $f(a) \geq g(b)$.*

Esercizio 2 *Definiamo per induzione sul tipo T un elemento $g_T \in D_T$.*
Se $T = X$, definiamo $g_X = 1$ e $g_{X \to X} = id_{\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+}$.
Se $T = A \to (B \to E)$ definiamo $g_{A \to (B \to E)} = a \in D_A, b \in D_B \mapsto g_{A \to E}(a) + g_{B \to E}(b)$.
Se $T = (A \to B) \to E$ definiamo $g_{(A \to B) \to E} = f \in D_{A \to B} \mapsto g_{B \to E}(f(g_A))$.

Dimostrare che, per ogni tipo T, $g_T \in G_T$.

Esercizio 3 *Dimostrare, per induzione su u, che $(u[t/x])\rho = u\rho[x \mapsto t\rho]$.*

Esercizio 4 *Sia ρ un ambiente G-corretto. Dimostrare che se $t\beta_0 t'$, allora $t\rho > t'\rho$.*
(Hint: procedere per induzione su t e utilizzare la definizione di β_0 riduzione (vedi Krivine))