Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Progetto Tandem
Prova scritta di Matematica di Base 1
5 marzo 2015

Pb 1. Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi relativi:

$$R = \{(m,n) : \ m, n \in \mathbf{Z} \text{ e } m^2 - n^2 \text{ è divisibile per } 11\}.$$

Si dica se si tratta di una relazione di tipo noto e si trovino tutti gli elementi $\beta \in \mathbf{Z}$ tali che $(\beta, 5) \in R$.

Pb 2. Si consideri, sull'insieme $\mathbf{Z}$ degli interi relativi, la relazione

$$R = \{(x,y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : \ x^{2015} = \pm y^{2015} \text{ e } x \leq y\}.$$

Dimostrare che si tratta di una relazione d'ordine largo e trovare per quali $x, y \in \mathbf{Z}$ si ha $(x, 3) \in R$, $(y, -5) \in R$.

Pb 3. Sull'insieme $X = \{a, b, c, d, e\}$ si consideri la relazione

$$R = \{(a,c), (b,c), (b,d), (c,e), (a,e), (b,e)\}.$$

Verificare se si tratta di una relazione d'ordine stretto. In caso affermativo, determinare gli eventuali maggioranti, minoranti, massimali, minimali, estremo superiore, estremo inferiore, massimo, minimo del sottinsieme $S = \{a, b, c\}$.

Pb 4. Dato l'insieme di coppie ordinate

$$\begin{aligned} g &= \{(x, x+3) : \ x \in \mathbf{N}, \ x^3 < 8\} \cup \{(x, 5-x) : \ x \in \mathbf{N}, \ 0 \leq x^2 - 1 \leq 2\} \cup \\ &\cup \{(x, x-4) : \ x \in \mathbf{N}, \ x^2 > 5\} \cup \{(7,3), (0,3)\}, \end{aligned}$$

giustificare perché g è una funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{Z}$. Dire anche, giustificando le risposte, se è totale, iniettiva, suriettiva, biiettiva. Data poi la funzione $f = \{(0,0), (4,-1), (6,3)\}$, si scrivano le funzioni composte $h = f \circ g$ e $k = g \circ f$ precisandone l'insieme di definizione e l'immagine. Si dica anche se sono queste due funzioni sono iniettive.

Pb 5. Dimostrare che l'insieme delle *equazioni di secondo grado a coefficienti interi* (cioè delle equazioni del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$) è numerabile. Che dire dell'insieme di tutte le loro *soluzioni reali*?

Nome e Cognome: .... **Scuola:** ....