Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 29/11/2013

Tipologia A

1.1 Si enunci il teorema dei carabinieri e se ne dia un esempio di applicazione.

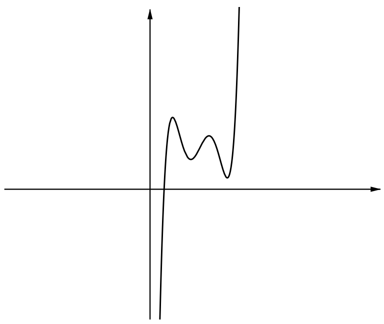
1.2 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata continua, la cui derivata si annulla solo in un punto $x_0 \in \mathbf{R}$. Possiamo dedurne che

- ☐ f ha un unico punto di massimo o minimo relativo, che non è di massimo o minimo assoluto;
- ☐ f è strettamente crescente;
- ☐ f ha un unico punto di massimo o minimo relativo, che è anche massimo o minimo assoluto;
- ☒ nessuna delle risposte precedenti è necessariamente vera;

1.3 Il limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

- ☐ vale $1/2$;
- ☐ non esiste;
- ☐ vale e;
- ☒ vale 0;

1.4 La seguente figura mostra la derivata prima di una certa funzione f:



Possiamo dedurne che la funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☐ è ovunque positiva;
- ☒ ha esattamente 4 flessi;
- ☐ ha esattamente 4 punti di massimo o minimo relativo;
- ☐ ha esattamente 1 flesso;

1.5 Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} : \; x^2 - 5x + 6 \geq 0, \; x \in \mathbf{Q}\}$. Allora

- ☐ $\sup A = 3$ e si tratta di un massimo;
- ☒ $\sup A = +\infty$;
- ☐ $\sup A = 3$, ma non si tratta di un massimo;
- ☐ $\inf A = 2$, ma non si tratta di un minimo;

1.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^3 \sin 2x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{2e^{2\log x} + x^3 + \sin x}{\sqrt{x^6+1}}.$$

1.7 Si studi la funzione

$$f(x) = \sin x \log(|\sin x|)$$

e si tracci un grafico che ne rappresenti l'andamento. Non è richiesto lo studio della convessità e concavità.

1.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si trovino i punti di continuità e di derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \textit{se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \\ x^2 & \textit{se } x \in \mathbf{Q}. \end{cases}$$

ATTENZIONE: Tempo a disposizione 2 ore. Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

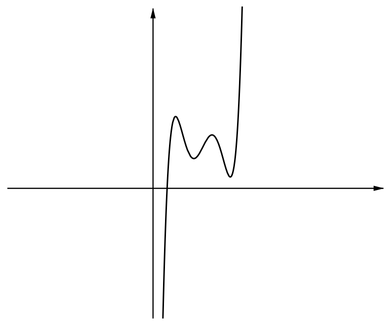
Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 29/11/2013

Tipologia B

2.1 La seguente figura mostra la derivata seconda di una certa funzione f:



Possiamo dedurne che la funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☐ ha esattamente 4 punti di massimo o minimo relativo;
- ☒ ha esattamente 1 flesso;
- ☐ ha esattamente 4 flessi;
- ☐ è ovunque positiva;

2.2 Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} : \; x^2 - 5x + 6 \leq 0, \; x \in \mathbf{Q}\}$. Allora

- ☐ $\inf A = 2$, ma non si tratta di un minimo;
- ☐ $\sup A = 3$, ma non si tratta di un massimo;
- ☐ $\sup A = +\infty$;
- ☒ $\sup A = 3$ e si tratta di un massimo;

2.3 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^3 \sin 3x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{2e^{\frac{3}{2}\log x} + x^3 + \sin x}{\sqrt{x^6+1}}.$$

2.4 Si studi la funzione

$$f(x) = |\sin x| \log(\sin x)$$

e si tracci un grafico che ne rappresenti l'andamento. Non è richiesto lo studio della convessità e concavità.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 29/11/2013
Tipologia C

3.1 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^3 \sin 4x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{2e^{3\log x} + x^3 + \sin x}{\sqrt{x^6+1}}.$$

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 29/11/2013
Tipologia D

4.1 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^3 \sin 5x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{2e^{4\log x} + x^3 + \sin x}{\sqrt{x^6+1}}.$$

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Del resto, i testi che precedono riportano solo gli esercizi dei compiti di tipologia B, C, D che differiscono *in qualcosa* da quelli delle versioni precedenti: ad esempio, la funzione da studiare nel compito di tipologia C coincideva con quella del compito di tipologia A, come le funzioni dei compiti di tipologia B e D...

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Cominciamo col primo limite: lo calcoliamo usando la regola di l'Hôpital, ma osserviamo che i conti sarebbero ancora più semplici usando i polinomi di Taylor!

Innanzitutto, usando il limite fondamentale $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, osserviamo che il limite richiesto è uguale a

$$\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}.$$

Calcoliamo quest'ultimo usando la regola di l'Hôpital: otteniamo

$$\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x - x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{12x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{6x^2} = -\frac{1}{6}.$$

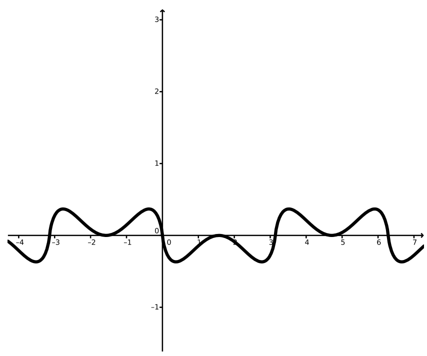
Nelle altre versioni del compito il limite si calcola allo stesso modo: cambia solo il valore numerico.

Per calcolare il secondo limite, si osservi che $e^{2\log x} = x^2$. Dividendo numeratore e denominatore per x^3 si vede subito che il limite richiesto vale 1.

Anche in questo caso, nelle altre versioni del compito il procedimento era lo stesso... con un risultato anche drammaticamente diverso!

7 La funzione data è definita per $x \neq k\pi$ ed è 2π-periodica e dispari: la studieremo perciò nell'intervallo $(0, \pi)$ dove possiamo togliere il modulo perché il seno è positivo. Volendo, si può osservare che vi è un'ulteriore simmetria rispetto alla retta $x = \pi/2$.

Notiamo innanzitutto che la funzione tende a 0 per $x \to 0^+$ e per $x \to \pi^-$: essa è dunque prolungabile per continuità. Nell'intervallo $(0, \pi)$, inoltre, essa è ≤ 0 e si annulla solo per $x = \pi/2$. Abbiamo poi $f'(x) = \cos x(\log \sin x + 1)$, che si annulla in $\pi/2$, in $\arcsin(e^{-1})$ e in $\pi - \arcsin(e^{-1})$. Il primo è un punto di massimo, gli altri due di minimo. Inoltre, la derivata tende rispettivamente a $-\infty$ e a $+\infty$ agli estremi dell'intervallo considerato. Il grafico della funzione è quindi il seguente:



Nei compiti di tipologia B e D, la funzione differisce solo perché ha un dominio più ristretto in quanto è definita solo sugli intervalli del tipo $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. Sul suo dominio, coincide con la funzione studiata sopra!

8 La funzione è definita in modo diverso sui razionali e sugli irrazionali. Siccome razionali e irrazionali sono densi in $\mathbf{R}$, si vede subito che i punti di continuità sono lo 0 (entrambe le funzioni tendono a 0 per $x \to 0$) e tutti i punti del tipo $x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$. In tutti gli altri punti la funzione è discontinua (perché il limite della restrizione ai razionali e quello della restrizione agli irrazionali sono diversi!).

Calcolando il limite del rapporto incrementale, si vede facilmente che in tutti i punti di continuità la funzione è anche derivabile!

La figura seguente mostra il comportamento della nostra funzione: