Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVETTA DI ANALISI MATEMATICA 1 - 3/2/2010

ESERCIZI DI RECUPERO DELLA PRIMA PROVETTA

REGOLE: *Le soluzioni degli esercizi di recupero devono essere consegnate SEPARATAMENTE da quelle degli esercizi relativi alla seconda parta del corso, su fogli completi di nome e numero di matricola. La prima provetta si considera annullata, qualunque ne sia stato l'esito, per chi consegna le soluzioni degli esercizi di recupero.*

RECUPERO.1 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\log x}(\sqrt{x+\log x} - \sqrt{x-\log x}).$$

RECUPERO.2 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x^2}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\log(1+x)}}.$$

RECUPERO.3 Si consideri la funzione reale di variabile reale $f(x) = (x-\sqrt{x^2})\log(x^2)$.

1. Si studi $f(x)$ e se ne tracci un grafico il più dettagliato possibile.
2. Si dica, in particolare, se f è prolungabile ad una funzione continua e/o derivabile in $x = 0$.
3. Si trovino, se esistono, il massimo ed il minimo assoluto di f sulla semiretta $[-1, +\infty)$.

Soluzioni:

RECUPERO.1 Per calcolare il limite, si moltiplichi e si divida per $\sqrt{x+\log x}+\sqrt{x-\log x}$ e si semplifichi poi $\sqrt{x}$: il limite richiesto diventa

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{\log x}{x}}+\sqrt{1-\frac{\log x}{x}}} = 1.$$

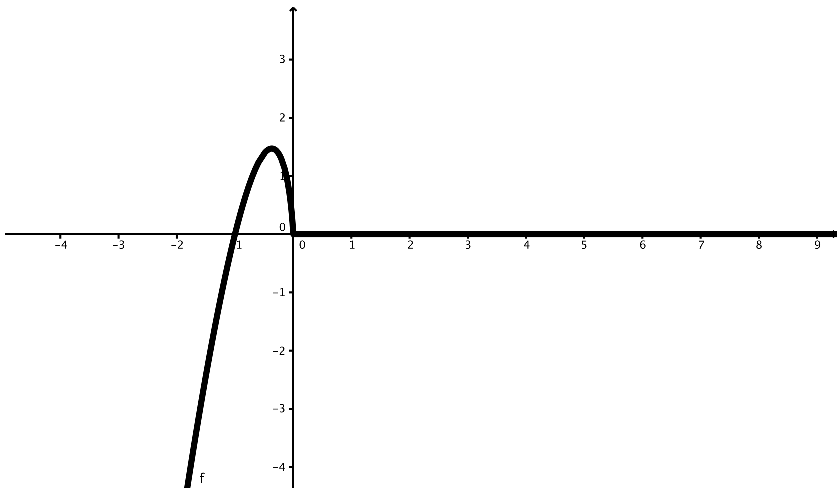
RECUPERO.2 La funzione di cui vogliamo calcolare il limite può essere riscritta come $e^{f(x)}$, ove $f(x) = \frac{\log(1+\frac{x^2}{\sin x})}{\log(1+x)}$. Ricordando i limiti fondamentali $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, si vede facilmente che $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Il limite richiesto vale allora $e^1 = e$.

RECUPERO.3 La funzione data è definita per ogni $x \neq 0$. Dato che $\sqrt{x^2} = |x|$, la funzione data si annulla identicamente per $x > 0$, mentre per $x < 0$ si ha $f(x) = 4x\log(-x)$: limitiamoci a studiare questa funzione (ovviamente per x negativo).

La nostra funzione tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, a 0 per $x \to 0^-$: in particolare, la funzione è estendibile ad una funzione continua in $x = 0$ (ponendola uguale a 0).

È poi positiva per $-1 < x < 0$, negativa per $x < -1$. Si ha poi $f'(x) = 4(\log(-x)+1)$, da cui si deduce subito che c'è un unico punto di massimo relativo in $x = -1/e$, di valore $4/e$. Si ha poi $f''(x) = 4/x$, per cui la nostra funzione è concava sulla semiretta dei reali negativi. Si noti infine che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty$, per cui la funzione estesa a $x = 0$ non è derivabile in 0.

Le informazioni raccolte permettono di disegnare il grafico di f:



Il massimo ed il minimo nella semiretta $[-1, +\infty)$ sono rispettivamente $4/e$ e 0.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 3/2/2010

Tipologia A

1.1 Si enunci il criterio della convergenza assoluta per gli integrali impropri. Si precisi, in particolare, se si tratta di condizione necessaria,sufficiente oppure necessaria e sufficiente.

1.2 Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $\int_c^d f(x)\,dx = 0$ per ogni c, d con $a \leq c < d \leq b$. Allora

☐ $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$;

☐ f si annulla in almeno un punto, ma di sicuro non è identicamente nulla;

☐ $f(x)$ si annulla in almeno un punto, ma potrebbe non annullarsi identicamente;

☒ $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$;

1.3 Sia $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ la funzione *segno di x* (che vale 1 per $x > 0$, -1 per $x < 0$ e 0 per $x = 0$). Sia poi $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Allora

☐ $F(x) = x$;

☐ $F(x)$ non esiste perché f non è integrabile;

☐ $F(x) = -x - 1$ per $x < 0$, $F(x) = x + 1$ per $x > 0$;

☒ $F(x) = |x|$;

1.4 Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ successioni a termini di segno qualunque con $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$. Allora certamente

☐ se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, converge anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$;

☐ se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, diverge anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$;

☐ le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hanno comportamento diverso;

☒ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se e soltanto se converge assolutamente $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$;

1.5 Se per $x \to 0$ abbiamo che $f(x) = o(x^2)$, $g(x) = x^3 + o(x^3)$ possiamo dire con certezza che

- $\square$ $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 1$;
- $\square$ $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = \infty$;
- $\square$ $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$;
- $\boxtimes$ nessuna delle risposte precedenti;

1.6 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \sin x - \cos x + 1}{\log(1+2x^3)}.$$

1.7 Si calcoli una primitiva di $f(x) = e^{-x}\log(1+e^x)$ e si discuta la convergenza dell'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$. Che dire poi della convergenza di

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\log(1+e^{e^x})\, dx?$$

1.8 Si studi, al variare del parametro x, la convergenza di almeno una delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)!} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nx}(2 + \sin nx).$$

[*Può essere utile ricordare la formula di Stirling* $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.]

1.9(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\sin x)\ \sin nx\, dx = 0.$$

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 3/2/2010
Tipologia B

2.1 Si enunci il criterio della convergenza assoluta per gli integrali impropri. Si precisi, in particolare, se si tratta di condizione necessaria,sufficiente oppure necessaria e sufficiente.

2.2 Se per $x \to 0$ abbiamo che $f(x) = o(x^2)$, $g(x) = x^3 + o(x^3)$ possiamo dire con certezza che

- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$;
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 1$;
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = \infty$;
- ☒ nessuna delle risposte precedenti;

2.3 Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ successioni a termini di segno qualunque con $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$. Allora certamente

- ☒ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se e soltanto se converge assolutamente $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$;
- ☐ le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hanno comportamento diverso;
- ☐ se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, diverge anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$;
- ☐ se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, converge anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$;

2.4 Sia $f(x) = \text{sgn}(x)$ la funzione *segno di x* (che vale 1 per $x > 0$, -1 per $x < 0$ e 0 per $x = 0$). Sia poi $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Allora

- ☐ $F(x) = -x - 1$ per $x < 0$, $F(x) = x + 1$ per $x > 0$;
- ☒ $F(x) = |x|$;
- ☐ $F(x)$ non esiste perché f non è integrabile;
- ☐ $F(x) = x$;

2.5 Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione integrabile tale che $\int_c^d f(x)\, dx = 0$ per ogni c, d con $a \le c < d \le b$. Allora

- ☒ $f(x)$ si annulla in almeno un punto, ma potrebbe non annullarsi identicamente;
- ☐ $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$;
- ☐ f si annulla in almeno un punto, ma di sicuro non è identicamente nulla;
- ☐ $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$;

2.6 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - \sin x - \cos x + 1}{\log(1+3x^3)}.$$

2.7 Si calcoli una primitiva di $f(x) = e^{-x} \log(1 + e^x)$ e si discuta la convergenza dell'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$. Che dire poi della convergenza di

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} \log(1 + e^{e^x})\, dx?$$

2.8 Si studi, al variare del parametro x, la convergenza di almeno una delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)!} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nx}(2 + \sin nx).$$

[*Può essere utile ricordare la formula di Stirling* $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.]

2.9(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si mostri che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\sin x)\ \sin nx\, dx = 0.$$

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 3/2/2010

Tipologia C

3.1 Si enunci il criterio della convergenza assoluta per gli integrali impropri. Si precisi, in particolare, se si tratta di condizione necessaria,sufficiente oppure necessaria e sufficiente.

3.2 Se per $x \to 0$ abbiamo che $f(x) = o(x^2)$, $g(x) = x^3 + o(x^3)$ possiamo dire con certezza che

- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 1$;
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$;
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = \infty$;
- ☒ nessuna delle risposte precedenti;

3.3 Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ successioni a termini di segno qualunque con $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$. Allora certamente

- ☐ se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, converge anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$;
- ☒ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se e soltanto se converge assolutamente $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$;
- ☐ le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hanno comportamento diverso;
- ☐ se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, diverge anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$;

3.4 Sia $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ la funzione *segno di* x (che vale 1 per $x > 0$, -1 per $x < 0$ e 0 per $x = 0$). Sia poi $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Allora

- ☐ $F(x) = -x - 1$ per $x < 0$, $F(x) = x + 1$ per $x > 0$;
- ☐ $F(x)$ non esiste perché f non è integrabile;
- ☐ $F(x) = x$;
- ☒ $F(x) = |x|$;

3.5 Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $\int_c^d f(x)\,dx = 0$ per ogni c, d con $a \leq c < d \leq b$. Allora

- ☒ $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$;
- ☐ f si annulla in almeno un punto, ma di sicuro non è identicamente nulla;
- ☐ $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$;
- ☐ $f(x)$ si annulla in almeno un punto, ma potrebbe non annullarsi identicamente;

3.6 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \sin x - \cos x + 1}{\log(1 + \frac{1}{2}x^3)}.$$

3.7 Si calcoli una primitiva di $f(x) = e^{-x}\log(1+e^x)$ e si discuta la convergenza dell'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Che dire poi della convergenza di

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\log(1+e^{e^x})\,dx?$$

3.8 Si studi, al variare del parametro x, la convergenza di almeno una delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}e^{-nx}(2+\sin nx).$$

[*Può essere utile ricordare la formula di Stirling* $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.]

3.9(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\sin x)\ \sin nx\,dx = 0.$$

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 3/2/2010

Tipologia D

4.1 Si enunci il criterio della convergenza assoluta per gli integrali impropri. Si precisi, in particolare, se si tratta di condizione necessaria,sufficiente oppure necessaria e sufficiente.

4.2 Se per $x \to 0$ abbiamo che $f(x) = o(x^2)$, $g(x) = x^3 + o(x^3)$ possiamo dire con certezza che

- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 1$;
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = \infty$;
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$;
- ☒ nessuna delle risposte precedenti;

4.3 Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ successioni a termini di segno qualunque con $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$. Allora certamente

- ☐ le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hanno comportamento diverso;
- ☐ se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, converge anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$;
- ☒ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se e soltanto se converge assolutamente $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$;
- ☐ se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, diverge anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$;

4.4 Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione integrabile tale che $\int_c^d f(x)\, dx = 0$ per ogni c, d con $a \le c < d \le b$. Allora

- ☒ $f(x)$ si annulla in almeno un punto, ma potrebbe non annullarsi identicamente;
- ☐ f si annulla in almeno un punto, ma di sicuro non è identicamente nulla;
- ☐ $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$;
- ☐ $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$;

4.5 Sia $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ la funzione *segno di* x (che vale 1 per $x > 0$, -1 per $x < 0$ e 0 per $x = 0$). Sia poi $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Allora

- $\square$ $F(x)$ non esiste perché f non è integrabile;
- $\square$ $F(x) = -x - 1$ per $x < 0$, $F(x) = x + 1$ per $x > 0$;
- $\square$ $F(x) = x$;
- $\boxtimes$ $F(x) = |x|$;

4.6 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \sin x - \cos x + 1}{\log(1+x^3)}.$$

4.7 Si calcoli una primitiva di $f(x) = e^{-x}\log(1+e^x)$ e si discuta la convergenza dell'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$. Che dire poi della convergenza di

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\log(1+e^{e^x})\, dx?$$

4.8 Si studi, al variare del parametro x, la convergenza di almeno una delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)!} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nx}(2 + \sin nx).$$

[*Può essere utile ricordare la formula di Stirling* $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.]

4.9(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\sin x)\ \sin nx\, dx = 0.$$

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Utilizzando gli sviluppi di Taylor noti, si vede subito che il numeratore dell'espressione è $x^3/2+o(x^3)$, mentre il denominatore è $2x^3+o(x^3)$. Il limite richiesto vale dunque $1/4$. Nelle altre versioni del compito, cambiava per un fattore numerico solo il (semplice) sviluppo di Taylor del denominatore.

7 La primitiva richiesta si calcola facilmente tramite un'integrazione per parti, osservando poi che

$$\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Si ricava quindi

$$\int e^{-x}\log(1+e^x)\,dx = -e^{-x}\log(1+e^x)+x-\log(1+e^x)+C = -e^{-x}\log(1+e^x)+\log(\frac{e^x}{1+e^x})+C.$$

Usando questa primitiva, si vede subito che l'integrale improprio di f tra 1 e $+\infty$ converge. Allo stesso risultato si arriva osservando che l'integranda è asintoticamente equivalente a xe^{-x} per $x \to +\infty$: che l'integrale improprio di quest'ultima funzione sia convergente si vede, ad esempio, maggiorando con $e^{-x/2}$ (per x grande).

Infine, l'ultimo integrale diverge a $+\infty$: l'integranda tende a 1 per $x \to +\infty$.

8 La prima serie è una serie di potenze. Con il criterio del rapporto si deduce subito che il raggio di convergenza è $1/e$. Per $x = 1/e$, si può usare la formula di Stirling come da suggerimento: il termine generale della serie è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{(2\pi)^{1/2}(n+1)^{3/2}}$, che è il termine generale di una serie convergente (serie armonica generalizzata). Anche per $x = -1/e$ si ha quindi convergenza assoluta: l'insieme di convergenza della prima serie è $[-1/e, 1/e]$.

La seconda serie non è di potenze! Visto che il fattore $(2 + \sin nx)$ è compreso tra 1 e 3, si intuisce che il comportamento della serie sarà dettato da $\frac{1}{n}e^{-nx}$. In effetti, se $x < 0$ il termine generale della serie tende a $+\infty$ e la serie non converge. Per $x = 0$, il termine generale della serie è maggiore o uguale a $1/n$ e la serie diverge (per confronto con la serie armonica). Infine, per $x > 0$ il termine generale della serie si maggiora con $3(e^{-x})^n$: la serie converge. In conclusione, la serie data converge per $x > 0$.

9 Integrando per parti (e osservando che $\sin(\sin(x))$ si annulla agli estremi dell'intervallo dato) si vede subito che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\sin(x))\sin nx\,dx = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(\sin(x))\cos(x)\,dx.$$

L'integranda a secondo membro si maggiora in modulo con 1, per cui il modulo del secondo membro è minore o uguale di $\frac{2\pi}{n}$... e tende a 0.