Diario del Corso di Analisi Matematica II - Mod. 2

Corso di Laurea: Matematica Applicata
Docente: Sisto Baldo

ATTENZIONE: Il presente Diario del Corso vuole essere un riassunto abbastanza dettagliato di quello che è stato detto in aula, e come tale può essere un utile sussidio per chi voglia sistemare i propri appunti, o per chi sia stato assente e voglia ricostruire i contenuti di una lezione. D'altra parte, queste brevi paginette NON possono sostituire completamente un libro di testo, la lezione in aula o un'interazione diretta con il docente o l'esercitatore: siete quindi invitati a servirvi ANCHE di queste altre opportunità per approfondire le vostre conoscenze!

Indice

1 Lezione del 13/12/2018 (2 ore)

La prima parte delle mie lezioni è dedicata all'introduzione della teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue. Contestualmente, e con poco o nessuno sforzo aggiuntivo, avremo modo di familiarizzarci anche con la teoria della misura (e dell'integrazione) astratte.

Nelle lezioni di Giandomenico Orlandi avete (sostanzialmente) incontrato la *misura di Peano-Jordan*, che è probabilmente uno dei modi più semplici di definire in modo rigoroso l'area di un sottinsieme del piano (il volume di un sottinsieme dello spazio...)

Ricordiamo alcune definizioni rilevanti:

DEFINIZIONE: Un *intervallo* o *rettangolo* in $\mathbf{R}^n$ è un sottinsieme $I \subset \mathbf{R}^n$ che sia prodotto cartesiano di intervalli unidimensionali: $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$. Gli intervalli unidimensionali di cui si fa il prodotto possono essere anche chiusi, oppure chiusi in una sola delle due estremità. La *misura* di un intervallo I è per definizione il numero

$$|I| = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Si vede subito che per $n = 2$ il nostro intervallo è un rettangolo con lati paralleli agli assi, e la sua misura coincide con l'area. Invece, per $n = 3$, I sarà un parallelepipedo e la sua misura coincide con il volume.

Gli insiemi *misurabili secondo Peano-Jordan* sono insiemi la cui area si approssima bene, sia da fuori che da dentro, con unioni finite di intervalli.

DEFINIZIONE (Insieme misurabile secondo Peano-Jordan): Un sottinsieme $A \subset \mathbf{R}^n$ si dice misurabile secondo Peano-Jordan se è limitato e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un numero finito di intervalli $I_1, \ldots, I_N, J_1, \ldots, J_K \subset \mathbf{R}^n$ tali che gli I_i hanno due a due in comune solo punti della frontiera, i J_i hanno due a due in comune solo punti della frontiera,

$$\bigcup_{i=1}^{N} I_i \subset A \subset \bigcup_{i=1}^{K} J_i$$

e infine

$$\sum_{i=1}^{K} |J_i| - \sum_{i=1}^{N} |I_i| \leq \varepsilon.$$

In tal caso, la *misura di Peano-Jordan* di A si definisce come

$$\begin{aligned} |A| = \quad & \sup\{\sum_{i=1}^{N} |I_i| : I_i \textit{ due a due con interni disgiunti}, \bigcup_{i=1}^{N} I_i \subset A\} \\ = \quad & \inf\{\sum_{i=1}^{K} |J_i| : J_i \textit{ due a due con interni disgiunti}, \bigcup_{i=1}^{K} J_i \supset A\}. \end{aligned}$$

È facile vedere che un rettangolo è misurabile secondo Peano-Jordan, mentre l'insieme dei punti a coordinate razionali di un rettangolo non lo è. Nel piano, il *trapezoide* sotteso ad una funzione di una variabile integrabile secondo Riemann è misurabile secondo Peano-Jordan, e la sua misura è data proprio dall'integrale. Sono anche misurabili secondo Peano-Jordan gli insiemi dati dalla parte di piano compresa tra i grafici di due funzioni di una variabile integrabili secondo Riemann:

ESERCIZIO: Siano $g, h : [a, b] \to \mathbf{R}$ due funzioni di una variabile, integrabili secondo Riemann e con $g(x) \leq h(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Consideriamo l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ x \in [a, b], \ g(x) \leq y \leq h(x)$. Mostrare che A è misurabile secondo Peano-Jordan e si ha

$$|A| = \int_a^b (h(x) - g(x))\, dx.$$

Un insieme A di questo tipo si chiama *semplice rispetto all'asse delle x...* Gli insiemi semplici rispetto all'asse delle y si definiscono in modo analogo, e ci sono anche naturali generalizzazioni in dimensione più alta.

La misura di Peano-Jordan è un ottimo oggetto, che però si comporta male rispetto ad operazioni *numerabili*: se è vero che l'unione di un numero finito di insiemi misurabili secondo P.-J. rimane misurabile, questo non è vero per unioni numerabili (un unione numerabile di *punti* può dare un insieme non misurabile: un esempio è l'insieme dei punti con coordinate razionali in un rettangolo). Per questa ed altre ragioni, risulta utile definire una nozione più generale di misura, che sarà appunto la misura di Lebesgue.

Siamo ora in grado di definire la *misura esterna di Lebesgue* di un sottinsieme di $\mathbf{R}^n$: l'idea è molto simile a quella della definizione della misura di Peano-Jordan, solo che useremo unioni numerabili anziché unioni finite di intervalli.

DEFINIZIONE (Misura esterna di Lebesgue): Se $A \subset \mathbf{R}^n$, la sua *misura esterna di Lebesgue* si definisce come

$$m(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : \ I_i \textit{ intervalli}, \ \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset A\}.$$

Si noti che non richiediamo che gli intervalli abbiano parti interne disgiunte. Inoltre, consideriamo anche l'insieme vuoto come intervallo degenere, in modo da poter considerare anche ricoprimenti finiti.

La misura esterna di Lebesgue gode delle seguenti proprietà elementari:

TEOREMA (Proprietà elementari della misura esterna di Lebesgue): Sia $m : \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \to [0, +\infty]$ *la misura esterna di Lebesgue*[1]*. Valgono i fatti seguenti:*

(i) $m(\emptyset) = 0$, $m(\{x\}) = 0$ *per ogni* $x \in \mathbf{R}^n$.

(ii) Se $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$*, con* $A, A_1, A_2, \ldots \subset \mathbf{R}^n$*, allora*

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

(numerabile subadditività della misura di Lebesgue). In particolare, se $A \subset B$ *vale* $m(A) \leq m(B)$ *(monotonia della misura di Lebesgue).*

(iii) Nella definizione della misura esterna di Lebesgue, non è restrittivo chiedere che gli intervalli I_i *siano tutti aperti.*

(iv) $m(I) = |I|$ *per ogni intervallo* $I \subset \mathbf{R}^n$*. Inoltre,* $m(\mathbf{R}^n) = +\infty$.

DIM.: La (i) è lasciata come facile esercizio. Per quanto riguarda la (ii), è importante fare un'osservazione preliminare che ricorre in tutta la teoria della misura: la somma di una serie di numeri non negativi (che ovviamente può essere $+\infty$) non cambia se si permuta l'ordine degli addendi della serie (per esercizio si provi a dimostrare questo fatto, che è falso per le serie a termini di segno qualunque che non siano assolutamente convergenti).

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e un indice i: per definizione di inf possiamo trovare una successione di intervalli $\{I_j^i\}_j$ tali che $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^i \supset A_i$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j^i| < m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Allora $\{I_j^i\}_{i,j}$ è un ricoprimento numerabile di A fatto di intervalli, e per definizione di misura di Lebesgue abbiamo

$$m(A) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |I_j^i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |I_j^i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} (m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) + \varepsilon,$$

[1] $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ denota l'insieme delle parti di $\mathbf{R}^n$, ossia l'insieme di tutti i sottinsiemi di $\mathbf{R}^n$.

da cui segue (ii) perché ε può essere preso arbitrariamente piccolo.

La monotonia è conseguenza immediata della subadditività numerabile.

Dimostriamo (iii): se $A \subset \mathbf{R}^n$, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare degli intervalli I_j tali che $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset A$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < m(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per ogni $j = 1, 2, \ldots$ sia $I'_j \supset I_j$ un intervallo *aperto* di poco più grande, scelto in modo che $|I'_j| < |I_j| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. Allora

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I'_j| < \sum_{j=1}^{\infty} (|I_j| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}) < m(A) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

e (iii) è dimostrata.

Sorpendentemente, la (iv) è la proprietà più difficile da dimostrare. Vedremo domani come fare.

2 Lezione del 14/12/2018 (2 ore)

Dimostriamo la (iv) del teorema della volta scorsa: grazie alla (iii), essa segue immediatamente dal seguente

LEMMA: Se I è un intervallo, allora per ogni successione di intervalli I_j aperti con $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset I$ si ha

$$(*) \quad |I| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|.$$

La (*) è dimostrabile abbastanza facilmente se gli I_j sono in numero finito, lo è meno nel caso generale di un ricoprimento numerabile. Se però $J \subset I$ è un intervallo *chiuso e limitato*, possiamo dire che esiste un numero finito di intervalli $I_1, I_2, \ldots, I_N$ del nostro ricoprimento di I tali che $J \subset \bigcup_{j=1}^{N} I_j$.

Dimostriamo per assurdo la validità di questa affermazione: se così non fosse, per ogni $n \in \mathbf{N}$ potremmo trovare $x_n \in J \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j$. Grazie al teorema di Bolzano-Weierstrass, esisterebbe una sottosuccessione $x_{n_k} \to \overline{x} \in J$ (grazie alla chiusura di J). Siccome gli I_j ricoprono J, esisterebbe $\overline{n}$ tale che $\overline{x} \in I_{\overline{n}}$.

Ma $I_{\overline{n}}$ è aperto: ne deriverebbe che $x_{n_k} \in I_{\overline{n}} \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ per ogni $n \geq \overline{n}$, il che è evidentemente assurdo[2].

Poiché la (*) è vera per i ricoprimenti finiti, se ne deduce che

$$|J| \leq \sum_{j=1}^{N} |I_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|.$$

Poiché la misura di J può essere presa vicina quanto si vuole alla misura di I, (*) risulta dimostrata. Q.E.D.

Come immediata conseguenza del nostro teorema, vediamo che un sottinsieme *numerabile* di $\mathbf{R}^n$ ha misura zero: infatti, un punto di $\mathbf{R}^n$ ha evidentemente misura di Lebesgue zero e la nostra affermazione segue dalla numerabile subadditività.

La misura esterna di Lebesgue è un importante caso particolare di un oggetto astratto più generale, chiamato misura esterna:

DEFINIZIONE (Misura esterna): Una *misura esterna* su un insieme X è una funzione $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e che sia numerabilmente subadditiva: se $A, A_1, A_2, A_3, \ldots \subset X$ e $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, allora

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Dalla numerabile subadditività segue che μ è monotona: se $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Un esempio di misura esterna diversa dalla misura di Lebesgue è la *restrizione* della misura di Lebesgue a un sottinsieme $A_0 \subset \mathbf{R}^n$: questa è la misura $\tilde{m}$ definita da

$$\tilde{m}(A) := m(A \cap A_0).$$

Un altro esempio è la misura δ_0 (*delta di Dirac centrata in* 0), misura su $\mathbf{R}^n$ definita da

$$\delta_0(A) = \begin{cases} 1 & \textit{se } 0 \in A, \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

[2] Come vedrete nel secondo semestre studiando un po' di topologia generale, abbiamo dimostrato che J è *compatto per ricoprimenti.*

Ancora, è una misura esterna la *"misura che conta"* definita da

$$\#(A) = \begin{cases} \text{numero degli elementi di } A & se\ A\ \grave{e}\ finito, \\ +\infty & altrimenti. \end{cases}$$

In generale, si può dire che la misura di Lebesgue non ha buone proprietà su *tutti* i sottinsiemi di $\mathbf{R}^n$: essa mostra un comportamento assai più simpatico e desiderabile su una particolare classe di insiemi, detti *misurabili*:

DEFINIZIONE (Insiemi misurabili secondo Lebesgue, definizione di Caratheodory): Un sottinsieme $A \subset \mathbf{R}^n$ si dice *misurabile secondo Lebesgue* o *m-misurabile* se vale l'ugualgianza

$$m(T) = m(T \cap A) + m(T \setminus A)$$

per ogni sottinsieme $T \subset \mathbf{R}^n$. In sostanza, chiediamo che A "spezzi bene" la misura di ogni insieme di $\mathbf{R}^n$.

Si noti che grazie alla numerabile subadditività della misura esterna abbiamo sempre $m(T) \leq m(T \cap A) + m(T \setminus A)$: è quindi sufficiente verificare che valga la disuguaglianza opposta

$$m(T) \geq m(T \cap A) + m(T \setminus A) \qquad \forall T \subset \mathbf{R}^n.$$

Analogamente, data una misura esterna μ, A si dice μ-misurabile se $\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A)$ per ogni $T \subset \mathbf{R}^n$.

OSSERVAZIONE: In seguito ci sarà utile il seguente fatto: se $A \subset \mathbf{R}^n$ è misurabile secondo Lebesgue e $\tilde{m}$ denota la restrizione della misura di Lebesgue ad un *qualunque* insieme $A_0 \subset \mathbf{R}^n$, allora A è anche $\tilde{m}$-misurabile. Se infatti $T \subset \mathbf{R}^n$ abbiamo

$$\tilde{m}(T) = m(T \cap A_0) = m((T \cap A_0) \cap A) + m((T \cap A_0) \setminus A) =$$
$$m((T \cap A) \cap A_0) + m((T \setminus A) \cap A_0) = \tilde{m}(T \cap A) + \tilde{m}(T \setminus A).$$

Questo stesso fatto rimane vero, con identica dimostrazione, anche se m e $\tilde{m}$ vengono sostituite da una generica misura esterna μ e dalla sua restrizione $\tilde{\mu}$ all'insieme A_0.

Il seguente teorema mostra due cose: innanzitutto, se partiamo da insiemi misurabili e facciamo operazioni di unione numerabile, complementazione e intersezione numerabile, rimaniamo sempre nell'ambito degli insiemi misurabili. Inoltre, la misura di Lebesgue (o una qualunque misura esterna μ) se ristrette agli insiemi misurabili hanno buone proprietà, la principale delle quali è la *numerabile additività*: la misura dell'unione di una famiglia numerabile di insiemi due a due disgiunti è uguale alla somma delle loro misure.

TEOREMA (Proprietà degli insiemi misurabili e della misura sugli insiemi misurabili): Sia m la misura di Lebesgue su $\mathbf{R}^n$. Valgono i seguenti fatti

(i) Se A è misurabile secondo Lebesgue, allora $A^C = \mathbf{R}^n \setminus A$ è misurabile. Inoltre, se $m(A) = 0$ allora A è misurabile.

(ii) Unione o intersezione numerabile di insiemi misurabili è misurabile.

(iii) Se $\{A_i\}_i$ è una famiglia di insiemi misurabili due a due disgiunti e $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, allora

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

(numerabile additività della misura di Lebesgue sui misurabili).

(iv) Se $\{A_i\}$ è una successione crescente di insiemi misurabili, cioè se $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$, e $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ allora

$$m(A) = \lim_{i \to +\infty} m(A_i).$$

(v) Se $\{A_i\}$ è una successione decrescente di insiemi misurabili, cioè se $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, se $m(A_1) < +\infty$ e se infine $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, allora

$$m(A) = \lim_{i \to +\infty} m(A_i).$$

Identico enunciato vale se la misura di Lebesgue è sostituita con una qualunque misura esterna μ e gli insiemi misurabili secondo Lebesgue con gli insiemi μ-misurabili.

DIM.: La (i) è ovvia se si osserva che la condizione di misurabilità può essere riscritta:

$$m(T) \geq m(T \cap A) + m(T \cap A^C) \qquad \forall T \subset \mathbf{R}^n.$$

Che un insieme di misura nulla sia misurabile è immediato. Da questo segue in particolare che $\emptyset$ e $\mathbf{R}^n$ sono misurabili.

Mostriamo una versione indebolita di (ii): se A e B sono misurabili, allora $A \cup B$ e $A \cap B$ sono misurabili. Infatti, se $T \subset \mathbf{R}^n$ si ha

$$m(T) = m(T \cap A) + m(T \setminus A) =$$
$$m((T \cap A) \cap B) + m((T \cap A) \setminus B) + m((T \setminus A) \cap B) + m((T \setminus A) \setminus B).$$

Si osservi l'ultima riga: l'unione degli insiemi nei primi tre addendi è esattamente $T \cap (A \cup B)$ per cui, per la subadditività della misura, la somma dei primi tre addendi è $\geq m(T \cap (A \cup B))$. Invece, l'insieme nell'ultimo addendo non è altro che $T \setminus (A \cup B)$: si ha allora

$$m(T) \geq m(T \cap (A \cup B)) + m(T \setminus (A \cup B)),$$

e $A \cup B$ è misurabile. Da questo e da (i) segue la misurabilità di $A \cap B$ perché $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C$. Per induzione, segue anche che unione e intersezione *finita* di insiemi misurabili è misurabile (alle unioni e intersezioni numerabili arriveremo solo alla fine, dopo aver dimostrato tutto il resto!).

Vedremo la prossima volta il resto della dimostrazione...

3 Lezione del 19/12/2018 (2 ore)

Concludiamo la dimostrazione del teorema sulla proprietà della misura sugli insiemi misurabili.

Cominciamo a dimostrare (iii): essa è vera per l'unione di *due* insiemi misurabili e disgiunti in quanto $m(A \cup B) = m((A \cup B) \cap A) + m((A \cup B) \setminus A) = m(A) + m(B)$. Per induzione, ne deriva che (iii) è vera per l'unione di una famiglia finita di insiemi misurabili due a due disgiunti.

Nel caso generale di una famiglia *numerabile* di insiemi misurabili due a due disgiunti, la numerabile subadditività della misura fornisce $m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$, mentre la monotonia assicura che per ogni $N \in \mathbf{N}$

$$m(A) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^{N}(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{N} m(A_i),$$

dove l'ultima uguaglianza vale per quanto osservato sulle unioni finite di insiemi misurabili disgiunti. Passando al sup su N si ricava

$$m(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

e (iii) è dimostrata.

Dimostriamo (iv): basta applicare (iii) alla successione di insiemi due a due disgiunti data da $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$ $(i \geq 2)$. Si ha

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} m(B_i) = \lim_{N \to +\infty} m(A_N).$$

Dimostriamo (v): Definiamo la successione crescente di insiemi $B_i = A_1 \setminus A_i$, $i = 2, 3, \ldots$. Allora

$$A_1 = A \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} B_i$$

e per (iv) si ha

$$m(A_1) \leq m(A) + \lim_{i \to +\infty} [m(A_1) - m(A_i)],$$

da cui $\lim\limits_{i \to +\infty} m(A_i) \leq m(A)$. La disuguaglianza opposta vale per monotonia, per cui la (v) è dimostrata.

A questo punto il teorema è quasi dimostrato: manca solo la (ii).

Sia $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, con gli A_i tutti misurabili Dobbiamo mostrare che A è misurabile.

Sia $T \subset \mathbf{R}^n$. Consideriamo la successione crescente di insiemi misurabili $B_N := \bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i$: essi sono misurabili anche per la misura esterna $\tilde{m}$ data dalla restrizione di m all'insieme T (cioè la misura definita da $\tilde{m}(A) := m(T \cap A)$ per ogni $A \subset \mathbf{R}^n$). Per la monotonia della misura abbiamo:

$$(***) \quad m(T) = m(T \cap B_N) + m(T \setminus B_N) \geq m(T \cap B_N) + m(T \setminus A)$$

D'altra parte, per (iv) applicata alla misura esterna $\tilde{m}$ abbiamo

$$\lim_{N \to +\infty} m(T \cap B_N) = \lim_{N \to +\infty} \tilde{m}(B_N) = \tilde{m}(A) = m(T \cap A)$$

e la misurabilità di A segue passando al limite per $N \to +\infty$ in (***). La misurabilità di $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ segue al solito scrivendo

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^C \right)^C.$$

Q.E.D.

Il seguente teorema mostra che gli insiemi misurabili secondo Lebesgue abbondano.

TEOREMA (Regolarità della misura di Lebesgue): I sottinsiemi aperti e i sottinsiemi chiusi di $\mathbf{R}^n$ *sono misurabili secondo Lebesgue. Inoltre, se* A *è* *un insieme misurabile secondo Lebesgue, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono B aperto e C chiuso, con $C \subset A \subset B$ e $m(B \setminus C) < \varepsilon$.*

Per dimostrarlo ci servirà il seguente fatterello topologico: qualunque aperto di $\mathbf{R}^n$, comunque complicato, può essere ottenuto facendo un'unione numerabile di intervalli:

PROPOSIZIONE: Ogni aperto $A \subset \mathbf{R}^n$ è unione numerabile di intervalli aperti.

DIM.: Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ costituita da tutti i cubi di $\mathbf{R}^n$ del tipo $(q_1 - r, q_1 + r) \times (q_2 - r, q_2 + r) \times \ldots \times (q_n - r, q_n + r)$, dove tutti i q_i ed r sono razionali. Questa è una famiglia numerabile di intervalli.

Mostriamo che A è unione degli elementi della famiglia numerabile di intervalli

$$\mathcal{F}' = \{I \in \mathcal{F} : I \subset A\}.$$

Infatti, poiché A è aperto, per ogni $x \in A$ esiste una palla aperta $B_{r(x)}(x) \subset A$. Dentro questa palla possiamo trovare un cubo centrato in x dentro il quale, grazie alla densità dei razionali, c'è un elemento $I_x \in \mathcal{F}$ che contiene x. Per costruzione, $I_x \in \mathcal{F}'$: abbiamo mostrato che per ogni $x \in A$ c'è un elemento della famiglia numerabile $\mathcal{F}'$ che lo contiene. Dunque $A = \bigcup\limits_{I \in \mathcal{F}'} I$.

Q.E.D.

Dimostriamo il teorema di regolarità della misura di Lebesgue.

È un esercizio relativamente semplice verificare che gli intervalli sono insiemi misurabili secondo Lebesgue: un intervallo si ottiene come intersezione finita di *semispazi*. A sua volta, un semispazio S è misurabile secondo Lebesgue: se T è un insieme test, fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\{I_i\}$ una famiglia numerabile di intervalli che ricopre T tale che $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m(T) + \varepsilon$. Definiamo poi $I_i' = I_i \cap S$, $I_i'' = I_i \cap (\mathbf{R}^n \setminus S)$: questi sono ancora intervalli (eventualmente vuoti), la somma delle cui misure è esattamente $|I_i|$. Inoltre, la famiglia $\{I_i'\}$ ricopre $T \cap S$, mentre $\{I_i''\}$ ricopre $T \cap S^C$: dunque

$$m(T) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} |I_i'| + \sum_{i=1}^{\infty} |I_i''| \geq m(T \cap S) + m(T \cap S^C)$$

e la misurabilità di S segue perché ε è arbitrario.

Di conseguenza gli intervalli sono misurabili, e lo sono anche gli aperti perché possono essere ottenuti come unione numerabile di intervalli.

I chiusi sono misurabili perché i loro complementari sono aperti e quindi misurabili.

Sia ora A misurabile, $\varepsilon > 0$: mostriamo che esiste un aperto $B \supset A$ con $m(B \setminus A) < \varepsilon/2$. Supponiamo dapprima che A abbia misura finita. Per definizione di misura di Lebesgue, possiamo trovare una famiglia numerabile di intervalli $I_1, I_2, \ldots$ con $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset A$ e $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leq m(A) + \varepsilon/2$. Abbiamo già visto che non è restrittivo supporre che gli I_i siano tutti aperti. Se $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, allora B è aperto e per subadditività

$$m(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) \leq m(A) + \varepsilon/2,$$

da cui $m(B \setminus A) = m(B) - m(A) \leq \varepsilon/2$.

Mostriamo che anche un insieme misurabile A con $m(A) = +\infty$ si approssima "da fuori" con insiemi aperti: prendiamo $\varepsilon > 0$ e mostriamo che esiste $B \supset A$, B aperto, tale che $m(B \setminus A) < \varepsilon$.

A tal fine consideriamo gli insiemi misurabili $A_N = A \cap B_N(0)$, $N = 1, 2, \ldots$: essi hanno tutti misura finita e la loro unione è A. Per ciascuno di questi possiamo trovare $B_N \supset A_N$, B_N aperto tale che $m(B_N \setminus A_N) < \frac{\varepsilon}{2^{N+1}}$: definiamo $B = \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$.

Ora, B è un aperto che contiene A, e inoltre $B \setminus A \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} (B_N \setminus A_N)$: per subadditività numerabile ricaviamo $m(B \setminus A) \leq \sum_{N=1}^{\infty} m(B_N \setminus A_N) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mostriamo infine che dato A misurabile e $\varepsilon > 0$, esiste un chiuso $C \subset A$ con $m(A \setminus C) < \varepsilon/2$: questo concluderà la nostra dimostrazione. A questo fine, scegliamo un aperto $F \supset A^C$ tale che $m(F \setminus A^C) < \varepsilon/2$. Allora $C = F^C$ è un chiuso, $C \subset A$, e $m(A \setminus C) = m(F \setminus A^C) < \varepsilon/2$. Q.E.D.

Nonostante vi siano moltissimi insiemi misurabili secondo Lebesgue, non tutti i sottinsiemi di $\mathbf{R}^n$ lo sono: ne vedremo un celebre esempio la volta prossima.

4 Lezione del 20/12/2018 (2 ore)

Concludiamo la dimostrazione del teorema di ieri:

ESEMPIO (Insieme non misurabile di Vitali): Mettiamoci nel caso $n = 1$, e consideriamo l'intervallo $(0, 1) \subset \mathbf{R}$. Definiamo la seguente relazione di equivalenza su $(0, 1)$: diciamo che $x \sim y$ se e solo se $x - y \in \mathbf{Q}$. La nostra relazione di equivalenza partiziona l'intervallo $(0, 1)$ in infinite classi di equivalenza: definiamo un insieme A che contiene esattamente 1 elemento per ogni classe di equivalenza[3].

Mostriamo ora che l'insieme A non è misurabile secondo Lebesgue.

Per ogni $q \in \mathbf{Q} \cap [0,1)$ definiamo gli insiemi $A_q = \{x + q : \ x \in A\}$. Siccome la misura di Lebesgue è invariante per traslazione (questo è ovvio per come è definita: la misura di un intervallo è invariante per traslazione!) abbiamo che $m(A_q) = m(A)$. Poiché gli intervalli sono misurabili secondo Lebesgue abbiamo anche $m(A) = m(A_q) = m(A_q \cap (0,1)) + m(A_q \setminus (0,1))$. Se $B_q = A_q \setminus (0,1)$, definiamo $\tilde{B}_q = \{x : \ x + 1 \in B_q\}$: evidentemente $m(\tilde{B}_q) = m(B_q)$ per l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue.

Definiamo infine $\tilde{A}_q = (A_q \cap (0,1)) \cup \tilde{B}_q$. Per quanto visto sopra, abbiamo $m(\tilde{A}_q) = m(A)$. Ora, è facile vedere che gli insiemi A_q sono due a due disgiunti al variare di $q \in \mathbf{Q} \cap [0,1)$ e che $\bigcup_q \tilde{A}_q = (0,1)$. Se A fosse misurabile, lo sarebbero anche gli insiemi $\tilde{A}_q$ e per additività numerabile avremmo

$$1 = m([0,1)) = \sum_{q \in [0,1) \cap \mathbf{Q}} m(\tilde{A}_q) = \sum_{q \in [0,1) \cap \mathbf{Q}} m(A).$$

Questo è assurdo: infatti la misura di A è nulla oppure positiva. Se fosse $m(A) = 0$, l'espressione di destra varrebbe 0, mentre se fosse $m(A) > 0$ essa varrebbe $+\infty$: in nessun caso essa può essere uguale a 1. Dunque A non è misurabile secondo Lebesgue.

In vista della definizione dell'integrale di Lebesgue, occorre definire un'importante classe di funzioni: le funzioni *misurabili*.

DEFINIZIONE (funzione misurabile): Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ misurabile, $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$. Il simbolo $\overline{\mathbf{R}}$ denota l'insieme $\mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$: in questo contesto, in futuro useremo la "strana" convenzione che $0 \cdot \pm\infty = 0$, mentre la somma $+\infty - \infty$ rimarrà non definita, come è giusto che sia!

La funzione f si dice *misurabile* (rispetto ad una fissata misura esterna, per esempio la misura di Lebesgue su $\mathbf{R}^n$) se per ogni $a \in \mathbf{R}$ gli insiemi $f^{-1}((a, +\infty]) = \{x \in A : f(x) > a\}$ sono misurabili.

Una caratterizzazione equivalente della misurabilità, di sapore un po' più topologico, è data dalla seguente

PROPOSIZIONE (Caratterizzazione delle funzioni misurabili): Una funzione $f : A_0 \to \overline{\mathbf{R}}$ (con $A_0 \subset \mathbf{R}^n$ misurabile) è misurabile se e solo se $f^{-1}(\{+\infty\})$, $f^{-1}(\{-\infty\})$ sono misurabili e $f^{-1}(U)$ è misurabile per ogni aperto $U \subset \mathbf{R}$.

[3] Per poter definire questo insieme, dobbiamo assumere la validità dell'assioma della scelta!

DIM.: Se sappiamo che $f^{-1}(\{+\infty\})$, $f^{-1}(\{-\infty\})$ sono misurabili e $f^{-1}(U)$ è misurabile per ogni aperto $U \subset \mathbf{R}$, allora f è misurabile perché $f^{-1}((a,+\infty]) = f^{-1}((a,+\infty)) \cup f^{-1}(\{+\infty\})$.

Viceversa, supponiamo che f sia misurabile e dimostriamo che la controimmagine di un aperto è sempre misurabile.

Possiamo scrivere

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{N=1}^{\infty} f^{-1}((N,+\infty]),$$

per cui $f^{-1}(\{+\infty\})$ è misurabile in quanto intersezione numerabile di misurabili.

Dall'ipotesi di misurabilità di f segue allora che $f^{-1}((a,+\infty))$ è misurabile per ogni $a \in \mathbf{R}$. Dimostriamo che anche gli insiemi $f^{-1}([a,+\infty))$, $f^{-1}((-\infty,a))$ e $f^{-1}((-\infty,a])$ sono tutti misurabili per ogni $a \in \mathbf{R}$. Infatti, $f^{-1}([a,+\infty)) = \bigcap_{N=1}^{\infty} f^{-1}((a-\frac{1}{N},+\infty))$ è misurabile in quanto intersezione numerabile di misurabili. Le controimmagini di semirette "sinistre" del tipo $f^{-1}([-\infty,a))$ e $f^{-1}([-\infty,a])$ sono misurabili in quanto sono complementari di controimmagini di semirette "destre". Ne segue che $f^{-1}(\{-\infty\})$ è misurabile: $f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap\limits_{N=1}^{\infty} f^{-1}([-\infty,-N])$...e sono misurabili anche le controimmagini di semirette "sinistre" senza $-\infty$.

Allora, anche le controimmagini di intervalli aperti sono misurabili, infatti $f^{-1}((a,b)) = f^{-1}((-\infty,b)) \cap f^{-1}(a,+\infty))$. Se poi $U \subset \mathbf{R}$ è aperto, scriviamo $U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$, con $I_i \subset \mathbf{R}$ intervalli aperti. Allora $f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} f^{-1}(I_i)$ è misurabile. Q.E.D.

Osserviamo che una funzione continua a valori reali, definita su un aperto di $\mathbf{R}^n$, è certamente misurabile secondo Lebesgue. Perché?

Le funzioni misurabili sono "stabili" per tutta una serie di operazioni algebriche e di limite:

PROPOSIZIONE (Stabilità delle funzioni misurabili): Supponiamo che f, g siano misurabili, $\lambda \in \mathbf{R}$ e che $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni misurabili. Allora

(i) l'insieme $\{x : \; f(x) > g(x)\}$ è misurabile;

(ii) se $\phi : \overline{\mathbf{R}} \to \overline{\mathbf{R}}$ è continua, allora $\phi \circ f$ è misurabile (sul suo dominio);

(iii) le funzioni $f+g$, λf, $|f|$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ e fg sono tutte misurabili nel loro dominio;

(iv) le funzioni $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ *e* $\lim f_n$ *sono tutte misurabili nel loro dominio.*

DIM.: Per verificare la (i), osserviamo che se $f(x) > g(x)$, allora esiste un razionale q compreso tra $g(x)$ e $f(x)$. Allora il nostro asserto è vero in quanto possiamo scrivere

$$\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}} \left(f^{-1}((q, +\infty]) \cap g^{-1}([-\infty, q)) \right),$$

per cui abbiamo espresso il nostro insieme come unione numerabile di insiemi misurabili.

La (ii), nel caso di funzioni a valori reali, è ovvia grazie alla nostra caratterizzazione delle funzioni misurabili: sappiamo infatti che la controimmagine di un aperto secondo ϕ è un aperto. Nel caso di funzioni a valori reali estesi, occorre precisare cosa vuol dire che Φ è continua: significa che la controimmagine di ogni aperto di $\overline{\mathbf{R}}$ è un aperto in $\overline{\mathbf{R}}$. A loro volta, gli aperti di $\overline{\mathbf{R}}$ sono gli insiemi che si possono ottenere prendendo unioni (è sufficiente prenderle numerabili) di intervalli aperti di $\mathbf{R}$ e di semirette "intorno di $\pm\infty$", cioè del tipo $(a, +\infty]$ oppure $[-\infty, a)$. È allora un semplice esercizio verificare che la composizione è ancora misurabile.

Vediamo la (iii): siano f, g misurabili e consideriamo la funzione somma $f + g$ (essa è definita sull'intersezione dei domini, privata dei punti in cui la somma si presenta nella forma $+\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$). Essa è misurabile in quanto

$$(f + g)^{-1}((a, +\infty]) = \{x : f(x) > a - g(x)\}$$

è misurabile grazie a (i): la funzione $a - g(x)$ è infatti banalmente misurabile. Da (ii) segue poi la misurabilità di λf, di $|f|$ e di f^2 (che si ottengono da f componendo con una funzione continua). Se f, g sono a valori reali possiamo poi scrivere $\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$, $\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|)$, $f(x)g(x) = \frac{1}{2}((f(x)+g(x))^2 - f^2(x) - g^2(x))$, il che ci fornisce la misurabilità di $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ e fg. Nel caso generale di funzioni a valori reali estesi, il ragionamento appena fatto ci fornisce la misurabilità della restrizione delle funzioni che ci interessano all'insieme, evidentemente misurabile, dove sia f che g sono finite.

Tutto il resto è facilmente decomponibile in pochi pezzi misurabili, su ciascuno dei quali le funzioni in esame sono costanti: per esempio, $f(x)g(x)$ vale identicamente $+\infty$ sull'insieme (misurabile) $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = +\infty, g(x) > 0\}$, vale 0 sull'insieme $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = +\infty, g(x) = 0\}$, etc. In conclusione, se ne deduce facilmente che la funzione prodotto è misurabile.

Dimostriamo (iv): sia $f(x) = \sup\{f_n(x) : n = 1, 2, \ldots\}$. Si ha $f^{-1}((a, +\infty)) = \bigcup_n f_n^{-1}((a, +\infty))$, per cui f è misurabile essendolo le f_n. Analogamente, $\inf_n f_n(x)$ è misurabile.

La funzione $\liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$ è misurabile in quanto $\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \sup_n \inf\{f_m(x) : m \geq n\}$. Analogamente, $\limsup_{n\to+\infty} f_n(x)$ è misurabile. L'insieme dove le due funzioni misurabili $\liminf_n f_n$ e $\limsup_n f_n$ coincidono è misurabile: tale insieme è proprio quello in cui esiste $\lim_n f_n$, che quindi è misurabile. Q.E.D.

5 Lezione del 21/12/2018 (2 ore)

Un'importante sottoclasse delle funzioni misurabili è quella delle *funzioni semplici*: nella definizione di integrale di Lebesgue esse giocheranno lo stesso ruolo che le funzioni a scala avevano in quella dell'integrale di Riemann.

Ricordiamo che, dato $A \subset \mathbf{R}^n$, la sua *funzione caratteristica* è la funzione

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x \in A, \\ 0 & \textit{se } x \notin A. \end{cases}$$

DEFINIZIONE: Una *funzione semplice* $\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili. In altre parole, ϕ è semplice se esistono un numero finito di insiemi misurabili $A_1, A_2, \ldots, A_N$ e dei numeri reali $c_1, c_2, \ldots, c_N$ tali che $\phi(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$. Evidentemente, non è restrittivo supporre che gli A_i siano due a due disgiunti. In modo equivalente, possiamo dire che una funzione semplice è una funzione *misurabile* la cui immagine è un *insieme finito.*

Se $\phi(x) \geq 0$ per ogni x, definiamo in modo naturale l'integrale (di Lebesgue) di ϕ rispetto alla misura m come

$$\int_{\mathbf{R}^n} \phi(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} c_i\, m(A_i).$$

Osserviamo che una funzione a scala è una funzione semplice in cui gli insiemi A_i sono intervalli. Per la misura di Lebesgue e per questo tipo di funzioni, la nuova definizione di integrale coincide con quella di Riemann. Inoltre, non è difficile vedere che l'integrale sulle funzioni semplici gode delle usuali proprietà di monotonia, di additività e di omogeneità rispetto alla funzione integranda.

Come vedremo, l'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile non negativa f si definisce in maniera del tutto analoga all'integrale (inferiore) di Riemann, sostituendo le funzioni a scala con le funzioni semplici: $\int f(x)\, dx = \sup\{\int \phi(x)\, dx : \ \phi \textit{ semplice}, \ \phi \le f\}$.

Tuttavia, per provare che quest'oggetto gode di tutte le proprietà che ci aspettiamo, sarà necessario provare un risultato di approssimazione: il prossimo, fondamentale teorema dice che ogni funzione misurabile *non negativa* può essere approssimata da sotto con una successione di funzioni semplici:

TEOREMA (Approssimazione di funzioni misurabili con funzioni semplici): Sia $f : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ *una funzione misurabile. Allora esiste una successione* $\phi_k : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty)$ *di funzioni semplici tali che* $f \ge \phi_{k+1} \ge \phi_k$ *(*$k = 1, 2, 3, \ldots$*) e tali che*

$$\lim_{k \to +\infty} \phi_k(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

DIM.: Per ogni fissato $k = 1, 2, \ldots$ e $j = 0, 2, \ldots, k2^k - 1$ definiamo gli insiemi misurabili $E_{k,j} = f^{-1}([\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}))$, mentre poniamo $E_{k,k2^k} = f^{-1}([k2^k, +\infty])$.

Consideriamo poi le funzioni semplici[4]

$$\phi_k(x) = \sum_{j=0}^{k2^k} \frac{j}{2^k} \mathbf{1}_{E_{k,j}}(x).$$

Per costruzione, queste funzioni sono misurabili e sono tutte minori o uguali a f. Inoltre, esse formano una successione crescente: basta osservare che per ogni k e per ogni $j = 1, \ldots, k2^k - 1$ si ha $E_{k,j} = E_{k+1,2j} \cup E_{k+1,2j+1}$. Quanto poi a $E_{k,k2^k}$, questo verrà suddiviso al passo successivo in $2^k + 1$ insiemi...

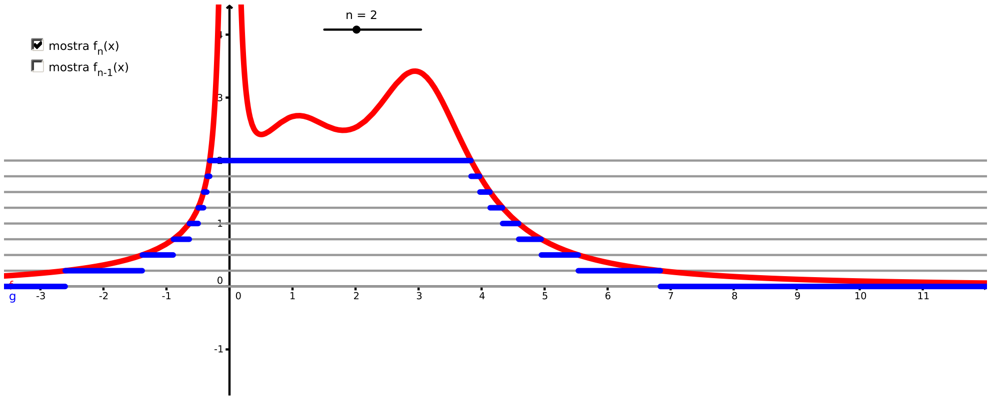
È poi facile vedere che $\phi_k(x) \to f(x)$ per ogni x: se $f(x) < +\infty$, per k abbastanza grande si ha $f(x) - \phi_k(x) \le 2^{-k}$, mentre se invece $f(x) = +\infty$ si ha $x \in E_{k,2^k}$ per ogni k e quindi $\phi_k(x) = k \to +\infty$.

Ecco un tentativo di visualizzare la costruzione delle funzioni ϕ_k con un foglio GeoGebra[5].

---

[4] Possiamo esprimere queste funzioni anche nel seguente modo più compatto: $\phi_k(x) = \min\{k, 2^{-k}[2^k f(x)]\}$, dove $[\cdot]$ denota la parte intera.

[5] `https://www.geogebratube.org/student/m51513`



Q.E.D.

È finalmente giunto il momento di introdurre l'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile non negativa: la definizione è quella anticipata prima.

DEFINIZIONE: L'*integrale di Lebesgue* di una funzione misurabile $f : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ si definisce come

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx = \sup\{ \int\limits_{\mathbf{R}^n} \phi(x)\, dx : \ \phi \ \textit{semplice}, \ \phi \le f \}.$$

Se poi $f : A \to [0, +\infty]$ è misurabile, definiamo $\int\limits_A f(x)\, dx$ come $\int\limits_{\mathbf{R}^n} \tilde{f}(x)\, dx$, dove $\tilde{f} : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ si ottiene estendendo f ponendola uguale a 0 fuori da A.

Il prossimo risultato di convergenza integrale si rivelerà importantissimo per la teoria dell'integrale di Lebesgue, grazie anche al risultato di approssimazione con funzioni semplici che abbiamo dimostrato prima.

TEOREMA (di Beppo Levi o della convergenza monotona): Sia $\{f_k\}$ *una successione di funzioni misurabili non negative,* $f_k : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$*, e supponiamo che la successione sia anche crescente:* $f_{k+1}(x) \ge f_k(x)$ *per ogni* $x \in \mathbf{R}^n$ *e per ogni* $k = 1, 2, 3, \ldots$*. Allora, se* $f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x)$*, si ha*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx = \lim_{k \to +\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_k(x)\, dx.$$

Prima della dimostrazione, vediamo una importante conseguenza del teorema di Beppo Levi:

OSSERVAZIONE (Additività dell'integrale rispetto alla funzione integranda): Siano $f, g : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ funzioni misurabili. Allora

$$\int_{\mathbf{R}^n} (f(x) + g(x))\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx + \int_{\mathbf{R}^n} g(x)\, dx.$$

Infatti possiamo trovare due successioni crescenti di funzioni semplici, $\{s_k\}$, $\{u_k\}$ con $s_k \to f$, $u_k \to g$. L'integrale delle funzioni semplici è evidentemente additivo: il teorema di Beppo-Levi ci consente di passare al limite e ottenere l'identità voluta.

DEFINIZIONE (Integrale di funzioni di segno qualunque): Che fare se abbiamo una funzione misurabile di *segno qualunque* $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$? Definiamo la parte positiva e la parte negativa di f nel modo seguente:

$$f^+(x) := \max\{0, f(x)\}, \qquad f^-(x) := -\min\{0, f(x)\}.$$

Evidentemente, si ha $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ e $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$. Se gli integrali di f^+ e f^- non sono *entrambi* $+\infty$, f si dice *integrabile secondo Lebesgue* e definiamo

$$\int_A f(x)\, dx := \int_A f^+(x)\, dx - \int_A f^-(x)\, dx.$$

Se poi i due integrali della parte positiva e della parte positiva sono *entrambi finiti*, allora $f(x)$ si dice *sommabile*, ed ha integrale finito. Evidentemente, una funzione misurabile f è sommabile se e solo se il suo modulo ha integrale finito.

Grazie all'additività dell'integrale e al fatto evidente che le costanti possono essere portate fuori dal segno di integrale, l'integrale di Lebesgue è *lineare* sullo spazio vettoriale delle funzioni sommabili.

Dimostrazione del teorema di Beppo Levi: Notiamo innanzitutto che la funzione f è misurabile in quanto limite (sup) di funzioni misurabili. Inoltre, la successione $k \mapsto \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_k(x)\, dx$ è crescente: indichiamo con α il suo limite. Evidentemente, essendo $f \geq f_k$ per ogni k, si ha $\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx \geq \alpha$: in particolare, se $\alpha = +\infty$, il teorema è dimostrato. Se invece $\alpha \in \mathbf{R}$, ci rimane da dimostrare la disuguaglianza opposta

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx \leq \alpha.$$

A tal fine, fissiamo $c \in (0,1)$ e una funzione semplice $s : \mathbf{R}^n \to [0,+\infty)$ con $s \leq f$. La funzione semplice s può essere scritta $s(x) = \sum_{j=1}^N s_j \mathbf{1}_{A_j}(x)$, con A_j insiemi misurabili due a due disgiunti. Definiamo $E_k = \{x \in \mathbf{R}^n : f_k(x) \geq cs(x)\}$. Grazie al fatto che le f_k tendono a f e che $c < 1$, abbiamo che $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbf{R}^n$, e inoltre la successione di insiemi misurabili E_k è crescente perché lo è $\{f_k\}$. Definiamo poi $A_{j,k} = A_j \cap E_k$: grazie alla continuità della misura sulle successioni crescenti abbiamo $m(A_{j,k}) \to m(A_j)$ per $k \to +\infty$. Allora:

$$\begin{aligned}
&\alpha = \lim_{k\to+\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_k(x)\, dx \geq \\
&\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{E_k} f_k(x)\, dx \geq \lim_{k\to+\infty} \int\limits_{E_k} c\, s(x)\, dx = \\
&\lim_{k\to+\infty} c \sum_{j=1}^N s_j\, m(A_{j,k}) = c \sum_{j=1}^N s_j\, m(A_j) = c \int\limits_{\mathbf{R}^n} s(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Passando al sup su tutte le funzioni semplici $s \leq f$ e su tutti i $c < 1$, si ottiene la disuguaglianza che ci mancava. Q.E.D.

Si noti che la proprietà di additività rispetto alla funzione integranda continua a valere per funzioni sommabili. In particolare, poiché è evidente dalla definizione che le costanti si possono "portare fuori dall'integrale", l'integrale di Lebesgue è lineare sullo spazio vettoriale delle funzioni sommabili.

6 Lezione del 9/1/2019 (2 ore)

Vediamo l'enunciato di un altro celebre risultato: il Lemma di Fatou!

TEOREMA (Lemma di Fatou): Sia $f_k : \mathbf{R}^n \to [0,+\infty]$ una successione di funzioni misurabili non negative, $f(x) = \liminf\limits_{k\to+\infty} f_k(x)$. Allora

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x)\, dx.$$

DIM.: Sappiamo già che f è misurabile non negativa. Si ha $f(x) = \lim_{k\to+\infty} g_k(x)$, dove $g_k(x) = \inf\{f_h(x) :\ h \geq k\}$. Poiché le g_k sono una successione crescente di funzioni misurabili non negative abbiamo per Beppo Levi

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} g_k(x)\, dx.$$

La tesi segue allora grazie alla monotonia dell'integrale di Lebesgue, poiché si ha evidentemente $g_k(x) \leq f_k(x)$. Q.E.D.

Un paio di osservazioni: il lemma di Fatou è in generale falso per funzioni di segno qualunque. Si prenda per esempio $n = 1$, $f_k(x) = -1/k$ (funzioni costanti). Allora $f_k(x) \to 0$, ma

$$\int_{\mathbf{R}} f_k(x)\, dx = -\infty, \qquad \int_{\mathbf{R}} 0\, dx = 0.$$

Siccome la nostra successione di costanti cresce, lo stesso esempio mostra che il teorema di Beppo Levi non vale per funzioni di segno qualunque. Infine, le stesse funzioni *cambiate di segno* mostrano che nella tesi del Lemma di Fatou può valere la disuguaglianza stretta.

Probabilmente il più celebre risultato di convergenza integrale nel quadro della teoria di Lebesgue è il seguente:

TEOREMA (Della convergenza dominata di Lebesgue): Sia $f_k : \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ *una successione di funzioni misurabili, e supponiamo che esista una funzione sommabile* $\phi : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ *tale che* $|f_k(x)| \leq \phi(x)$ *per ogni* k *e per ogni* x. *Se esiste il limite* $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x)$, *allora*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} |f_k(x) - f(x)|\, dx = 0,$$
$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x)\, dx.$$

DIM.: La funzione limite f è misurabile, ed è anche sommabile perché il suo modulo è dominato da ϕ. Inoltre, $|f_k(x) - f(x)| \leq |f_k(x)| + |f(x)| \leq 2\phi(x)$. Ne segue che la successione di funzioni $2\phi(x) - |f_k(x) - f(x)|$ è non negativa e tende puntualmente alla funzione sommabile $2\phi(x)$. Dal Lemma di Fatou segue allora che

$$\liminf_{k\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} (2\phi(x) - |f_k(x) - f(x)|)\, dx \geq \int_{\mathbf{R}^n} 2\phi(x)\, dx,$$

da cui semplificando l'integrale di $2\phi(x)$:

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} |f_k(x) - f(x)|\, dx \leq 0,$$

che è la prima parte della tesi. La seconda parte segue perchè

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x)\, dx - \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx \right| \leq \int_{\mathbf{R}^n} |f_k(x) - f(x)|\, dx.$$

Q.E.D.

Vediamo subito qualche altra conseguenza interessante dei teoremi che abbiamo dimostrato.

ESEMPIO (Integrazione per serie): Se $\{f_k\}$ è una successione di funzioni misurabili non negative definite su A, allora

$$\int_A \sum_{i=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_A f_k(x)\,dx.$$

Basta applicare il teorema di Beppo Levi e l'additività dell'integrale rispetto alla funzione integranda alle somme parziali della serie.

ESEMPIO (Numerabile additività dell'integrale rispetto all'insieme di integrazione): Se $\{A_i\}$ è una successione di insiemi misurabili due a due disgiunti e f è una funzione misurabile non negativa definita su $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, allora

$$\int_A f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f(x)\,dx.$$

Basta infatti considerare la successione crescente di funzioni misurabili $g_k(x) = \sum_{i=1}^{k} f(x)\ \mathbf{1}_{A_i}(x)$, che converge alla funzione $g(x) = f(x)\ \mathbf{1}_A(x)$. Un'applicazione del teorema di Beppo Levi dimostra subito la tesi.

Il risultato rimane vero se f è di segno qualunque e sommabile: basta usare il teorema della convergenza dominata (con funzione dominatrice $|f(x)|\mathbf{1_A}(x)$.

OSSERVAZIONE: La convergenza puntuale nei teoremi di convergenza integrale non è necessaria in *tutti i punti*: non c'è niente di male se essa viene a mancare in un insieme di misura nulla. A questo proposito è utile introdurre una comoda terminologia: si dice che una certa proprietà è vera *per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$ (o q.o. $x \in A$, con A misurabile)* se l'insieme degli x per cui la proprietà è falsa ha misura di Lebesgue nulla.

Per esempio, date due funzioni $f, g : \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$, diremo che esse sono *quasi ovunque uguali* se $m(\{x : \ f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

È un semplice esercizio verificare che una funzione quasi ovunque uguale ad una funzione misurabile è essa stessa misurabile (infatti tutti gli insiemi di misura nulla sono misurabili). Inoltre, due funzioni quasi ovunque uguali hanno lo stesso integrale . Di più, nei teoremi di Beppo Levi, Fatou e Lebesgue, basta avere la convergenza *quasi ovunque* delle funzioni coinvolte (e la funzione dominante ϕ nel toerema di Lebesgue basta che domini le f_k quasi ovunque).

Vediamo per esercizio una semplice conseguenza del teorema della convergenza dominata:

ESEMPIO: Un risultato di integrazione per serie Se $f_k : \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ sono sommabili e $\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f_k(x)| < +\infty$, allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge puntualmente ad una funzione sommabile $f(x)$ e

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_k(x)\, dx.$$

Sia infatti $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$: grazie al teorema di integrazione per serie che abbiamo già visto (come conseguenza del teorema di Beppo Levi), questa funzione è sommabile. Ne segue subito che $g(x) < +\infty$ per quasi ogni x: dunque la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge assolutamente per quasi ogni x ad una funzione che battezziamo $f(x)$.

Per concludere, basta applicare il teorema della convergenza dominata alle somme parziali della serie: esse sono dominate dalla funzione sommabile $g(x)$.

Mostriamo che una funzione non negativa con integrale 0 è nulla quasi ovunque:

PROPOSIZIONE: Se $f : A \to [0, +\infty]$ è misurabile e $\int\limits_A f(x)\, dx = 0$, allora $f = 0$ quasi ovunque in A.

DIM.: Possiamo scrivere

$$\{x \in A : \; f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : \; f(x) > \frac{1}{n}\}.$$

Tutti gli insiemi a destra hanno misura nulla: se fosse infatti $m(E_{\overline{n}}) > 0$, con $E_{\overline{n}} = \{x \in A : \; f(x) > \frac{1}{\overline{n}}\}$ avremmo

$$\int\limits_A f(x)\, dx \geq \int\limits_{E_{\overline{n}}} f(x)\, dx \geq m(E_{\overline{n}})/\overline{n} > 0,$$

contro l'ipotesi. Q.E.D.

7 Lezione del 11/1/2019 (2 ore)

Il seguente teorema mostra che l'integrale di Riemann coincide con l'integrale di Lebesgue, fatto ovviamente rispetto alla misura di Lebesgue, sull'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann (limitate su un insieme limitato: per gli integrali impropri la faccenda è leggermente più complicata[6]). Enunciamo e dimostriamo il teorema in dimensione 1: la generalizzazione a dimensione superiore si dimostra allo stesso modo.

TEOREMA: Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione limitata ed integrabile secondo Riemann. Allora f è misurabile secondo Lebesgue, e il suo integrale di Lebesgue coincide con l'integrale di Riemann.

DIM.: Ai fini della dimostrazione, dobbiamo provvisoriamente distinguere l'integrale di Riemann da quello di Lebesgue: data $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, conveniamo che $\int_a^b f(x)\, dx$ rappresenti il suo integrale di Lebesgue, mentre indicheremo con $\mathcal{R} \int_a^b f(x)\, dx$ il suo integrale di Riemann (purché esistano)... Ricordiamo anche che l'integrale di Lebesgue delle funzioni a scala coincide per definizione con il loro integrale di Riemann.

Per definizione di integrale (superiore ed inferiore) secondo Riemann, è possibile trovare due successioni di funzioni a scala $\{\psi_n\}$ e $\{\phi_n\}$, con $\psi_n \geq f \geq \phi_n$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n\, dx = \mathcal{R} \int_a^b f\, dx.$$

Siano ora $\overline{\psi}(x) = \inf\{\psi_n(x) : n = 1, 2, \ldots\}$, $\underline{\phi}(x) = \sup\{\phi_n(x) : n = 1, 2, \ldots\}$. Queste due funzioni sono misurabili, e $\underline{\phi} \leq f \leq \overline{\psi}$. Per la monotonia dell'integrale sarà

$$\int_a^b \psi_n(x)\, dx \geq \int_a^b \overline{\psi}(x)\, dx,$$

da cui passando al limite

$$\mathcal{R} \int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b \overline{\psi}(x)\, dx,$$

[6]Si dimostri per esercizio che l'integrale improprio secondo Riemann di una funzione *non negativa*, se esiste, coincide col suo integrale di Lebesgue: basta usare opportunamente il Teorema di Bebbo Levi e il teorema di confronto tra integrale di Riemann e di Lebesgue enunciato in questa pagina. Stessa cosa se la funzione è assolutamente integrabile nel senso di Riemann (si usi il risultato per le funzioni non negative ed il teorema della convergenza dominata). Invece, se f è integrabile in senso improprio con integrale finito, ma l'integrale del suo valore assoluto diverge a $+\infty$, si vede facilmente che gli integrali della parte positiva e della parte negativa sono $+\infty$: per questo motivo, la funzione *non è integrabile* nel senso di Lebesgue.

e analogamente

$$\mathcal{R}\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \underline{\phi}(x)\,dx.$$

Siccome $\overline{\psi} \ge \underline{\phi}$, se ne deduce che $\int_a^b (\overline{\psi} - \underline{\phi})\,dx = 0$. Ora, abbiamo visto che una funzione non negativa ha integrale nullo se e soltanto se è quasi ovunque nulla (vedremo poi la dimostrazione). Quindi $\overline{\psi} - \underline{\phi} = 0$ quasi ovunque, ossia $\overline{\psi} = \underline{\phi} = f$ quasi ovunque in $[a,b]$. Ne segue immediatamente che f è misurabile e che il suo integrale di Lebesgue coincide con quello di Riemann. Q.E.D.

In realtà, si può dimostrare che una funzione limitata è integrabile secondo Riemann se e soltanto se essa è *quasi ovunque continua* (Teorema di Vitali). Per motivi di tempo, non dimostreremo questo teorema.

Come applicazione dei risultati appena visti, introduciamo (o meglio, rivediamo... perché lo avete già visto col Prof. Orlandi!) lo spazio L^2 delle funzioni a quadrato sommabile:

DEFINIZIONE: Sia $f : [a,b] \to \overline{\mathbf{R}}$ una funzione misurabile. Definiamo la sua *norma quadratica* come $\|f\|_{L^2(a,b)} := \left(\int_a^b f^(x)\,dx\right)^{1/2}$. Definiamo poi lo spazio delle *funzioni a quadrato sommabile* come

$$L^2(a,b) = \{f : [a,b] \to \overline{\mathbf{R}} : \ \|f\|_{L^2(a,b)} < +\infty\}.$$

Quozientiamo questo insieme rispetto alla classe di equivalenza di "essere uguali quasi ovunque": in tal caso, $\|\cdot\|_{L^2(a,b)}$ è effettivamente una norma. La norma è infatti evidentemente non degenere (le sole funzioni di norma nulla sono quelle quasi ovunque uguali a 0) e omogenea ($\|tf\|_{L^2} = |t|\ \|f\|_{L^2}$ per ogni $t \in \mathbf{R},\ f \in L^2$). Per provare la disuguaglianza triangolare, partiamo dimostrando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

Abbiamo infatti

$$0 \le \|tf+g\|_{L^2} = t^2\|f\|_{L^2}^2 + 2\int_a^b f\cdot g\,dx + \|g\|_{L^2}^2 \quad \forall\, t \in \mathbf{R},\ \forall f,g \in L^2.$$

Allora il discriminante di questo polinomio di secondo grado in t deve essere minore o uguale a 0, da cui segue subito la disugualianza voluta.

Usando Cauchy-Schwarz si ottiene subito

$$\|f+g\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + 2\int_a^b f\cdot g\,dx + \|g\|_{L^2}^2 \le$$
$$\|f\|_{L^2}^2 + 2\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}^2 = (\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2})^2$$

che è la disuguaglianza triangolare al quadrato.

Lo spazio $L^2(a,b)$ è uno spazio metrico completo: la dimostrazione usa le stesse idee che abbiamo usato per dimostrare l'ultimo risultato di integrazione per serie. Eccola:

TEOREMA (Riesz-Fischer): Lo spazio $L^2(a,b)$ con la norma indotta dal prodotto scalare L^2 è completo.

DIM.: Sia $\{u_n\}_n$ una successione di Cauchy in L^2: questo vuol dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $m, n \ge \nu$ vale $\|u_n - u_m\|_{L^2} < \varepsilon$.

Applicando ripetutamente questa relazione con $\varepsilon = 1/2^k$, troviamo una successione crescente di numeri naturali $\{n_k\}_k$ tale che

$$(*)\ \|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\|_{L^2} \le 1/2^k.$$

Consideriamo ora la serie di funzioni non negative

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_k}(x)|.$$

La funzione $g(x)$ è una ben definita funzione a valori in $\overline{\mathbf{R}}$.

Denotiamo con $g_K(x)$ la somma parziale K-esima della serie. Grazie alla $(*)$ si vede subito che $\|g_K\|_{L^2} \le 1$ per ogni K: applicando il teorema di Beppo Levi alla successione crescente di funzioni non negative $g_K^2(x)$ si ottiene che $\|g\|_{L^2} = \lim_{K\to+\infty} \|g_K\|_{L^2} \le 1$. In particolare $g \in L^2$ e quindi $g(x) < +\infty$ per quasi ogni x.

Se ne deduce che per quasi ogni x la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_k}(x))$$

converge assolutamente. D'altra parte, si vede subito che la somma parziale K-esima di questa "serie telescopica" non è altro che $u_{n_{K+1}}(x) - u_{n_1}(x)$: abbiamo così dimostrato che la successione di funzioni $u_{n_k}(x)$ *converge puntualmente* ad un numero reale $u(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$.

Applichiamo ora il teorema della convergenza dominata alla successione di funzioni $(u_{n_k}(x))^2$: essa tende puntualmente quasi ovunque alla funzione $(u(x))^2$, e la convergenza è dominata dalla funzione sommabile $(u_{n_1}(x) + g(x))^2$. Allora $u(x) \in L^2(2\pi)$ e riapplicando il teorema della convergenza dominata alla successione $(u_{n_k}(x) - u(x))^2$ si ottiene che

$$\|u_{n_k} - u\|_{L^2} \to 0.$$

Quest'ultima proprietà vale in realtà per *tutta la successione* $\{u_n\}$ e non solo per la sottosuccessione u_{n_k}: fissiamo infatti $\varepsilon > 0$. Per definizione di successione di Cauchy troviamo $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\|u_n - u_m\|_{L^2} < \varepsilon$ per ogni $m, n \geq \nu$. Troviamo poi $K \in \mathbf{N}$ tale che $\{u_{n_k} - u\|_{L^2} < \varepsilon$ per ogni $k \geq K$.

Sia poi $n \geq \nu$, e scegliamo $k \geq K$ in modo tale che $n_k \geq \nu$: allora

$$\|u_n - u\|_{L^2} \leq \|u_n - u_{n_k}\|_{L^2} + \|u_{n_k} - u\|_{L^2} < 2\varepsilon.$$

Q.E.D.

8 Lezione del 16/1/2019 (2 ore)

Il teorema dimostrato la volta scorsa ha un'interessante e forse "imprevisto" corollario:

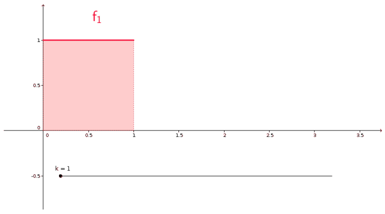
COROLLARIO: Siano $\{u_n\} \subset L^2$, $u \in L^2$ tali che $\|u_n - u\|_{L^2} \to 0$. Allora esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che $u_{n_k}(x) \to u(x)$ per quasi ogni $x \in (a, b)$.

DIM.: La successione $\{u_n\}$ è evidentemente di Cauchy in L^2 (le successioni convergenti sono di Cauchy). La dimostrazione del teorema di Riesz-Fischer ci permette di costruire una sottosuccessione che converge puntualmente quasi ovunque ed in L^2 ad una qualche funzione $v \in L^2$. Siccome per ipotesi la stessa sottosuccessione converge in L^2 *anche* a u, deve essere $u(x) = v(x)$ per quasi ogni x (unicità del limite negli spazi metrici). Q.E.D.

OSSERVAZIONE: In generale la convergenza in L^2 *non* implica la convergenza puntuale quasi ovunque dell'*intera successione*: diamo un esempio di una successione $\{u_k\}$ che converge a 0 in $L^2([0,1])$, ma che non converge a 0 in nessun punto dell'intervallo $[0,1]$. Si tratta di una successione di funzioni caratteristiche di intervalli sempre più piccoli, che "girano" in tutte le possibili posizioni entro l'intervallo $[0,1]$. Più precisamente, per $i \in [2^k, 2^{k+1} - 1] \cap \mathbf{N}$ definiamo

$$u_i(x) = \mathbf{1}_{[0,2^{-k}]}\left(x - \frac{i - 2^k}{2^k}\right).$$

Ecco un'animazione della successione:



Le funzioni in $L^2([a,b])$ possono essere approssimate in norma da funzioni continue:

TEOREMA: Sia $u \in L^2([a,b])$. *Allora esiste una successione* $\{u_n\}_n \subset C^0([a,b])$ *tale che* $\|u_n - u\|_{L^2} \to 0$.

DIM.: Grazie al teorema di approssimazione di funzioni misurabili con funzioni semplici, è facile vedere che esiste una successione di funzioni semplici $\{s_n\}_n$ tali che $\|s_n - u\|_{L^2} \to 0$ (si scriva $u = u^+ - u^-$ e si applichi il teorema di approssimazione alla parte positiva ed alla parte negativa: la convergenza in L^2 segue dal teorema della convergenza dominata).

Possiamo allora supporre senza perdita di generalità che u sia una funzione semplice. Ora, una funzione semplice non è altro che una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili: non è restrittivo supporre che $u(x) = \mathbf{1}_A(x)$ con $A \subset [a,b]$ misurabile.

Per la regolarità della misura di Lebesgue, per ogni $n = 1,2,3,\ldots$ esiste un compatto $C_n \subset A$ tale che $m(A \setminus C_n) < \frac{1}{n}$, da cui $\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{C_n}\|_{L^2} \to 0$ per $n \to +\infty$: non è restrittivo supporre $u(x) = \mathbf{1}_C(x)$ con $C \subset [a,b]$ compatto.

Non ci resta che mostrare che $\mathbf{1}_C$ può essere approssimata in L^2 con una successione di funzioni continue: ad esempio possiamo definire

$$u_n(x) = \frac{1}{1 + n \text{ dist } (x, C)}.$$

Questa è una successione di funzioni continue a valori nell'intervallo $(0,1]$ che vale costantemente 1 in C e che tende puntualmente a 0 per $x \in [a,b] \setminus C$: per il teorema della convergenza dominata $\|u_n - \mathbf{1}_C\|_{L^2} \to 0$. Q.E.D.

DEFINIZIONE/OSSERVAZIONI (Prodotto scalare in L^2*, serie di Fourier):* La norma L^2 è indotta dal seguente *prodotto scalare*:

$$< f, g >_{L^2} = \int_a^b f(x)g(x)\, dx.$$

L'integrale definisce infatti una funzione bilineare $L^2 \times L^2 \to \mathbf{R}$ che è simmetrica e definita positiva. Inoltre $\|f\|_{L^2} =< f, f >^2_{L^2}$.

Consideriamo ora una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-periodica, misurabile e tale che $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Avete già visto con il prof. Orlandi che la somma parziale $N-esima$ della serie di Fourier di f è data da

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

ove

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

$S_N(x)$ ha un'interpretazione "geometrica": si tratta della *proiezione ortogonale* della funzione f sul sottospazio di dimensione $(2N+1)$

$$\mathcal{P}_N = \text{span}\,\{1, \cos nx, \sin nx : \ n = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Per verificarlo, basta osservare che $\{1, \cos nx, \sin nx : \ n = 1, 2, \ldots, N\}$ è una *base ortogonale* di $\mathcal{P}_N$ e fare un semplice conto!

In altre parole, S_N è l'elemento di $\mathcal{P}_N$ *più vicino* alla funzione f rispetto alla distanza L^2: si tratta della migliore approssimazione possibile di f con *polinomi trigonometrici* di grado N.

Siamo allora in grado di dimostrare il seguente

TEOREMA (di Fourier): Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$, $S_N(x)$ la somma parziale N-esima della serie di Fourier di f. Allora $\|S_N(x) - f(x)\|_L^2 \to 0$ per $N \to +\infty$: la serie di Fourier di f converge in media quadratica a f.

DIM.: Abbiamo visto che per ogni fissato N, $S_N(x)$ è il polinomio trigonometrico di grado N più vicino a f in media quadratica.

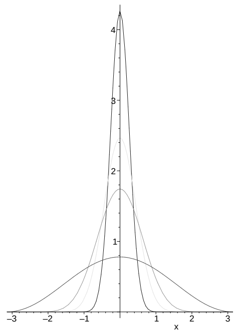
La tesi segue allora dal fatto che lo spazio vettoriale dei polinomi trigonometrici è *denso* in $L^2([-\pi, \pi])$: ogni funzione $f \in L^2$ può essere approssimata in media quadratica con una successione di polinomi trigonometrici.

Infatti, sappiamo dal teorema precedente che le funzioni continue sono dense in L^2. Inoltre, grazie al seguente teorema, ogni funzione continua in $[-\pi, \pi]$ può essere approssimata *uniformemente* (e quindi a maggior ragione in L^2) con una successione di polinomi trigonometrici. Q.E.D.

TEOREMA (Stone-Weierstrass trigonometrico): Sia $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua e 2π-periodica. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio trigonometrico $v(x)$ tale che $\|u - v\|_\infty < \varepsilon$.

DIM (solo accennata in classe): Per ogni numero naturale n, consideriamo i seguenti polinomi trigonometrici: $\phi_n(t) = c_n \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n$, dove la costante c_n è scelta in modo tale che $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(t)\, dt = 1$. Non è difficile verificare che queste funzioni sono effettivamente polinomi trigonometrici: usando le formule di Eulero si verifica infatti che il prodotto di due polinomi trigonometrici è sempre un polinomio trigonometrico.

Se disegnamo i grafici delle funzioni ϕ_n vediamo che si tratta di funzioni non negative che si "concentrano" attorno a 0:



Definiamo una successione di polinomi trigonometrici che converge uniformemente a u nel modo seguente:

$$u_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x+t)\phi_n(t)\ dt.$$

Queste funzioni sono ottenute facendo una spece di "media pesata" di u: verifichiamo che $u_n \to u$ uniformemente.

Prima di farlo, è però necessario mostrare che gli u_n sono effettivamente polinomi trigonometrici, cosa che non è affatto chiara dalla definizione... Per vederlo basta però cambiare variabile nell'integrale ponendo $s = x + t$: siccome tutte le funzioni coinvolte sono periodiche otteniamo

$$u_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} u(s)\phi_n(s-x)\ ds.$$

Le ϕ_n sono polinomi trigonometrici, per cui grazie alle formule di addizione ed alla linearià dell'integrale si verifica subito l'asserto!

Ci serve ora una stima delle costanti c_n che compaiono nella definizione di f ϕ_n: abbiamo

$$\frac{1}{c_n} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n\ dt \geq \int_{-1/\sqrt{n}}^{1/\sqrt{n}} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n \geq \frac{2}{\sqrt{n}} \left(\frac{1+\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})}{2}\right)^n.$$

La quantità tra parentesi nell'ultima espressione converge a $e^{-1/4}$, da cui $c_n \leq k\sqrt{n}$ per n abbastanza grande, con k costante positiva opportuna.

Siccome le funzioni ϕ_n sono non negative e con integrale 1, otteniamo

$$(*) |u_n(x) - u(x)| = |\int_{-\pi}^{\pi} (u(x+t) - u(x))\phi_n(t)\ dt| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |u(x+t) - u(x)|\phi_n(t)\ dt.$$

Sia M un maggiorante per $|u|$: ricordando che u è uniformemente continua,per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo $\delta > 0$ tale che $|x-y| < \delta$ implica $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$.

Spezziamo l'integrale di destra in (*) sugli insiemi $[-\delta, \delta]$ e $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. Per la nostra scelta di δ abbiamo

$$\int_{-\delta}^{\delta} |u(x+t) - u(x)|\phi_n(t)\ dt \leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \phi_n(t)\ dt < \varepsilon.$$

D'altra parte

$$\int_{\delta}^{\pi} |u(x+t) - u(x)|\phi_n(t)\ dt \leq 2Mc_n \int_{\delta}^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n\ dt \leq$$
$$2Mk\pi\sqrt{n}\left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^n,$$

e l'ultima espressione tende a 0 per $n \to +\infty$ uniformemente in x (perché è indipendente da x!). L'integrale su $[-\pi, -\delta]$ si stima allo stesso modo: per n abbastanza grande abbiamo allora $|u_n(x) - u(x)| < 2\varepsilon$ per ogni x. Q.E.D.

Concludiamo il corso con un importantissimo teorema, che migliora di gran lunga il teorema di riduzione degli integrali doppi che abbiamo visto per l'integrale di Riemann:

TEOREMA (di Fubini e Tonelli): Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \overline{\mathbf{R}}$ una funzione misurabile. Allora

(i) Se $f \geq 0$, allora per quasi ogni $y \in \mathbf{R}$ la funzione $x \mapsto f(x,y)$ è misurabile sulla retta reale. Inoltre, la funzione $y \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\ dx$ è misurabile e si ha

$$(*) \quad \int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\ dx\ dy = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\ dx \right)\ dy.$$

Ovviamente, le stesse cose valgono anche scambiando il ruolo di x e y.

(ii) Se f è di segno qualunque e $\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x,y)|\ dx \right)\ dy < +\infty$, allora f è sommabile. La stessa cosa vale anche scambiando l'ordine di integrazione.

(iii) Se f è di segno qualunque e sommabile, continua a valere l'enunciato del punto (i).

La dimostrazione è un po' complicata, per cui la ometteremo.