Esercitazione 2

Federica Panarotto vr065749

18 Ottobre 2008

Risoluzione esercizi

Parte 1

a)

Ipotesi induttiva: $rm(b,n)$ è PrimRec.
$rm(b,n+1) = (rm(b,n)+1) \bullet sg(|b-(rm(b,n)+1)|)$: il prodotto di due PrimRec è PrimRec, controllo quindi i due operandi:

1. $rm(b,n) + 1$: la somma di due PrimRec è PrimRec, quindi analizzo gli addendi:

   1.1) $rm(b,n)$: $rm(b,0) = 0$ è PrimRec, per ipotesi induttiva è PrimRec;

   1.2) $1 = suc(0)$ è PrimRec;

2. $sg(|b - (rm(b,n) + 1)|)$: il segno di un PrimRec è PrimRec, analizzo:

   2.1) $|b - (rm(b,n) + 1)|$: il valore assoluto della differenza di PrimRec è PrimRec; analizzo:

      2.1.1) $\underbrace{b = suc(suc(\ldots suc}_{b}(0)\ldots))$ è PrimRec;

      2.1.2) $(rm(b,n)+1)$ la somma di due PrimRec è PrimRec, quindi analizzo gli addendi:

         2.1.2.1) $rm(b,n)$: $rm(b,0) = 0$ è PrimRec, per ipotesi induttiva è PrimRec;

         2.1.2.2) $1 = suc(0)$ è PrimRec;

b)

Ipotesi induttiva: $[n/b]$ è PrimRec.
$[n+1/b] = [n/b] + \overline{sg}(|b-(rm(b,n)+1)|)$: la somma di due PrimRec è PrimRec, quindi analizzo gli addendi:

1. $[n/b]$: $[0/b] = 0$ è PrimRec, per ipotesi induttiva è PrimRec;

2. $\overline{sg}(|b - (rm(b,n) + 1)|)$: l'antisegno di un PrimRec è PrimRec, analizzo:

   2.1) $|b - (rm(b,n) + 1)|$: il valore assoluto della differenza di PrimRec è PrimRec; analizzo:

2.1) $\underbrace{b = suc(suc(\ldots suc}_{b}(0)\ldots))$ è PrimRec;

2.2) $rm(b,n)+1$ la somma di due PrimRec è PrimRec, quindi analizzo gli addendi:

2.2.1) $rm(b,n)$: è PrimRec;

2.2.2) $1 = suc(0)$ è PrimRec;

c)

Poiché le funzioni PrimRec sono totali, devo imporre $[a/0] = 0$ e $rm(0,a) = 0$.

$$\begin{aligned}
a &\equiv b\cdot [a/b] + rm(b,a) \\
&\equiv b\cdot \{[(a-1)/b] + \overline{sg}(|b-(rm(b,a-1)+1)|)\} + \{(rm(b,a-1)+1)\cdot sg(|b-(rm(b,a-1)+1)|)\} \\
&\equiv b\cdot [(a-1)/b] + 1 - sg(|b-(rm(b,a-1)+1)|) + (rm(b,a-1)+1)\cdot sg(|b-(rm(b,a-1)+1)|) \\
&\equiv b\cdot [(a-1)/b] + 1 + sg(|b-(rm(b,a-1)+1)|)\cdot \{-1 + rm(b,a-1)+1\} \\
&\equiv b\cdot [(a-1)/b] + 1 + sg(|b-(rm(b,a-1)+1)|)\cdot rm(b,a-1)\}
\end{aligned}$$

dopo a passi:

$$\begin{aligned}
a &\equiv b\cdot [0/b] + a + sg(|b-(rm(b,a-1)+1)|)\cdot \{rm(b,0)\} \\
&\equiv b\cdot 0 + a + sg(|b-(rm(b,0)+a)|) \\
&\equiv a + sg(|b-a|)
\end{aligned}$$

Se $b > 0$ e $a > 0$:

$a > b \;\; a + sg(|b-a|) = a - sg(a) = a$

$a < b \;\; a + sg(|b-a|) = a + sg(a) = a$

Gli altri casi sono simili.

Parte 2)

(I)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{y : B \to \neg A \qquad x : B}{yx : A \to \bot}\,(\to E) \qquad z : A}{yxz : \bot}\,(\to E)}{\lambda x.yxz : \neg B}\,(\to I)}{\lambda z.\lambda x.yxz : A \to \neg B}\,(\to I)}{\lambda y.\lambda z.\lambda x.yxz : (B \to \neg A) \to (A \to \neg B)}\,(\to I) \qquad \dfrac{v : \neg A}{\lambda x.v : B \to \neg A}\,(\to I)}{(\lambda y.\lambda z.\lambda x.yxz)(\lambda x.v) : A \to \neg B}\,(\to E)}{\lambda v.[(\lambda y.\lambda z.\lambda x.yxz)(\lambda x.v)] : \neg A \to (A \to \neg B)}\,(\to I) \qquad a : \neg A}{(\lambda v.[(\lambda y.\lambda z.\lambda x.yxz)(\lambda x.v)])a : A \to \neg B}\,(\to E) \qquad b : (A \to \neg B) \to \neg A}{(\lambda v.[(\lambda y.\lambda z.\lambda x.yxz)(\lambda x.v)])(a)b : A}\,(\to E) \qquad a : \neg A}{(\lambda v.[(\lambda y.\lambda z.\lambda x.yxz)(\lambda x.v)])((a)b)a : \bot}\,(\to E)}{(\lambda a.\lambda v.[(\lambda y.\lambda z.\lambda x.yxz)(\lambda x.v)])((a)b)a : \neg\neg A}\,(\to I)}{(\lambda b.\lambda a.(\lambda v.[(\lambda y.\lambda z.\lambda x.yxz)(\lambda x.v)]))((a)b)a : ((A \to \neg B) \to A) \to (\neg\neg A)}\,(\to I)
$$

(II)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{y}
\AxiomC{x}
\RightLabel{(app)}
\BinaryInfC{$(y)x$}
\AxiomC{z}
\RightLabel{(app)}
\BinaryInfC{$((y)x)z$}
\RightLabel{(λ)}
\UnaryInfC{$\lambda x.((y)x)z$}
\RightLabel{(λ)}
\UnaryInfC{$\lambda z.\lambda x.((y)x)z$}
\RightLabel{(λ)}
\UnaryInfC{$\lambda y.\lambda z.\lambda x.((y)x)z$}
\AxiomC{v}
\RightLabel{(λ)}
\UnaryInfC{$\lambda x.v$}
\RightLabel{(app)}
\BinaryInfC{$(\lambda y.\lambda z.\lambda x.((y)x)z)(\lambda x.v) \rightsquigarrow \lambda z.(v)z$}
\RightLabel{(λ)}
\UnaryInfC{$\lambda v.[\lambda z.(v)x]$}
\AxiomC{a}
\RightLabel{(app)}
\BinaryInfC{$(\lambda v.\lambda z.(v)z)a \rightsquigarrow \lambda z.(a)z$}
\AxiomC{b}
\RightLabel{(app)}
\BinaryInfC{$(\lambda z.(a)z)b \rightsquigarrow (a)b$}
\AxiomC{a}
\RightLabel{(app)}
\BinaryInfC{$((a)b)a$}
\RightLabel{(λ)}
\UnaryInfC{$\lambda a.[((a)b)a]$}
\RightLabel{(λ)}
\UnaryInfC{$\lambda b\lambda a.[((a)b)a]$}
\end{prooftree}
$$

Ecco le β-riduzioni in ordine:

$$(\lambda yzx.((y)x)z)(\lambda x.v) \rightsquigarrow \lambda zt.((\lambda x.v)t)z \rightsquigarrow \lambda zt.(v)z \rightsquigarrow \lambda z.(v)z;$$

$$(\lambda vz.(v)z)a \rightsquigarrow \lambda z.(a)z;$$

$$(\lambda z.(a)z)b \rightsquigarrow (a)b.$$

(III)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{a}
\AxiomC{b}
\RightLabel{(app)}
\BinaryInfC{$(a)b$}
\AxiomC{a}
\RightLabel{(app)}
\BinaryInfC{$((a)b)a$}
\RightLabel{(λ)}
\UnaryInfC{$\lambda a.[((a)b)a]$}
\RightLabel{(λ)}
\UnaryInfC{$\lambda a\lambda b.[((a)b)a]$}
\end{prooftree}
$$