

Diario del Corso di Analisi Matematica II - Mod. 2

Corso di Laurea: Matematica Applicata

Docente: Sisto Baldo

ATTENZIONE: Il presente Diario del Corso vuole essere un riassunto abbastanza dettagliato di quello che è stato detto in aula, e come tale può essere un utile sussidio per chi voglia sistemare i propri appunti, o per chi sia stato assente e voglia ricostruire i contenuti di una lezione. D'altra parte, queste brevi paginette NON possono sostituire completamente un libro di testo, la lezione in aula o un'interazione diretta con il docente o l'esercitatore: siete quindi invitati a servirvi ANCHE di queste altre opportunità per approfondire le vostre conoscenze!

Indice

1 Lezione del 2/12/2009 (2 ore)	4
<i>Teorema di Cauchy-Lipschitz: esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy.</i>	
2 Lezione del 4/12/2009 (2 ore)	7
<i>Prolungabilità delle soluzioni locali e soluzioni massimali. Un risultato di esistenza globale.</i>	
3 Lezione del 9/12/2009 (2 ore)	10
<i>Teorema di Ascoli-Arzelà. Teorema di Peano (e metodo di Eulero esplicito).</i>	
4 Lezione del 11/12/2009 (2 ore)	14
<i>Conclusione del teorema di Peano. Teorema del confronto. Lemma di Gronwall. Dipendenza continua dai dati.</i>	
5 Lezione del 14/12/2009 (2 ore)	18
<i>Teorema di dipendenza continua dai dati. Equazioni lineari: struttura di spazio affine dell'insieme delle soluzioni.</i>	
6 Lezione del 16/12/2009 (2 ore)	22
<i>Metodo della variazione delle costanti. Equazioni lineari a coefficienti costanti.</i>	
7 Lezione del 18/12/2009 (2 ore)	26
<i>Equazioni lineari a coefficienti costanti. Metodo alternativo per trovare soluzioni particolari di un'equazione lineare completa. Sistemi lineari a coefficienti costanti ed esponenziale di matrici.</i>	
8 Lezione del 8/1/2010 (2 ore)	30
<i>Qualche proprietà dell'esponenziale di matrici. Forma canonica di Jordan e calcolo dell'esponenziale di una matrice.</i>	
9 Lezione del 11/1/2010 (2 ore)	34
<i>Serie di Fourier di una funzione periodica.</i>	
10 Lezione del 13/1/2010 (2 ore)	39
<i>Convergenza delle serie di Fourier.</i>	
11 Lezione del 15/1/2010 (2 ore)	45
<i>Convergenza uniforme ed in L^2 delle serie di Fourier.</i>	

12 Lezione del 18/1/2010 (2 ore)

48

Soluzione dell'equazione del calore e dell'equazione delle onde con il metodo della separazione delle variabili.

1 Lezione del 2/12/2009 (2 ore)

In questa parte del corso, vogliamo studiare meglio la teoria delle equazioni differenziali ordinarie, già incontrata al primo anno. Vogliamo cominciare con un teorema che assicura, sotto certe condizioni, che la soluzione del problema di Cauchy *esiste localmente* ed è *unica*.

Consideriamo dunque il problema di Cauchy del primo ordine

$$(*) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove f è una data funzione continua di due variabili definita in un intorno di (t_0, x_0) .

Supponiamo di avere una soluzione $x(t)$ del problema: integriamo ambo i membri dell'equazione tra t_0 e t , tenendo conto della condizione iniziale. Otteniamo allora l'identità

$$(**) x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

valida per tutti i t in cui è definita la soluzione.

Vale anche il viceversa:

PROPOSIZIONE: Sia $x \in C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ una funzione per cui vale l'identità integrale (**). Allora $x(t)$ è derivabile, ed è una soluzione del problema di Cauchy (*) nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

DIM.: Sostituendo $t = t_0$ in (**) si ottiene la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$. Inoltre, a secondo membro abbiamo l'integrale tra t_0 e t di una funzione continua: per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, la derivata di questa quantità è $f(t, x(t))$, e quindi $x(t)$ è derivabile e soddisfa l'equazione differenziale (*). Q.E.D.

Siamo finalmente in grado di dimostrare un Teorema di esistenza e unicità locale per il nostro problema di Cauchy:

TEOREMA: Sia $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - R, x_0 + R] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua soddisfacente alla seguente condizione di Lipschitz: esiste $L > 0$ tale che

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall t \in [t_0 - a, t_0 + a], \forall x_1, x_2 \in [x_0 - R, x_0 + R].$$

Allora è possibile trovare un $\delta \in (0, a]$, tale che nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ esiste una soluzione del problema di Cauchy (*). Inoltre tale soluzione è

unica, nel senso che due soluzioni di (*) definite in uno stesso intorno di t_0 coincidono.

DIM.: Grazie alla Proposizione, basta in realtà cercare soluzioni continue dell'equazione integrale (**).

Per il teorema di Weierstrass, la funzione continua $|f(x, t)|$ ammette massimo sul rettangolo $[t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - R, x_0 + R]$: chiamiamo M tale massimo. Scegliamo poi

$$\delta = \min\left\{a, \frac{1}{2L}, \frac{R}{M}\right\}.$$

Definiamo un'applicazione T che ad ogni elemento dell'insieme di funzioni

$$X = \left\{x \in \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta]) : x(t) \in [x_0 - R, x_0 + R] \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]\right\}$$

ne associa un'altra che chiamiamo $T(x)$:

$$(T(x))(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Chiaramente, per ogni $x \in X$ la funzione $T(x)$ è continua (ed anzi derivabile). Verifichiamo che, in realtà, $T : X \rightarrow X$ ed è una *contrazione*.

Intanto, se $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ abbiamo

$$|(T(x))(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \right| \leq M \cdot \delta \leq R$$

grazie alla condizione di Lipschitz. Dunque $(T(x))(t) \in [x_0 - R, x_0 + R]$, e effettivamente $T : X \rightarrow X$.

Inoltre, se $x_1(t), x_2(t) \in X$:

$$\begin{aligned} |(T(x_1))(t) - (T(x_2))(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| ds \right| \leq \\ &\left| \int_{t_0}^t L|x_1(s) - x_2(s)| ds \right| \leq L \cdot \delta \|x_1 - x_2\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Passando al sup per $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ abbiamo allora

$$\|T(x_1) - T(x_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_\infty,$$

e T è una contrazione di X in X .

L'insieme di funzioni X , dotato della metrica uniforme, è evidentemente un sottospazio chiuso di $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$: X è dunque uno *spazio metrico completo*.

Allora, grazie al teorema delle contrazioni, T ha un unico punto fisso: esso è evidentemente l'unica soluzione dell'equazione integrale (**), e quindi del problema di Cauchy (**). Q.E.D.

La dipendenza di δ dalla costante di Lipschitz L può essere facilmente eliminata: mostriamo che l'(unica) soluzione locale esiste su $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ con $\delta = \min\{a, R/M\}$.

A questo scopo, dimostriamo il seguente, immediato corollario del teorema delle contrazioni:

PROPOSIZIONE: Sia X uno spazio metrico completo, $T : X \rightarrow X$ una funzione per la quale esiste $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$ tale che $T^{(k)}$ (iterata k volte di T^1) è una contrazione. Allora T ha un unico punto fisso in X .

DIM.: Il teorema delle contrazioni ci assicura che $T^{(k)}$ ha un unico punto fisso \bar{x} . Ma allora anche $T(\bar{x})$ è un punto fisso di $T^{(k)}$: $T^{(k)}(T(\bar{x})) = T(T^{(k)}(\bar{x})) = T(\bar{x})$. Ma allora $T(\bar{x}) = \bar{x}$, grazie all'unicità del punto fisso di $T^{(k)}$: anche T possiede un punto fisso! Tale punto fisso è poi unico, perché ogni punto fisso di T è tale anche per $T^{(k)}$. Q.E.D.

COROLLARIO: Con le notazioni della dimostrazione del Teorema di Cauchy-Lipschitz, la soluzione (unica) del problema di Cauchy esiste anche scegliendo $\delta = \min\{a, R/M\}$.

DIM.: La condizione su δ è sufficiente a garantire che $T : X \rightarrow X$. Se mostriamo che esiste un'iterata di T che è una contrazione, possiamo applicare la proposizione appena dimostrata e concludere che esiste un unico punto fisso.

A questo scopo, proviamo per induzione che per ogni $x, y \in X$ si ha

$$|T^{(k)}(x)(t) - T^{(k)}(y)(t)| \leq \frac{L^k}{k!} |t - t_0|^k \|x - y\|_\infty.$$

Per $k = 1$ abbiamo già provato questa disuguaglianza dimostrando il teorema. Supponiamola vera per k . Allora, usando la definizione dell'operatore T e la lipschitzianità:

$$|T^{(k+1)}(x)(t) - T^{(k+1)}(y)(t)| \leq L \int_{t_0}^t |T^{(k)}(x)(s) - T^{(k)}(y)(s)| ds.$$

Usando allora l'ipotesi induttiva ed integrando si ottiene la tesi con $k + 1$ al posto di k .

¹ Cioè $T^{(k)} = T \circ T \circ \dots \circ T$ (k volte).

Passando al sup:

$$\|T^{(k)}(x) - T^{(k)}(y)\|_\infty \leq \frac{L^k}{k!} \delta^k \|x - y\|_\infty.$$

Siccome $(L\delta)^k/k! \rightarrow 0$, l'iterata è una contrazione per k abbastanza grande. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Si noti che, nel teorema di esistenza e unicità, in generale è lecito sperare soltanto nell'esistenza *locale*: per esempio, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t), \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

ha soluzione unica, che però è definita soltanto su una semiretta.

Analogamente, se rimuoviamo l'ipotesi di lipschitzianità in generale la soluzione non è più unica: il problema

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{|x(t)|}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni. Vedremo invece che l'*esistenza locale* è garantita nella sola ipotesi di continuità della funzione f .

2 Lezione del 4/12/2009 (2 ore)

Cominciamo la lezione con alcune semplici osservazioni sul risultato di esistenza e unicità locale visto la volta scorsa.

OSSERVAZIONE (Lipschitzianità delle funzioni regolari): Una condizione sufficiente per avere la lipschitzianità di f nella seconda variabile è la richiesta che sia $f_x \in \mathcal{C}^0([t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - R, x_0 + R])$. Sia infatti $L = \max\{|f_x(t, x)| : (t, x) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - R, x_0 + R]\}$. Dati $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ e $x, y \in [x_0 - R, x_0 + R]$ possiamo scrivere

$$|f(t, y) - f(t, x)| = \left| \int_x^y f_x(t, u) du \right| \leq L|y - x|.$$

Si vede facilmente che la costante L che abbiamo scelto è anche *la più piccola* per cui la disuguaglianza di Lipschitz è vera in tutto il rettangolo.

OSSERVAZIONE (Esistenza globale per f globalmente lipschitziana su una striscia): La versione migliorata del teorema ci garantisce che se f è definita sulla *striscia* $[t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbf{R}$ ed è lipschitziana in x uniformemente rispetto

a t , allora la soluzione è *globale*, nel senso che esiste sull'intero intervallo $[t_0 - a, t_0 + a]$. Infatti, la richiesta che $\delta \leq R/M$ è necessaria solo per evitare che $T(x)(t)$ esca dall'intervallo $[x_0 - R, x_0 + R]$: questa richiesta può essere tolta se la funzione è definita sulla striscia infinita.

L'ipotesi di lipschitzianità sull'intera striscia è però piuttosto forte (anche se è soddisfatta nel caso importantissimo delle equazioni - e dei sistemi - lineari): vedremo tra breve come indebolirla per avere un risultato di esistenza globale più generale.

OSSERVAZIONE (Prolungamento di soluzioni, soluzione massimale del problema di Cauchy): Sia data l'equazione differenziale $x'(t) = f(t, x(t))$, con f definita su un aperto $A \subset \mathbf{R}^2$ e soddisfacente le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz *localmente*, cioè in un intorno rettangolare di ogni punto di A . Questo garantisce l'esistenza di un'(unica) soluzione locale *per ogni* dato iniziale scelto in A .

Una semplice osservazione è allora che *due soluzioni locali dell'equazione che coincidono in un punto t_0 , devono coincidere nell'intersezione degli intervalli su cui sono definite*: supponiamo per assurdo che ci siano punti a destra di t_0 in cui le soluzioni differiscono, e sia t_* il loro estremo inferiore. Le due soluzioni devono coincidere in t_* (per continuità): il teorema di Cauchy-Lipschitz assicura che allora coincidono anche in un intorno destro di t_* (basta risolvere il problema di Cauchy con punto iniziale t_*), contro la definizione di inf. In modo analogo, le due soluzioni devono coincidere a sinistra di t_0 .

Questa osservazione permette allora di dedurre che tra tutte le soluzioni di un fissato problema di Cauchy, ve n'è una definita su un *intervallo massimale*: questo è semplicemente l'unione dei domini di tutte le soluzioni.

OSSERVAZIONE (Teorema di fuga dai compatti): Nelle stesse ipotesi dell'osservazione precedente, è possibile dimostrare che una soluzione massimale $u_* : I_* \rightarrow \mathbf{R}$ deve necessariamente *uscire da ogni sottinsieme compatto K di A* : possiamo esprimere informalmente questo fatto dicendo che una soluzione massimale *scappa verso il bordo dell'insieme A su cui è definito il secondo membro dell'equazione*, quando t tende agli estremi dell'intervallo in cui tale soluzione esiste.

OSSERVAZIONE (Esistenza e unicità per sistemi di equazioni del primo ordine): Il problema di Cauchy per un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (in forma normale) è formalmente identico a quello per un'equazione singola:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

se assumiamo che la funzione f e l'incognita x siano *vettoriali*:

$$\begin{aligned} f(t, x) &= (f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n)) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, \\ x(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{aligned}$$

Il teorema di Cauchy-Lipschitz vale allora, *con dimostrazione assolutamente identica*, anche per i sistemi!

Inoltre, anche in questo caso la lipschitzianità è implicata dalla continuità delle derivate parziali di f rispetto alle ultime n variabili: la dimostrazione è un semplice adattamento di quella che abbiamo visto nel caso scalare.

Vediamo subito un risultato di esistenza globale: anche in questo caso, lo enunciamo e dimostriamo per un'equazione scalare, ma il risultato vale (con identica dimostrazione) per i sistemi.

TEOREMA (di esistenza globale): Sia $f : [a, b] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua soddisfacente alla seguente condizione di Lipschitz locale: per ogni $R > 0$ esiste $L = L(R) > 0$ tale che

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x_1, x_2 \in [-R, R].$$

Supponiamo inoltre che f abbia crescita lineare nella variabile x : esistono due costanti $A, B > 0$ tali che

$$|f(t, x)| \leq A + B|x| \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Allora esiste un'(unica) soluzione del problema di Cauchy (*) (con $t_0 \in [a, b]$), definita sull'intero intervallo $[a, b]$.

DIM.: Abbiamo già dimostrato l'unicità della soluzione massimale: rimane solo da provare che essa è definita sull'intero intervallo!

Mostriamo l'esistenza della soluzione su $[t_0, b]$: procedendo allo stesso modo si prova che la soluzione esiste anche su $[a, t_0]$.

Cominciamo col mostrare che per ogni fissato $\bar{t} \in [a, b]$ e per ogni fissato $\bar{x} \in \mathbf{R}$, la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $x(\bar{t}) = \bar{x}$ è definita *almeno* sull'intervallo $[\bar{t}, \bar{t} + \delta]$ con

$$(*) \quad \delta = \min\left\{b - \bar{t}, \frac{1}{1 + B}\right\}.$$

Sappiamo infatti, dalla stima "migliorata" di δ nel teorema di Cauchy-Lipschitz, che se f soddisfa la condizione di Lipschitz su $[\bar{t}, b] \times [\bar{x} - R, \bar{x} + R]$,

allora la soluzione esiste su $[\bar{t}, \bar{t} + \delta]$ con $\delta = \min\{b - \bar{t}, R/M\}$ ove

$$M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in [\bar{t}, b] \times [\bar{x} - R, \bar{x} + R]\}.$$

Per ottenere (*) basta scegliere $R = A + B|\bar{x}|$: in tal caso, per ogni $(t, x) \in [\bar{t}, b] \times [\bar{x} - R, \bar{x} + R]$ abbiamo

$$|f(t, x)| \leq A + B|x| \leq A + B|\bar{x}| + BR = (1 + B)R,$$

da cui $M \leq (1 + B)R$ e $R/M \geq 1/(1 + B)$.

In soldoni abbiamo provato che risolvendo il problema di Cauchy *con un punto iniziale arbitrario*, la soluzione o esiste fino a b , oppure è definita su un intervallino di ampiezza almeno $1/(1 + B)$ a destra del punto iniziale.

Partendo da t_0 , la soluzione sarà quindi definita almeno su $[t_0, t_0 + 1/(1 + B)]$. A questo punto, possiamo prendere il *valore finale* di tale soluzione nel punto $t_0 + 1/(1 + B)$ come dato iniziale di un nuovo problema di Cauchy...e potremo prolungare la soluzione fino a $t_0 + 2/(1 + B)$. Procedendo in questo modo, in un numero finito di passi avremo prolungato la soluzione sino al punto b , estremo finale del nostro intervallo. Q.E.D.

3 Lezione del 9/12/2009 (2 ore)

La condizione di Lipschitz serve a garantire l'unicità delle soluzioni: essa non è invece necessaria a dimostrare l'esistenza locale. Vale infatti un teorema, dovuto a Peano, che assicura l'esistenza di una soluzione nella sola ipotesi di continuità della funzione $f(t, x)$. Per dimostrare il teorema di Peano, ci serve tuttavia un risultato di compattezza per successioni di funzioni continue:

TEOREMA (di Ascoli-Arzelà): Sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una successione di funzioni continue. Se la successione $\{u_n\}$ è equilimitata (cioè se esiste $M > 0$ tale che $|f_n(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$) ed equicontinua (cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in [a, b]$ con $|x - y| < \delta$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ valga $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$), allora esiste una sottosuccessione che converge uniformemente ad una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$.

Per dimostrare il teorema, premettiamo il seguente

LEMMA: Sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una successione di funzioni equilimitate, cioè esiste $M > 0$ tale che $|f_n(x)| \leq M$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in [a, b]$.

²Siccome vogliamo la soluzione soltanto a destra di \bar{t} , le richieste su f sono necessarie solo a destra di tale punto!

Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_k$ tale che per ogni $q \in [a, b] \cap \mathbf{Q}$ esiste finito il limite

$$(*) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f_{n_k}(q) := f(q).$$

In altre parole, f_{n_k} converge puntualmente alla funzione f su $[a, b] \cap \mathbf{Q}$.

DIM.: Come ben sappiamo, l'insieme $[a, b] \cap \mathbf{Q}$ è numerabile: in altre parole, esiste una successione iniettiva $\{q_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ la cui immagine è esattamente $[a, b] \cap \mathbf{Q}$.

Consideriamo la successione numerica $\{f_n(q_0)\}_n$: essa è una successione di numeri reali contenuta nell'intervallo chiuso e limitato $[-M, M]$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, possiamo estrarre una sottosuccessione, che chiamiamo $\{f_n^0\}_n$, in modo che $f_n^0(q_0)$ converga ad un numero reale che denotiamo $f(q_0)$.

Consideriamo ora la successione numerica $\{f_n^0(q_1)\}_n$: essa è una sottosuccessione di $\{f_n(q_1)\}_n$, e come tale è ancora contenuta nell'intervallo $[-M, M]$. Possiamo allora estrarre un'ulteriore sottosuccessione $\{f_n^1\}_n$ in modo che $f_n^1(q_1)$ converga ad un numero reale che chiameremo $f(q_1)$.

Procedendo ricorsivamente in questo modo, da $\{f_n\}_n$ estraiamo una successione infinita di sottosuccessioni $\{f_n^0\}_n, \{f_n^1\}_n, \{f_n^2\}_n, \{f_n^3\}_n, \{f_n^4\}_n, \{f_n^5\}_n, \dots, \{f_n^k\}_n, \dots$

La k -esima sottosuccessione $\{f_n^k\}_n$ ha la proprietà che per $i = 0, 1, 2, \dots, k$ esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^k(q_i),$$

e tale limite è uguale ad un certo numero reale che chiamiamo $f(q_i)$.

Noi, però, vogliamo un'unica sottosuccessione $\{\tilde{f}_n\}_n$ che converga in tutti i punti q_i contemporaneamente. Essa può essere ottenuta con il vecchio trucco della successione diagonale: poniamo $\tilde{f}_n = f_n^n$ (cioè, l' n -esimo elemento della sottosuccessione diagonale \tilde{f}_n è l' n -esimo elemento dell' n -esima sottosuccessione che abbiamo estratto sopra).

In questo modo, comunque si fissi k , \tilde{f}_n è una sottosuccessione di $\{f_n^k\}$ per $n \geq k$, e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}_n(q_i) = f(q_i) \quad \forall i \in \mathbf{N}.$$

Q.E.D.

DIMOSTRAZIONE del Teorema di Ascoli-Arzelà: Possiamo applicare il Lemma alla nostra successione di funzioni: otteniamo una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_k$ ed una funzione $f : [a, b] \cap \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_{n_k}(q) = f(q) \quad \forall q \in [a, b] \cap \mathbf{Q}.$$

Ora, affermo che in realtà questa sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ converge uniformemente su $[a, b]$ ad una funzione continua: essa ovviamente coinciderà con la precedente f sui razionali... per cui (con lieve abuso di linguaggio) indicheremo ancora con $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione limite. Dimostreremo questo “magico” risultato facendo vedere che la successione $\{f_{n_k}\}$ è di Cauchy nella metrica della convergenza uniforme.

Dobbiamo far vedere cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste \bar{k} tale che per ogni $h, k \geq \bar{k}$ si abbia $\|f_{n_h} - f_{n_k}\| < 4\varepsilon$.

Poiché i razionali sono densi in \mathbf{R} , possiamo scegliere un numero finito q_1, \dots, q_N di razionali in $[a, b]$, in modo tale che ogni punto dell'intervallo $[a, b]$ disti meno di δ (δ è il numero dato dall'equicontinuità...) da uno di questi q_i .

Per come abbiamo scelto la sottosuccessione f_{n_k} , possiamo trovare $\bar{k} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $k \geq \bar{k}$ si abbia

$$(**) \quad |f_{n_k}(q_i) - f(q_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N.$$

Sia $x \in [a, b]$, e scegliamo $\bar{i} \in \{1, \dots, N\}$ tale che $|x - q_{\bar{i}}| < \delta$. Allora, tenendo conto di (**) e dell'equicontinuità si ha, per ogni $h, k \geq \bar{k}$:

$$(***) \quad \begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_{n_h}(x)| &\leq \\ |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(q_{\bar{i}})| + |f_{n_k}(q_{\bar{i}}) - f(q_{\bar{i}})| + |f(q_{\bar{i}}) - f_{n_h}(q_{\bar{i}})| + \\ |f_{n_h}(q_{\bar{i}}) - f_{n_h}(x)| &\leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Passando al massimo per $x \in [a, b]$, otteniamo che la nostra sottosuccessione è di Cauchy rispetto alla metrica uniforme.

Ora, lo spazio delle funzioni continue su $[a, b]$ con la metrica uniforme è *completo*: ogni successione di Cauchy converge uniformemente ad una funzione continua...e il gioco è fatto. Q.E.D.

Enunciamo e dimostriamo il teorema di Peano:

TEOREMA (Peano): Sia $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - R, x_0 + R] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua. E' possibile trovare un $\delta \in (0, a]$, tale che nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ esiste una soluzione del problema di Cauchy

$$(P) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Tale soluzione non è necessariamente unica.

DIM.: Troveremo la soluzione come limite di una successione di *soluzioni approssimate*.

Vogliamo costruire una successione di funzioni lineari a tratti, definite in un intorno di t_0 , che siano soluzioni approssimate del problema di Cauchy (P).

Sia M il massimo della funzione $|f(t, x)|$ sul rettangolo $[t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - R, x_0 + R]$. Ne consegue che un'eventuale soluzione contenuta nel rettangolo avrà derivata compresa tra $-M$ e M , e sarà quindi contenuta tra le rette $x = x_0 - M(t - t_0)$ e $x = x_0 + M(t - t_0)$.

Per evitare che le soluzioni approssimate del problema di Cauchy che andiamo a costruire *escano dal rettangolo*, poniamo

$$\delta = \min\left\{a, \frac{R}{M}\right\}$$

Costruiamo ora delle *soluzioni approssimate* $x_n(t)$ del nostro problema, lineari a tratti sull'intervallo $[0, \delta]$. Il discorso si estende in maniera del tutto analoga all'intervallo $[-\delta, 0]$ (esercizio!).

L'idea è la seguente: anche se non conosciamo una soluzione, l'equazione differenziale ne prescrive la retta tangente nel punto t_0 : essa è data da

$$x = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0).$$

Per un breve tratto, diciamo tra t_0 e $t_0 + \frac{1}{n}$, tale retta sarà sperabilmente una *discreta approssimazione* della soluzione. A questo punto, andiamo a vedere quanto vale f nel punto dove siamo arrivati (cioè in $(t_0 + \frac{1}{n}, x_0 + f(t_0, x_0) \cdot \frac{1}{n})$), e prendiamo questo valore come *pendenza di una nuova retta approssimante* tra $t_0 + \frac{1}{n}$ e $t_0 + \frac{2}{n}$. Procedendo in questo modo arriveremo a costruire una spezzata, definita sull'intervallo $[t_0, t_0 + \delta]$, che chiameremo *n-esima spezzata di Eulero*.

Più formalmente, possiamo dire che l'*n*-esima spezzata di Eulero è l'unica funzione continua $x_n : [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow [x_0 - R, x_0 + R]$ tale che

$$\begin{aligned} (A) \quad & x_n(0) = x_0, \\ (B) \quad & \text{se } t \in \left(t_0 + \frac{i}{n}, t_0 + \frac{i+1}{n}\right], \quad i = 0, \dots, [n\delta], \text{ allora} \\ & x_n(t) = x_n\left(t_0 + \frac{i}{n}\right) + f\left(t_0 + \frac{i}{n}, x_n\left(t_0 + \frac{i}{n}\right)\right) \cdot \left(t - t_0 - \frac{i}{n}\right). \end{aligned}$$

In (A), $[n\delta]$ denota la parte intera di $n\delta$, cioè il numero di tratti lunghi $\frac{1}{n}$ necessari a "completare" la nostra spezzata tra t_0 e $t_0 + \delta$.

La nostra legittima speranza è che, al crescere di n , queste spezzate approssimino sempre meglio una soluzione del problema di Cauchy (P).

Notiamo che, per costruzione, $\{x_n\}$ è una successione di funzioni lineari a tratti definite sull'intervallo $[t_0, t_0 + \delta]$ e a valori nell'intervallo $[x_0 - R, x_0 + R]$. Inoltre, la *derivata* di tutte queste funzioni è ovunque compresa tra $-M$ e M . Dunque, se $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \delta]$ abbiamo

$$|x_n(t_2) - x_n(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} x'_n(s) ds \right| \leq M|t_2 - t_1|,$$

e le x_n soddisfano tutte una condizione di Lipschitz con la stessa costante M .

Allora, per il Teorema di Ascoli-Arzelà, esistono una funzione continua $x(t)$, e una sottosuccessione $\{x_{n_k}(t)\}$ di $\{x_n(t)\}$ tale che $x_{n_k} \rightarrow x$ uniformemente in $[t_0, t_0 + \delta]$.

Ci rimane da dimostrare che questa funzione è una soluzione del problema di Cauchy (P).

Siccome a priori la funzione $x(t)$ è soltanto continua, conviene considerare il problema di Cauchy in forma integrale: sappiamo che una funzione $x(t) : [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow [x_0 - R, x_0 + R]$ è soluzione del problema di Cauchy (P) se e soltanto se essa è continua e soddisfa l'equazione integrale

$$(P') \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta].$$

Mostriamo allora che la funzione $x(t)$ ottenuta come limite delle spezzate di Eulero soddisfa l'equazione integrale (P'), e dunque è la nostra agognata soluzione.

Intanto,

$$\begin{aligned} (C) \quad x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t x'_n(s) ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds + R_n(t) \end{aligned}$$

dove $R_n(t) = \int_{t_0}^t [x'_n(s) - f(s, x_n(s))] ds$. Mostreremo la prossima volta che $R_n(t) \rightarrow 0$, mentre si può passare al limite negli altri termini ottenendo l'equazione voluta.

4 Lezione del 11/12/2009 (2 ore)

Concludiamo la dimostrazione della volta scorsa.

Se definiamo

$$\omega_n = \sup \left\{ |f(s, x) - f(t, y)| : \right. \\ \left. s, t \in [t_0, t_0 + \delta], x, y \in [x_0 - R, x_0 + R], |s - t| < \frac{1}{n}, |x - y| < \frac{M}{n} \right\},$$

l'uniforme continuità di f (il teorema di Heine-Cantor vale anche in due variabili, con identica dimostrazione) ci dice che $\omega_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Evidentemente:

$$(E) \quad |R_n(t)| \leq \int_{t_0}^{t_0+\delta} |x'_n(s) - f(s, x_n(s))| ds.$$

Nell'ultimo integrale, consideriamo l'integranda nel generico intervallino $[t_0 + \frac{i}{n}, t_0 + \frac{i+1}{n}]$, $i = 0, \dots, [n\delta]$: si ha

$$|x'_n(s) - f(s, x_n(s))| = \left| f\left(t_0 + \frac{i}{n}, x_n\left(t_0 + \frac{i}{n}\right)\right) - f(s, x_n(s)) \right| \leq \omega_n,$$

dove abbiamo usato (C) e la definizione di ω_n . Usando questa stima in (E) otteniamo allora $|R_n(t)| \leq \delta \cdot \omega_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Allora, passando al limite in (C) otteniamo

$$(F) \quad x(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k}(t) = \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{n_k}(s)) ds + R_{n_k}(t) \right) = \\ x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

e l'equazione integrale (P') è soddisfatta.

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $f(t, x_{n_k}(t)) \rightarrow f(t, x(t))$ uniformemente, per cui è lecito passare al limite sotto il segno di integrale.

La convergenza uniforme, a sua volta, segue da quella di x_{n_k} a x e dall'uniforme continuità di f sul rettangolo: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che $|(t, x) - (s, y)| < \delta$ implica $|f(t, x) - f(s, y)| < \varepsilon$, qualunque siano (t, x) , (s, y) nel rettangolo $[t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - R, x_0 + R]$.

D'altra parte, per k abbastanza grande abbiamo $|x_{n_k}(t) - x(t)| < \delta$ per ogni $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, da cui

$$|f(t, x_{n_k}(t)) - f(t, x(t))| < \varepsilon \quad \forall t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

Q.E.D.

Come già sappiamo, la maggior parte delle equazioni differenziali ordinarie non si riesce a risolvere esplicitamente: per questo motivo, è importante avere dei metodi numerici di approssimazione delle soluzioni, e anche dei criteri che permettano lo studio qualitativo delle stesse. Spesso, infatti, nei problemi applicativi non è tanto importante scrivere una soluzione approssimata con un errore più o meno piccolo, quanto piuttosto prevedere in modo corretto l'andamento asintotico di una soluzione.

Ad esercitazioni avrete modo di vedere qualche esempio di studi qualitativi di questo tipo. Per poterli effettuare con successo, si usano i classici risultati di esistenza e unicità che abbiamo visto ed alcuni risultati ad hoc come il seguente:

TEOREMA (del confronto): Siano $f, g : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$ funzioni che soddisfano localmente le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale (cioè continue e localmente lipschitziane nella seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima). Supponiamo di sapere che

$$f(t, x) < g(t, x) \quad \forall (t, x) \in [a, b] \times [c, d].$$

Siano poi $t_0 \in [a, b)$, $u_0, v_0 \in (c, d)$ con $u_0 \leq v_0$. Indichiamo con $u, v : [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbf{R}$ le soluzioni locali a destra di t_0 (definite per un opportuno $\delta > 0$) dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad \begin{cases} v'(t) = g(t, v(t)), \\ v(t_0) = v_0. \end{cases}$$

Allora $v(t) > u(t)$ per ogni $t \in (t_0, t_0 + \delta]$.

DIM.: Se per assurdo la tesi non fosse vera, l'insieme $A = \{t \in (t_0, t_0 + \delta] : u(t) \geq v(t)\}$ sarebbe non vuoto. Poniamo allora $\bar{t} = \inf A$.

Mostriamo per prima cosa che $\bar{t} > t_0$: basta far vedere che $v(t) > u(t)$ in un intorno destro di t_0 . Infatti, le due funzioni sono di classe \mathcal{C}^1 : se abbiamo $v(t_0) = v_0 > u(t_0) = u_0$, per il teorema della permanenza del segno la stessa disuguaglianza vale per ogni t in un intorno destro di t_0 . Se invece $v_0 = u_0$, abbiamo $v'(t_0) - u'(t_0) = g(t_0, u_0) - f(t_0, u_0) > 0$. Per il teorema della permanenza del segno, abbiamo allora $v'(t) - u'(t) > 0$ in un intorno destro di 0 e la funzione $v(t) - u(t)$ è crescente (e quindi strettamente positiva) in tale intorno.

Mostriamo quindi che $u(\bar{t}) = v(\bar{t})$. Vale infatti $u(t) < v(t)$ per $t \in (t_0, \bar{t})$, da cui $u(\bar{t}) \leq v(\bar{t})$. D'altra parte, per definizione di inf, esiste una successione di punti $t_n \geq \bar{t}$ tali che $t_n \rightarrow \bar{t}$ e $u(t_n) \geq v(t_n)$: per continuità si ha allora $u(\bar{t}) \geq v(\bar{t})$ da cui

$$u(\bar{t}) = v(\bar{t}).$$

Ma allora possiamo ripetere lo stesso ragionamento sopra con \bar{t} al posto di t_0 e concludere che $v'(t) > u'(t)$ in un intorno sinistro di \bar{t} , da cui $v(t) < u(t)$ in tale intorno, assurdo. Q.E.D.

Un'altra questione importante che riguarda il problema di Cauchy per equazioni (e sistemi di equazioni) differenziali ordinarie, è quella della *dipendenza continua delle soluzioni dai dati del problema*. Intuitivamente, ci aspettiamo che *cambiando di poco* il dato iniziale (e il punto iniziale) o il secondo membro dell'equazione, cambino di poco anche le soluzioni, almeno *per un po' di tempo*.

Più di così non è lecito aspettarsi: si consideri infatti quello che è in un certo senso il più semplice problema di Cauchy che esista

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

che ha come soluzione $x(t) = x_0 e^t$. Cambiando di poco x_0 , le soluzioni cambiano di poco per t piccolo... ma all'infinito diventano infinitamente lontane!

Uno strumento assai utile a dimostrare risultati di dipendenza continua dai dati è il seguente

LEMMA (di Gronwall): Siano $C \geq 0$, $\phi, v : [t_0, t_0 + \delta]$ due funzioni continue e non negative tali che valga la disuguaglianza

$$\phi(t) \leq C + \int_{t_0}^t v(s)\phi(s) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta].$$

Allora

$$\phi(t) \leq C e^{\int_{t_0}^t v(s) ds} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta].$$

DIM.: Fissato $\varepsilon > 0$, poniamo $w(t) = C + \varepsilon + \int_{t_0}^t v(s)\phi(s) ds$. Vale allora $w(t_0) = C + \varepsilon$, $w'(t) = v(t)\phi(t) \leq v(t)w(t)$ da cui $w'(t)/w(t) \leq v(t)$. Integrando tra t_0 e t otteniamo allora

$$\log \left(\frac{w(t)}{C + \varepsilon} \right) \leq \int_{t_0}^t v(s) ds.$$

Basta prendere l'esponenziale e mandare $\varepsilon \rightarrow 0^+$ per avere la tesi. Q.E.D.

Vediamo ora un tipico teorema di dipendenza continua dai dati. Consideriamo due problemi di Cauchy

$$(P) \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (Q) \begin{cases} v'(t) = g(t, v(t)), \\ v(t_1) = v_1, \end{cases}$$

con f, g che soddisfano le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale su un certo intorno rettangolare $[a, b] \times [c, d]$ di entrambi i dati iniziali.

Supponiamo che la soluzione $u(t)$ del problema (P) sia definita su un certo intorno destro $[t_0, t_0 + \delta]$ di t_0 . È un semplice esercizio verificare che allora la soluzione $v(t)$ di (Q) è definita almeno su $[t_0, t_0 + \delta/2]$ a patto di prendere il punto iniziale (t_1, v_1) sufficientemente vicino a (t_0, u_0) e a patto che f sia sufficientemente vicina a g in norma uniforme sul rettangolo.

Proveremo la prossima volta che allora, se i dati iniziali e f e g sono sufficientemente vicini, le soluzioni e le loro derivate sono uniformemente vicine in $[t_0, t_0 + \delta]$.

5 Lezione del 14/12/2009 (2 ore)

Mantenendo le notazioni della volta scorsa, possiamo provare il seguente

TEOREMA (di dipendenza continua dai dati): Fissati f, t_0, u_0 , per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r > 0$ tale che se $|(t_1, v_1) - (t_0, u_0)| < r$ e $\|g - f\|_\infty < r$ (norma sul rettangolo $[a, b] \times [c, d]$), allora $\|v - u\|_\infty + \|v' - u'\|_\infty < \varepsilon$ (norme sull'intervallo $[t_0, t_0 + \delta/2]$).

In altre parole, se i dati dei problemi di Cauchy sono sufficientemente vicini, le soluzioni e le loro derivate diventano arbitrariamente vicine in norma uniforme in un intorno destro di t_0 .

DIM.: Cominciamo col dimostrare che la differenza delle soluzioni $v - u$ diventa piccola a piacere in norma uniforme, a patto di prendere $|v_1 - u_0|$, $|t_1 - t_0|$ e $\|g - f\|_\infty$ sufficientemente piccoli. Dalle equazioni integrali

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \\ v(t) &= v_1 + \int_{t_1}^t g(s, u(s)) \, ds = v_1 + \int_{t_1}^{t_0} g(s, v(s)) \, ds + \int_{t_0}^t g(s, v(s)) \, ds \end{aligned}$$

abbiamo la stima

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &\leq \\ |u_0 - v_1| + |t_0 - t_1|(\|f\|_\infty + \|g - f\|_\infty) &+ \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - g(s, v(s))| \, ds. \end{aligned}$$

Se L è la costante di Lipschitz di f , l'ultimo integrale si può stimare come

segue:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - g(s, v(s))| ds \leq \\ & \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| + |f(s, v(s)) - g(s, v(s))| ds \leq \\ & \int_{t_0}^t L|u(s) - v(s)| ds + \frac{\delta}{2} \|g - f\|_\infty \end{aligned}$$

Posto $\phi(t) := |v(t) - u(t)|$ e mettendo insieme i pezzi abbiamo allora

$$\phi(t) = |u_0 - v_1| + (\|f\|_\infty + \|g - f\|_\infty)|t_1 - t_0| + \frac{\delta}{2} \|g - f\|_\infty + \int_{t_0}^t L\phi(s) ds$$

da cui, usando il lemma di Gronwall:

$$\phi(t) \leq \left(|u_0 - v_1| + (\|f\|_\infty + \|g - f\|_\infty)|t_1 - t_0| + \frac{\delta}{2} \|g - f\|_\infty \right) e^{L\delta/2}.$$

Si vede quindi che $\|\phi\|_\infty$ può essere resa arbitrariamente piccola a patto di prendere dati sufficientemente vicini.

Per mostrare che anche le derivate delle soluzioni diventano arbitrariamente vicine in norma uniforme usiamo una stima analoga:

$$\begin{aligned} |v'(t) - u'(t)| &= |f(t, u(t)) - g(t, v(t))| \leq \\ & |f(t, u(t)) - f(t, v(t))| + |f(t, v(t)) - g(t, v(t))| \leq \\ L\|u - v\|_\infty + \|f - g\|_\infty \end{aligned}$$

da cui $\|v' - u'\|_\infty \leq L\|u - v\|_\infty + \|f - g\|_\infty$: il membro di destra può essere reso piccolo a piacere prendendo dati vicini! Q.E.D.

Passiamo ora a studiare in modo un po' sistematico le soluzioni di un'equazione lineare di ordine n . Per prima cosa, definiamo un operatore differenziale lineare di ordine n : si tratta di un'applicazione lineare $L : \mathcal{C}^n([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}^0([a, b])$ del tipo

$$Lx(t) = D^n x(t) + a_{n-1}(t)D^{n-1}x(t) + a_{n-2}D^{n-2}x(t) + \dots + a_1 Dx(t) + a_0 x(t),$$

ove $D^k x(t)$ indica la derivata k -esima della funzione $x(t)$, mentre $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{C}^0([a, b])$ sono fissate funzioni continue.

Un'equazione differenziale lineare di ordine n associata a questo operatore è del tipo $Lx(t) = f(t)$, con $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$. Il problema di Cauchy relativo

consiste nel trovare la soluzione dell'equazione che soddisfa un' n -upla di condizioni iniziali del tipo $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$, con $t_0 \in [a, b]$ e x_0, x_1, \dots, x_{n-1} fissati numeri reali.

Osserviamo per prima cosa che questo problema di Cauchy ha *un'unica soluzione globale definita sull'intero intervallo* $[a, b]$: a questo scopo, basta osservare che tale problema di Cauchy, indichiamolo con (P) , è equivalente al seguente, che coinvolge un *sistema di n equazioni del primo ordine*:

$$(P') \left\{ \begin{array}{l} x'_{n-1}(t) = -a_{n-1}(t)x_{n-1}(t) - a_{n-2}(t)x_{n-2}(t) + \dots - a_1(t)x_1(t) - a_0(t)x_0(t) + f(t) \\ x'_{n-2}(t) = x_{n-1}(t) \\ x'_{n-3}(t) = x_{n-2}(t) \\ \dots \\ x'_0(t) = x_1(t) \\ x_{n-1}(t_0) = x_{n-1} \\ x_{n-2}(t_0) = x_{n-2} \\ \dots \\ x_1(t_0) = x_1 \\ x_0(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

Infatti, la funzione $x_0(t)$ data dal problema (P') è evidentemente una soluzione di (P) . Viceversa, una soluzione $x(t)$ del problema (P) assieme alle sue derivate fino alla $(n-1)$ -esima forma l' n -upla soluzione del sistema (P') .

Evidentemente, al sistema (P') è applicabile il teorema di esistenza e unicità globale: per ogni n -upla di dati iniziali esiste una ed una sola soluzione definita sull'intero intervallo $[a, b]$. Lo stesso vale dunque per il problema di Cauchy originale (P) per l'equazione di ordine n .

Stabilito che vale il risultato di esistenza e unicità, passiamo a studiare la *struttura dell'insieme delle soluzioni* dell'equazione lineare $Lx(t) = f(t)$. Per farlo, partiamo dal caso dell'equazione *omogenea* $Lx(t) = 0$:

TEOREMA (Spazio delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea di ordine n): Dato l'operatore lineare L di cui sopra, l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea $Lx(t) = 0$

$$\mathcal{V} = \{x(t) : Lx(t) = 0\}$$

è uno spazio vettoriale reale di dimensione n . In particolare, n soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea generano l'intero insieme \mathcal{V} .

DIM.: È immediato verificare che una combinazione lineare di soluzioni dell'equazione omogenea è ancora una soluzione (è una conseguenza della linearità della derivata): l'insieme \mathcal{V} delle soluzioni è dunque uno spazio vettoriale reale.

Fissiamo allora $t_0 \in [a, b]$ e consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{V} &\rightarrow \mathbf{R}^n \\ x(t) &\mapsto (x(t_0), x'(t_0), x''(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)) \end{aligned}$$

che ad una soluzione $x(t)$ associa il vettore dei suoi *dati iniziali di Cauchy*.

L'applicazione Ψ è evidentemente lineare: dico che si tratta di un isomorfismo di spazi vettoriali.

La suriettività di Ψ viene dal teorema di esistenza globale: qualunque dato di Cauchy si scelga, esiste una soluzione.

L'iniettività è invece conseguenza dell'unicità: $x(t) \in \ker \Psi$ se e soltanto se il vettore dei dati iniziali è nullo. Ora, la funzione identicamente nulla è chiaramente una soluzione del problema di Cauchy per l'equazione omogenea con dati nulli: grazie al risultato di unicità non ve ne sono altre. In altre parole, $\ker \Psi = \{0\}$ e Ψ è un isomorfismo. Q.E.D.

COROLLARIO (Soluzioni di un'equazione lineare di ordine n completa): L'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare di ordine n

$$\mathcal{W} = \{x(t) : Lx(t) = f(t)\}$$

è uno spazio affine modellato sullo spazio vettoriale \mathcal{V} delle soluzioni dell'equazione omogenea associata. Precisamente, se $x_p(t)$ è una qualunque soluzione particolare dell'equazione, allora

$$\mathcal{W} = \{x_p(t) + x_0(t) : Lx_0(t) = 0\}.$$

DIM.: Siano $x_1(t), x_2(t)$ due soluzioni dell'equazione completa $Lx(t) = f(t)$. È immediato verificare che $x_1(t) - x_2(t)$ è una soluzione dell'equazione omogenea $Lx(t) = 0$. Q.E.D.

Il teorema appena visto ci dice che per risolvere un'equazione lineare omogenea di ordine n è sufficiente trovarne n soluzioni *linearmente indipendenti*.

Un criterio per stabilire se n soluzioni sono, appunto, linearmente indipendenti, coinvolge il *determinante wronskiano*:

PROPOSIZIONE (Wronskiano): Siano $x_1(t), \dots, x_n(t)$ soluzioni dell'equazione lineare omogenea di ordine n $Lx(t) = 0$. Queste soluzioni sono linearmente indipendenti se e soltanto se il loro determinante wronskiano

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) & \dots & x_n''(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

non si annulla mai nell'intervallo $[a, b]$.

DIM.: Per ogni fissato $t_0 \in [a, b]$, $W(t_0)$ è il determinante di una matrice che ha come colonne i vettori dei dati iniziali dei problemi di Cauchy di cui sono soluzioni $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Ricordando l'isomorfismo lineare $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}^n$ definito nella dimostrazione del teorema si ha facilmente la tesi: $x_1(t), \dots, x_n(t)$ formano una base di \mathcal{V} se e solo se le loro immagini secondo Ψ (che sono le colonne della matrice) formano una base di \mathbf{R}^n , cioè se e solo se la matrice wronskiana è non singolare. Q.E.D.

Vedremo tra poco come trovare n soluzioni indipendenti di un'equazione lineare a coefficienti costanti. Il caso generale, purtroppo, non è così roseo. . .

In compenso, se siamo in grado di risolvere l'equazione omogenea, c'è anche un metodo per trovare una soluzione particolare di un'equazione completa $Lx(t) = f(t)$:

TEOREMA (Metodo della variazione delle costanti): Data l'equazione lineare di ordine n $Lx(t) = f(t)$, siano $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata. Allora esistono n funzioni di classe $\mathcal{C}^1([a, b])$, $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ che soddisfano il sistema

$$(*) \begin{cases} C_1'(t)x_1(t) + C_2'(t)x_2(t) + \dots + C_n'(t)x_n(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1'(t) + C_2'(t)x_2'(t) + \dots + C_n'(t)x_n'(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1''(t) + C_2'(t)x_2''(t) + \dots + C_n'(t)x_n''(t) = 0 \\ \dots \\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + C_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \dots + C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}$$

Si ha allora che la funzione $x_p(t) := C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) + \dots + C_n(t)x_n(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione completa.

6 Lezione del 16/12/2009 (2 ore)

DIM.: Mostriamo innanzitutto che il sistema (*) è risolubile. Innanzitutto, per ogni fissato t è certamente possibile trovare una n -upla di numeri reali $C_1'(t), \dots, C_n'(t)$ che soddisfano il sistema (che è un onesto sistema *algebrico* di equazioni lineari, di quelli studiati nel corso di algebra lineare!): la matrice incompleta del sistema non è altro che la matrice wronskiana, che sappiamo essere non singolare!

Inoltre, le soluzioni $C_1'(t), \dots, C_n'(t)$ sono funzioni continue di t : per rendersene conto, basta ricordarsi come è fatta l'espressione dell'inversa di una matrice non singolare $n \times n$ (i coefficienti della matrice da invertire sono

funzioni continue di t ...ed il determinante, che finisce a denominatore nell'espressione dell'inversa, non si annulla mai per la proposizione precedente). Siccome anche il vettore dei termini noti è continuo in t , l'asserto è provato.

A questo punto, per trovare $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ basta prendere delle primitive (arbitrarie) delle funzioni che abbiamo trovato risolvendo il sistema.

Non ci resta allora che far vedere che $x_p(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) + \dots + C_n(t)x_n(t)$ è soluzione dell'equazione completa.

Calcoliamoci le derivate: usando la prima equazione del sistema si vede subito che $x'_p(t) = C_1(t)x'_1(t) + C_2(t)x'_2(t) + \dots + C_n(t)x'_n(t)$. Analogamente avremo $x''_p(t) = C_1(t)x''_1(t) + C_2(t)x''_2(t) + \dots + C_n(t)x''_n(t)$ e più in generale $x_p^{(k)}(t) = C_1(t)x_1^{(k)}(t) + C_2(t)x_2^{(k)}(t) + \dots + C_n(t)x_n^{(k)}(t)$ per $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Invece

$$x_p^{(n)}(t) = C_1(t)x_1^{(n)}(t) + C_2(t)x_2^{(n)}(t) + \dots + C_n(t)x_n^{(n)}(t) + f(t).$$

Sostituendo nell'espressione dell'operatore L si ottiene

$$Lx_p(t) = C_1(t)Lx_1(t) + C_2(t)Lx_2(t) + \dots + C_n(t)Lx_n(t) + f(t) = f(t),$$

dove si è usato il fatto che $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ sono soluzioni dell'omogenea. Q.E.D.

Vedremo ora come fare a trovare n soluzioni linearmente indipendenti di un'equazione lineare omogenea *a coefficienti costanti*.

Per ragioni che saranno chiare tra un attimo, ci tornerà utile cercare *soluzioni a valori complessi* della nostra equazione differenziale. Una funzione (di una variabile reale) a valori complessi si deriva nel modo ovvio: poniamo per definizione $D(a(t) + ib(t)) := Da(t) + iDb(t)$. A questo punto, ha perfettamente senso cercare soluzioni a valori complessi dell'equazione omogenea $Lx(t) = 0$. Si noti poi che la parte reale e la parte immaginaria di una soluzione complessa saranno soluzioni reali.

Altra cosa che ci servirà sarà saper fare l'esponenziale di un *numero complesso*.

Ricordando lo sviluppo in serie di e^x , è abbastanza naturale dare la definizione seguente: se $z \in \mathbf{C}$, poniamo

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Con ragionamenti non difficili si può verificare che la serie esponenziale converge per ogni $z \in \mathbf{C}$: l'idea è considerare un elemento di \mathbf{C} come un vettore di 2 numeri reali. La serie converge totalmente e quindi converge.

Si può anche far vedere, ma è un po' più complicato (vedi più avanti i cenni che faremo sul prodotto alla Cauchy di serie...), che $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, per cui il nome “esponenziale complesso” è legittimo.

Cosa succede se calcoliamo l'esponenziale complesso di un numero immaginario puro? Usando la definizione e ricordando le serie di Taylor di seno e coseno, si vede subito che vale la *formula di Eulero*

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta.$$

In conclusione, avremo dunque

$$e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha(\cos \beta + i \sin \beta).$$

[In alternativa, si potrebbe prendere questa formula come definizione, per la verità un po' misteriosa, di esponenziale complesso. Si verifichi per esercizio che vale la proprietà dell'esponenziale richiamata sopra, cioè che si ha

$$e^{(\alpha_1+i\beta_1)+(\alpha_2+i\beta_2)} = e^{\alpha_1+i\beta_1} \cdot e^{\alpha_2+i\beta_2}.]$$

Un'altra cosa che possiamo verificare senza difficoltà è che $D(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}$ anche per λ complesso.

Torniamo alle nostre equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti: sia dato l'operatore

$$Lx(t) := D^n x(t) + a_{n-1}D^{n-1}x(t) + a_{n-2}D^{n-2}x(t) + \dots + a_1Dx(t) + a_0x(t),$$

con a_0, a_1, \dots, a_{n-1} costanti reali fissate.

L'*equazione caratteristica* associata all'operatore L è, per definizione, l'equazione polinomiale nell'incognita $\lambda \in \mathbf{C}$

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra, tale equazione possiede n radici complesse $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (non necessariamente tutte distinte). È immediato verificare che le radici caratteristiche permettono di fattorizzare l'operatore L nel prodotto di n operatori lineari a coefficienti costanti del primo ordine:

$$Lx(t) = \left(\prod_{i=1}^n (D - \lambda_i I) \right) x(t),$$

dove I è l'identità. In particolare, si noti che gli operatori del primo ordine che compaiono in questa fattorizzazione *commutano tra loro*.

Usando questa fattorizzazione dell'operatore si vede subito che

PROPOSIZIONE (Soluzioni esponenziali di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti): Una funzione del tipo $e^{\lambda t}$ è soluzione (a valori complessi) dell'equazione omogenea a coefficienti costanti $Lx(t) = 0$ se e solo se λ è una delle radici caratteristiche dell'operatore L . Inoltre, se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sono radici caratteristiche distinte, allora le soluzioni $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_k t}$ sono linearmente indipendenti.

DIM.: Sia λ_i una delle radici dell'equazione caratteristica. Allora $(D - \lambda_i I)e^{\lambda t} = (\lambda - \lambda_i)e^{\lambda t}$: il risultato è nullo se e solo se $\lambda = \lambda_i$. Usando la fattorizzazione dell'operatore deduciamo allora che

$$Le^{\lambda t} = e^{\lambda t} \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) :$$

$e^{\lambda t}$ è soluzione dell'equazione omogenea se e soltanto se λ è una delle radici dell'equazione caratteristica.

Mostriamo che k soluzioni di questo tipo $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t}$, con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tutti distinti, sono linearmente indipendenti. Supponiamo infatti che valga l'identità

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_k e^{\lambda_k t} = 0.$$

Moltiplicando per $e^{-\lambda_k t}$ e derivando si ottiene

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_k)e^{(\lambda_1 - \lambda_k)t} + C_2(\lambda_2 - \lambda_k)e^{(\lambda_2 - \lambda_k)t} + \dots + C_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)e^{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)t} = 0.$$

Moltiplichiamo poi per $e^{-(\lambda_{k-1} - \lambda_k)t}$ e deriviamo nuovamente:

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_k)(\lambda_1 - \lambda_{k-1})e^{(\lambda_1 - \lambda_{k-1})t} + \dots + C_{k-2}(\lambda_{k-2} - \lambda_k)(\lambda_{k-2} - \lambda_{k-1})e^{(\lambda_{k-2} - \lambda_{k-1})t} = 0.$$

Ripetendo il giochetto per k volte arriviamo all'espressione

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_k)(\lambda_1 - \lambda_{k-1})(\lambda_1 - \lambda_{k-2}) \dots (\lambda_1 - \lambda_2)e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = 0$$

da cui $C_1 = 0$. In maniera del tutto analoga (basta permutare gli indici...) si dimostra che $C_2 = C_3 = \dots = C_k = 0$: le soluzioni sono indipendenti. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Che fare se ci sono radici multiple dell'equazione caratteristica.

Grazie alla proposizione appena dimostrata, siamo in grado di trovare n soluzioni indipendenti (a valori complessi) di un'equazione lineare omogenea di ordine n la cui equazione caratteristica abbia radici distinte. Queste si

trasformano poi facilmente in n soluzioni *reali* linearmente indipendenti, che come sappiamo generano l'intero spazio delle soluzioni.

Se infatti l'equazione caratteristica ha una radice complessa $\lambda = \alpha + i\beta$, vi è anche la coniugata $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ (perché l'equazione caratteristica ha coefficienti reali). Ma allora

$$\begin{aligned}\frac{e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda}t}}{2} &= e^{\alpha t} \cos \beta t \\ \frac{e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda}t}}{2i} &= e^{\alpha t} \sin \beta t\end{aligned}$$

sono due soluzioni reali che generano lo stesso sottospazio...

Più complicato è il caso in cui vi siano radici caratteristiche con molteplicità maggiore di 1: supponiamo che il polinomio caratteristico sia del tipo

$$(\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} (\lambda - \lambda_1)^{\mu_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{\mu_r},$$

ove evidentemente si avrà $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = n$. La fattorizzazione dell'operatore ha ora dei fattori ripetuti:

$$Lx(t) = \left(\prod_{i=1}^r (D - \lambda_i I)^{\mu_i} \right) x(t).$$

Mostriamo che sotto queste condizioni le funzioni $t^k e^{\lambda_i t}$ sono soluzioni dell'equazione per ogni $i = 1, \dots, r$ e per ogni $k = 0, 1, \dots, \mu_i - 1$: si ha infatti $(D - \lambda_i I)(t^k e^{\lambda_i t}) = k t^{k-1} e^{\lambda_i t}$ da cui iterando $(D - \lambda_i I)^k (t^k e^{\lambda_i t}) = k! e^{\lambda_i t}$ e $(D - \lambda_i I)^{k+1} (t^k e^{\lambda_i t}) = 0$.

In questo modo, ci siamo fabbricati esattamente n soluzioni dell'equazione omogenea: se dimostrarimo che sono linearmente indipendenti, abbiamo finito! Vedremo la prossima volta che lo sono...

7 Lezione del 18/12/2009 (2 ore)

Dimostriamo che le n soluzioni che abbiamo trovato la volta scorsa per un'equazione lineare omogenea di ordine n , sono effettivamente indipendenti.

Una relazione di dipendenza lineare tra di esse ha la forma $P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + P_r(t)e^{\lambda_r t} = 0$, dove P_1, P_2, \dots, P_r sono polinomi a coefficienti complessi e il grado di P_i è strettamente minore di μ_i . Supponiamo per assurdo che, per esempio, P_1 non sia identicamente nullo. Allora moltiplichiamo

per $e^{-\lambda_r t}$ e deriviamo μ_r volte: troviamo un'identità del tipo

$$Q_1(t)e^{(\lambda_1-\lambda_r)t} + Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_r)t} + \dots + Q_{r-1}(t)e^{(\lambda_{r-1}-\lambda_r)t} = 0,$$

ove i Q_i sono ancora polinomi di grado minore di μ_i , ed il grado di Q_1 è esattamente uguale a quello di P_1 . Ripetendo il trucco, arriviamo all'espressione assurda $R_1(t)e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} = 0$, ove R_1 ha lo stesso grado di P_1 . Le soluzioni trovate sono dunque indipendenti!

ESEMPIO: Si consideri l'equazione omogenea $y^{(11)} + 2y^{(7)} + y''' = 0$. L'equazione caratteristica è $\lambda^{11} + 2\lambda^7 + \lambda^3 = \lambda^3(\lambda^4 + 1)^2 = 0$, che ha come radici $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$, ciascuna con molteplicità 2, e poi 0 con molteplicità 3. La soluzione generale è quindi

$$y(t) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_2 t \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_3 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_4 t \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left(C_5 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_6 t \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_7 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_8 t \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + C_9 + C_{10}t + C_{11}t^2.$$

OSSERVAZIONE: Equazioni complete con $f(t) = P(t)e^{\lambda t}$, P polinomio di grado qualunque. $\lambda \in \mathbf{C}$.

Ora abbiamo una ricetta generale per risolvere un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Se l'equazione è poi completa, il metodo della variazione delle costanti ci permette di trovarne una soluzione particolare: anche in questo caso, in linea di principio, siamo capaci di trovare tutte le soluzioni!

Purtroppo, in pratica, il metodo della variazione delle costanti conduce spesso a calcoli complicati ed antipatici. In molti casi di interesse, esistono modi più veloci per trovare una soluzione particolare di un'equazione lineare non omogenea.

Uno di questi casi è quello in cui *il secondo membro dell'equazione è della forma $f(t) = P(t)e^{\lambda t}$, dove P è un polinomio e λ un numero complesso*. In questo caso, abbiamo a disposizione il cosiddetto *metodo degli annihilatori o di somiglianza*: a parte alcuni casi "degeneri" che vedremo tra un attimo, esiste una soluzione particolare *dello stesso tipo* del secondo membro, ossia del tipo $x_P(t) = Q(t)e^{\lambda t}$, ove Q è un polinomio dello stesso grado di P . Per trovare la soluzione particolare è allora sufficiente sostituire nell'equazione per determinare i coefficienti del polinomio $Q(t)$.

I soli casi in cui non esiste una soluzione di questo tipo sono quelli in cui $f(t)$ è una *soluzione dell'equazione omogenea*, cioè se $Lf(t) = 0$... ma come vedremo anche in questi casi il problema si aggira molto facilmente!

L'osservazione fondamentale per trovare soluzioni particolari di questo tipo è che il secondo membro $f(t)$ è soluzione di un'opportuna equazione lineare omogenea $Mx(t) = 0$: basta prendere un qualunque operatore lineare a coefficienti costanti M di cui λ sia una radice caratteristica di molteplicità maggiore del grado del polinomio $P(t)$.

Da questo si ricava che una qualunque soluzione particolare dell'equazione $Lx(t) = f(t)$ è anche soluzione dell'equazione omogenea a coefficienti costanti $(LM)x(t) = 0$. Le radici caratteristiche dell'operatore LM sono semplicemente l'unione di quelle di L e di quelle di M (e la molteplicità di una di esse è la somma delle molteplicità con cui compare in L ed in M).

Ne ricaviamo la seguente semplice ricetta:

Si voglia trovare una soluzione particolare dell'equazione lineare a coefficienti costanti $Lx(t) = P(t)e^{\lambda t}$, con $\lambda \in \mathbf{C}$ e $P(t)$ polinomio di grado n . Allora

- *Se λ non è una radice caratteristica di L , cerchiamo una soluzione del tipo*

$$x_P(t) = Q(t)e^{\lambda t},$$

con Q polinomio di grado n .

- *Se λ è una radice caratteristica di L di molteplicità μ , cerchiamo una soluzione del tipo*

$$x_P(t) = t^\mu Q(t)e^{\lambda t},$$

con Q polinomio di grado n .

Per concludere la discussione sulle equazioni lineari, vogliamo esaminare il caso dei *sistemi lineari del primo ordine a coefficienti costanti*. Un sistema di n equazioni del primo ordine in n incognite, la cui matrice dei coefficienti sia invertibile, si può ridurre ad un'equazione di ordine n .

Esiste però un metodo alternativo piuttosto attraente per risolverlo, che coinvolge il concetto di *esponenziale di una matrice*. Esattamente come abbiamo fatto nella definizione dell'esponenziale di un numero complesso, possiamo definire l'esponenziale di una matrice tramite una serie:

DEFINIZIONE (*Esponenziale di una matrice quadrata*): Data una matrice $n \times n$ A , il suo esponenziale e^A è la matrice $n \times n$ definita da

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

La convergenza della serie si deduce dalla convergenza della *serie delle norme* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}$. Ricordiamo infatti che lo spazio vettoriale

delle matrici $n \times n$ è uno spazio completo (isomorfo a \mathbf{R}^{n^2}), se lo dotiamo per esempio della norma ℓ^1 $\|A\| := \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$ (la quale soddisfa $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$).

L'esponenziale di matrici permette di risolvere sistemi lineari omogenei di equazioni del primo ordine:

PROPOSIZIONE (Sistemi di equazioni lineari e omogenee del primo ordine a coefficienti costanti): Sia A una matrice quadrata a coefficienti reali. Allora la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

è data da $x(t) = e^{tA}x_0$.

DIM.: Abbiamo, per definizione

$$e^{tA}x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x_0}{k!},$$

serie che converge totalmente (e quindi uniformemente) su qualunque intervallo compatto di \mathbf{R} . Inoltre, questa funzione soddisfa la condizione iniziale.

Siccome anche la *serie delle derivate* ha la stessa proprietà di convergenza totale, possiamo derivare termine a termine:

$$(e^{tA}x_0)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k x_0}{(k-1)!} = A \cdot e^{At}x_0$$

e la nostra candidata soluzione soddisfa l'equazione differenziale. Q.E.D.

Come si vede, se sappiamo calcolare l'esponenziale di matrici sappiamo anche risolvere i sistemi lineari. Vi sono molti metodi per farlo: accenneremo ora brevemente a *uno* di questi (che non è certo il più efficiente dal punto di vista numerico, ma è comunque istruttivo).

Cominciamo con l'enunciare alcuni semplici risultati sull'esponenziale di matrici: intanto, l'esponenziale di una matrice diagonale si calcola immediatamente. Infatti, se $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ si ha $A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$ e quindi $e^{tA} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, e^{t\lambda_2}, \dots, e^{t\lambda_n})$.

Questo consente di calcolare l'esponenziale di una matrice *diagonalizzabile* A : abbiamo infatti $A = TA'T^{-1}$, con A' diagonale e T invertibile. Allora si vede subito che $e^{tA} = Te^{tA'}T^{-1}$.

Vedremo dopo le feste come calcolare l'esponenziale di una matrice qualunque!

8 Lezione del 8/1/2010 (2 ore)

Cominciamo...bene l'anno 2010 dimostrando qualche proprietà elementare dell'esponenziale di matrici.

Una cosa che certamente ameremmo fosse vera è la seguente: $e^{A+B} = e^A e^B$. Questo purtroppo può essere falso... ma vale sempre quando le matrici *commutano*, cioè se $AB = BA$.

Per poterlo dimostrare, è necessario introdurre il *prodotto alla Cauchy* di due serie. Precisamente, abbiamo il seguente

TEOREMA (Prodotto alla Cauchy di due serie): Siano $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ due serie convergenti, la prima delle quali sia anche assolutamente convergente. Allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, ove

$$c_k := \sum_{h=0}^k a_h b_{k-h}$$

converge al prodotto delle due serie originali.

OSSERVAZIONE: Abbiamo enunciato il teorema per il prodotto di due serie a termini reali (o complessi). Esso però vale, con identica dimostrazione, anche per serie a termini matrici (se per "convergenza assoluta" intendiamo la convergenza della serie delle norme delle matrici): chi avrà la pazienza di seguire la dimostrazione, vedrà non si usa mai la commutatività del prodotto. L'unica proprietà che serve (e che è vera per le matrici) è il fatto che la norma del prodotto è minore o uguale al prodotto delle norme.

In classe, non abbiamo visto la dimostrazione del teorema. La riportiamo comunque in questi appunti. Ci serve un lemma:

LEMMA: Indichiamo con A_n, A, B_n, B la somma parziale e la somma delle serie di cui sopra, e con C_n le somme parziali della serie prodotto. Allora si ha

$$C_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} B_k.$$

DIM.: Abbiamo

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k} = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=k}^n b_{j-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n a_k B_{n-k} = \sum_{h=0}^n a_{n-h} B_h. \end{aligned}$$

ove abbiamo scambiato l'ordine delle due somme e, nell'ultimo passaggio, posto $h = n - k$. Q.E.D.

DIM. del Teorema: Dobbiamo far vedere che $C_n \rightarrow AB$. Abbiamo, ricordando il lemma

$$\begin{aligned} |C_n - AB| &= \left| \sum_{k=0}^n a_{n-k} B_k - AB \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^n a_{n-k} (B_k - B) + \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} - A \right) B \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^n a_{n-k} (B_k - B) + (A_n - A) B \right| \leq \\ &= \sum_{k=0}^{\nu} |a_{n-k}| |B_k - B| + \sum_{k=\nu+1}^{\infty} |a_{n-k}| |B_k - B| + |A_n - A| |B| \end{aligned}$$

ove $\nu < n$.

Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo ν in modo che $|B_k - B| < \varepsilon$, $|A_k - A| < \varepsilon$ per ogni $k \geq \nu$. Si ha allora, per ogni $n < \nu$

$$|C_n - AB| \leq \sum_{k=0}^{\nu} |a_{n-k}| |B_k - B| + \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + |B| \right).$$

Per stimare il primo termine a secondo membro, poniamo $M = \sup\{|B_k - B| : k \in \mathbf{N}\}$ e osserviamo che $|a_k| \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$ (termine generale di una serie convergente): ne segue che per k abbastanza grande si ha $|a_k| < \frac{\varepsilon}{\nu+1}$. Otteniamo dunque la seguente stima: per n abbastanza grande vale

$$|C_n - AB| \leq \varepsilon \left(M + \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + |B| \right).$$

Q.E.D.

Siamo ora in grado di dimostrare le seguenti proprietà dell'esponenziale di matrici:

PROPOSIZIONE (Proprietà elementari dell'esponenziale di matrici):

- (i) Se A è una matrice quadrata e T è una matrice invertibile, allora $e^{t(TAT^{-1})} = T e^{tA} T^{-1}$.
- (ii) Se A e B sono due matrici che commutano, ossia se $AB = BA$, allora $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$.

(iii) e^{tA} è invertibile e si ha $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

DIM.: La (i) è una conseguenza immediata della definizione, in quanto $(TAT^{-1})^k = TA^kT^{-1}$. La (iii) è una conseguenza immediata della (ii) prendendo $B = -A$: si ottiene infatti $I = e^0 = e^{tA} \cdot e^{-tA}$.

Mostrare che vale la (ii) è un po' più complicato e richiede l'uso del prodotto alla Cauchy di due serie di potenze. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k B^k}{k!} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} \frac{1}{(k-h)!} A^h B^{k-h} = \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} A^h B^{k-h} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A+B)^k = e^{t(A+B)}. \end{aligned}$$

dove si è usata la formula del binomio di Newton (che, come si verifica immediatamente, vale a patto che le matrici commutino). Q.E.D.

Ci sono matrici il cui esponenziale si calcola facilmente: per esempio, le matrici diagonali. Se $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ si ha $A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$ e quindi $e^{tA} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, e^{t\lambda_2}, \dots, e^{t\lambda_n})$. Questo consente di calcolare l'esponenziale di una matrice *diagonalizzabile* A : abbiamo infatti $A = T^{-1}A'T$, con A' diagonale e T invertibile. Allora e^{tA} si calcola subito usando la (i) della proposizione precedente.

Un risultato simile vale quando la matrice A è una matrice a *blocchi diagonali*, ossia una matrice che ha solo blocchi quadrati sulla diagonale: $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k)$, ove A_1, A_2, \dots, A_k sono matrici quadrate (non necessariamente della stessa dimensione). Allora $e^{tA} = \text{diag}(e^{tA_1}, e^{tA_2}, \dots, e^{tA_k})$.

È poi relativamente facile anche calcolare l'esponenziale di una Shift Matrix (o matrice nilpotente canonica), ossia una matrice $n \times n$ i cui soli termini non nulli sono sulla sopradiagonale e valgono tutti 1: $N = (\delta_{i,j-1})$. Si ha

$$N \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

per cui $N^n = 0$. Ne segue che l'esponenziale di N è in realtà una somma finita: $e^{tN} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k A^k}{k!}$. Dalle semplici espressioni di N^k , si vede anche che l'esponenziale di A è una altrettanto semplice matrice triangolare superiore a coefficienti polinomi...

ESEMPI:

1. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, allora $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$.
2. Esponenziale di una shift matrix 2x2: se $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ abbiamo $N^2 = 0$. Allora $e^{tN} = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si ha $B = 2I + N$. Siccome I commuta con tutto, abbiamo $e^{tB} = (e^{2t}I)e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$. Questo è un esempio di calcolo di esponenziale di un *blocco di Jordan* (vedi poco sotto).
4. Se $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, si ha $C^2 = C$. Scrivendo la serie si vede subito che $e^{tC} = I + (e^t - 1)C = \begin{pmatrix} e^t & e^t - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Questa matrice ci fornisce un esempio del fatto che non sempre $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$. Infatti $tC = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrici che non commutano e che hanno rispettivamente come esponenziali $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il prodotto di queste due matrici non coincide con e^{tC} .

Veniamo al caso generale: una qualunque matrice $n \times n$ A può essere ridotta in *forma canonica di Jordan*: esiste cioè una matrice invertibile T tale che $A = TA'T^{-1}$, ove $A' = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_h)$ e i *blocchi di Jordan* J_i sono blocchi quadrati (non necessariamente della stessa dimensione), ciascuno dei quali ha un coefficiente λ_i (numero complesso eventualmente nullo, uno degli autovalori della matrice) sulla diagonale, e degli 1 sulla sopradiagonale. Abbiamo cioè $J_i = \lambda_i I + N$, ove N è la shift matrix dello stesso ordine del blocco.

Ovviamente, per calcolare l'esponenziale di A basta calcolare quello di A' , che a sua volta si ricostruisce dall'esponenziale dei blocchi di Jordan. Infine, grazie al fatto che I ed N commutano, abbiamo che $e^{tJ_i} = e^{t\lambda_i}e^{tN}$.

ESEMPIO: Vediamo un semplice esempio con una matrice diagonalizzabile. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ha autovalori 2 e 3, ed è quindi diagona-

lizzabile: si ha infatti $A = TA'T^{-1}$ con $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,
 $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Allora $e^{tA} = Te^{tA'}T^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$.

Concludiamo questo discorsetto occupandoci della risoluzione di un sistema lineare a coefficienti costanti non omogeneo: si voglia risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) - Ax(t) = f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Moltiplicando l'equazione per e^{-tA} si ottiene

$$\frac{d}{dt} (e^{-tA}x(t)) = e^{-tA}f(t),$$

da cui integrando tra 0 e t otteniamo la formula risolutiva

$$x(t) = e^{tA}x_0 + e^{tA} \int_0^t e^{-sA}f(s) ds.$$

9 Lezione del 11/1/2010 (2 ore)

Archiviato l'esponenziale di matrici, come ultimo argomento di questo corso proponiamo un'introduzione elementare alla teoria delle serie di Fourier, con qualche semplice applicazione alla risoluzione di equazioni alle derivate parziali.

Il problema è in un certo senso analogo a quello delle serie di Taylor: in quel caso si voleva approssimare una funzione regolare con polinomi, mentre ora siamo interessati all'approssimazione di una funzione *periodica* con *polinomi trigonometrici*.

Ricordiamo che una funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è T -periodica se vale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Il *periodo* di f è allora il minimo valore di T per cui vale questa relazione.

Evidentemente, data una funzione periodica f non è restrittivo supporre che il suo periodo sia 2π : basta eventualmente comporre con il cambio di variabili $x \mapsto \frac{T}{2\pi}x$. Ora, le più semplici funzioni 2π -periodiche sono le funzioni $\sin x$ e $\cos x$: si tratta di funzioni diffusissime "in natura" (si pensi agli oscillatori armonici, ai circuiti *LC*, alla proiezione di un moto circolare uniforme sugli assi...). Per ottenere funzioni 2π -periodiche di forma "più complicata", possiamo divertirci a sommare alle funzioni seno e coseno altre oscillazioni sinusoidali di frequenza multipla: otteniamo così i *polinomi trigonometrici*:

DEFINIZIONE: Un *polinomio trigonometrico* è una funzione del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^N [a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

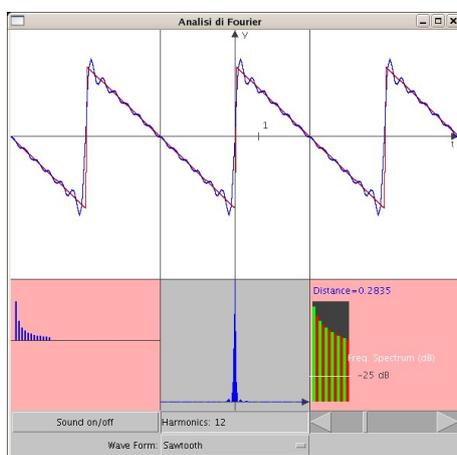
dove $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sono coefficienti reali. Più precisamente, l'espressione scritta sopra corrisponde ad un polinomio trigonometrico di *grado* $\leq N$.

L'idea di base delle serie di Fourier è che *ogni funzione sufficientemente regolare* si può scrivere come una serie, la cui somma parziale n -esima è un polinomio trigonometrico di “grado” n (per ogni n): in altre parole, data una “decente” funzione periodica di periodo 2π , $f(x)$, vorremmo poter scrivere

$$(*) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

con una scelta opportuna dei coefficienti a_n, b_n .

Come piccolo “test di plausibilità” sulla decomponibilità di una qualunque funzione in somma di sinusoidi, potete mettervi a giocare un po' con un programmino java³ che ho scritto proprio a questo scopo



Assodato che la decomposizione in somma di sinusoidi è possibile, non è difficile riuscire a “indovinare” come devono essere calcolati i coefficienti a_n e b_n affinché la (*) sia (sperabilmente) vera. Cominciamo con l’osservare che

³http://profs.sci.univr.it/~baldo/divulgazione/Fourier_bis/fourier.html

valgono le seguenti *relazioni di ortogonalità*: se $m, n \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}
 (***) \quad & \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \pi \delta_{mn}, \\
 & \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \pi \delta_{mn}, \\
 & \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0,
 \end{aligned}$$

dove δ_{mn} è il simbolo di Kronecker (vale 1 se $m = n$, 0 se $m \neq n$).

Per dimostrare le relazioni di ortogonalità, basta usare semplici identità come

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2} [\cos(n - m)x + \cos(n + m)x]$$

Ci si chiederà perché le relazioni scritte sopra si chiamino relazioni di ortogonalità. La ragione è abbastanza semplice:

DEFINIZIONE (Prodotto scalare e norma L^2): Sullo spazio vettoriale $\mathcal{C}^0(2\pi)$ delle funzioni continue e 2π -periodiche, possiamo definire il seguente prodotto scalare:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx.$$

È facile vedere che si tratta proprio di un prodotto scalare: è una forma bilineare, simmetrica e definita positiva. Le relazioni di ortogonalità dicono proprio che le funzioni trigonometriche sono mutuamente ortogonali rispetto a questo prodotto scalare.

A questo prodotto scalare corrisponde la cosiddetta *norma L^2* :

$$\|f\|_{L^2}^2 = \langle f, f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx.$$

Procediamo ora in maniera euristica. Supponiamo che valga la (*), moltiplichiamo ambo i membri dell'uguaglianza per $\cos kx$ (o per $\sin kx$) e integriamo tra $-\pi$ e π : se la convergenza della serie è sufficientemente "buona", è ragionevole attendersi che si possa scambiare il segno di integrale con quello di serie. Dalle relazioni di ortogonalità troviamo allora facilmente che deve essere

$$(**) \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Si noti che per rendere rigoroso questo ragionamento sarebbe necessario sapere che la serie converge uniformemente ad f , per poter scambiare i simboli di serie ed integrale... Il nostro punto di vista sarà però diverso: data una funzione f per cui sia possibile calcolare i coefficienti di Fourier a_k e b_k con le formule (**), scriviamo la serie di Fourier (*) *con quei coefficienti*, e ci chiediamo sotto quali condizioni essa converge, e converge proprio a $f(x)$.

Per poter dimostrare dei teoremi di convergenza, che vedremo la prossima volta, avremo bisogno di due lemmi. La dimostrazione del primo è lasciata come facile esercizio (si può fare per induzione su k , oppure scrivendo le funzioni trigonometriche con gli esponenziali complessi ed usando la formula per la somma della progressione geometrica).

LEMMA 1: Se $k = 1, 2, 3, \dots$, vale la seguente identità

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos k\alpha = \frac{\sin((k + \frac{1}{2})\alpha)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Grazie a questo lemma, possiamo ottenere facilmente un'espressione della somma parziale N -esima della serie di Fourier: se denotiamo con S_N tale somma parziale, ricordando la definizione (**) dei coefficienti di Fourier si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(y-x) \right] du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(u) \right] du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il cambio di variabili $u = y - x$ ed il Lemma 1.

Il seguente lemma ci darà poi una caratterizzazione molto espressiva della somma parziale N -esima di una serie di Fourier come *migliore approssimazione* di f con polinomi trigonometrici di grado $\leq N$, nel senso che si tratta del polinomio trigonometrico di grado $\leq N$ *più vicino ad f nella distanza definita dalla norma L^2* .

LEMMA2 (Disuguaglianza di Bessel): Sia f una funzione 2π -periodica, limitata ed integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Allora, indicati

con a_k, b_k i coefficienti di Fourier di f si ha

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt.$$

In particolare, i coefficienti di Fourier a_k e b_k tendono a zero per $k \rightarrow +\infty$.

DIM.: Indichiamo con $S_N(x)$ la somma parziale N -esima della serie di Fourier di f :

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

$S_n(x)$ è evidentemente un polinomio trigonometrico di grado $\leq N$. Notiamo che, grazie alle relazioni di ortogonalità, una *base ortonormale* (rispetto al prodotto scalare L^2) del sottospazio vettoriale dei polinomi trigonometrici di grado $\leq N$ è data dalle funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \text{ per } n = 1, \dots, N.$$

Se ne deduce immediatamente che $S_N(x)$ è la *proiezione ortogonale* della funzione f sul sottospazio dei polinomi trigonometrici di grado $\leq N$, in altre parole è il punto di tale sottospazio *più vicino a f* .

Infatti, se W è un sottospazio vettoriale e $\{w_1, w_2, \dots, w_K\}$ è una sua base ortonormale, si vede subito che la proiezione ortogonale di un vettore v su W è data da $p_W(v) = \sum_{k=1}^K \langle v, w_k \rangle w_k$ e che $\|p_W(v)\|^2 = \sum_{k=1}^K (\langle v, w_k \rangle)^2$. Nel nostro caso particolare, abbiamo

$$\begin{aligned} \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0 \\ \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt \right\rangle &= \sqrt{\pi} a_k \\ \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt \right\rangle &= \sqrt{\pi} b_k \end{aligned}$$

da cui otteniamo anche

$$\|S_N\|_{L^2}^2 = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right\}.$$

In particolare, visto che la proiezione riduce la norma:

$$\pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right\} = \|S_N\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

come volevasi dimostrare.

Lo stesso risultato si può ottenere con un brutalissimo conto diretto: lo vedremo la prossima volta.

10 Lezione del 13/1/2010 (2 ore)

Ridimostriamo la disuguaglianza di Bessel con un contazzo diretto:

Abbiamo

$$(A) \quad 0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_N(x)]^2 dx = \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N^2(x) dx - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_N(x) dx.$$

Ricordando le relazioni di ortogonalità (***) troviamo:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n^2 + b_n^2]$$

(perché gli integrali dei doppi prodotti si annullano tutti...), e tenendo conto anche della definizione (**) dei coefficienti di Fourier

$$-\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_N(x) dx = -2 \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n^2 + b_n^2] \right).$$

Sostituendo queste due identità in (A) e facendo tendere $N \rightarrow +\infty$ si ha subito la disuguaglianza voluta.

La disuguaglianza ci dice, in particolare, dice che le serie numeriche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ sono entrambe convergenti. Da questo (per la condizione necessaria di convergenza di una serie) segue che i coefficienti di Fourier devono tendere a 0 per $n \rightarrow +\infty$. Q.E.D.

Prima di enunciare e dimostrare un teorema di convergenza, spendiamo però due parole sull'estrema importanza applicativa delle serie di Fourier. In buona sostanza, esse ci permettono di scomporre un segnale periodico comunque complicato, nella somma di segnali sinusoidali di frequenza multipla di quella del segnale originale. Questo permette, per esempio, di costruire efficaci algoritmi di compressione di un segnale acustico (si pensi allo standard MP3), oppure di immagini (algoritmo JPEG: le immagini NON sono periodiche, ma una funzione definita su un intervallo può sempre essere prolungata periodicamente a tutta la retta reale...).

Fatto forse ancora più interessante, il nostro orecchio *sostanzialmente* non fa altro che calcolare i coefficienti di Fourier dei segnali acustici che gli arrivano: nella coclea (porzione dell'orecchio interno) ci sono dei gruppi di cellule specializzate, ciascuno dei quali è in grado di entrare in risonanza solo con un ristretto intervallo di frequenze... Utilizzando lo strumento teorico delle serie di Fourier, siamo quindi in grado di capire perché anche un bambino stonato è in grado di percepire un intervallo di ottava o di quinta: nella nota suonata da uno strumento musicale sono presenti (in varia misura, dipendente dal timbro dello strumento) anche le frequenze *multiple* di quella originale. Se suoniamo due note le cui frequenze stanno in rapporti semplici, vi sono “fin da subito” multipli comuni, per cui il nostro cervello è più che disposto a trovare gradevole l'accordo: si noti che la ragione è *fisiologica* e non semplicemente *culturale*...

Infine, come vedremo, le serie di Fourier sono utili nella soluzione di alcune importanti equazioni alle derivate parziali della fisica matematica: in effetti, è proprio questa la motivazione iniziale che ha portato alla loro introduzione (Fourier ha scritto la prima...serie di Fourier studiando il problema della conduzione del calore).

Un tipico risultato di convergenza per le serie di Fourier è il seguente:

TEOREMA (Convergenza delle serie di Fourier): Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione 2π -periodica derivabile con derivata continua. Allora la serie di Fourier di f converge a $f(x)$ per ogni x reale.

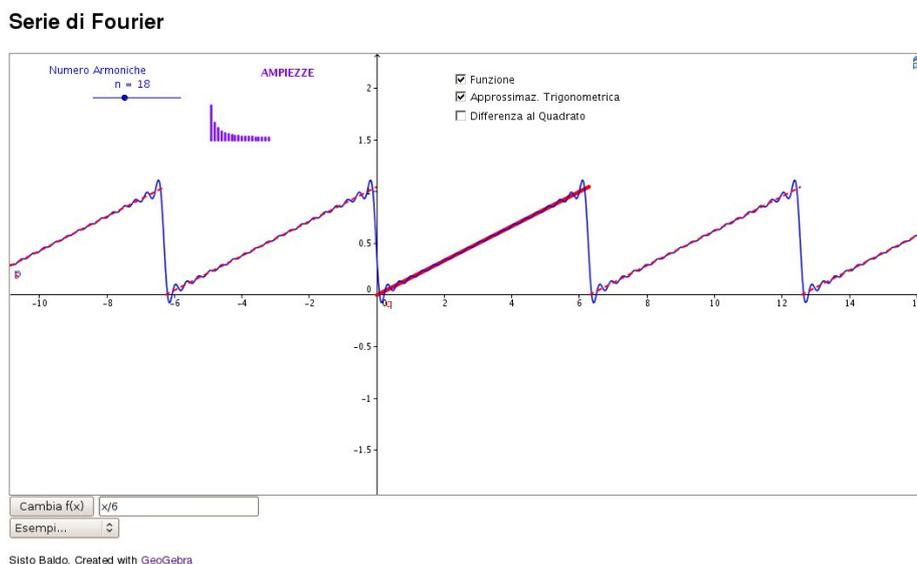
OSSERVAZIONE: Le ipotesi che abbiamo fatto su f sono piuttosto forti: infatti che per poter scrivere i coefficienti di Fourier di f , è sufficiente che la funzione sia limitata ed integrabile secondo Riemann in $[-\pi, \pi]$. D'altra parte, il teorema comprende un'ipotesi sulla *derivata* di f ...

In effetti, neanche la continuità di f sarebbe sufficiente a garantire la convergenza: esistono funzioni continue periodiche la cui serie di Fourier *non* converge in moltissimi punti, anche se è possibile (ma MOLTO difficile) dimostrare che vi è sempre convergenza in “quasi tutti” i punti (dove alla parola “quasi” si può dare un ben preciso significato matematico).

Il teorema si può però migliorare senza complicare eccessivamente la dimostrazione: si può far vedere che vi è convergenza della serie di Fourier ad $f(x)$ purché f sia *regolare a tratti*: supponiamo che in ogni periodo ci sia al più un numero finito di punti di discontinuità *di salto* (con limite destro e sinistro finiti sia per la funzione che per la derivata), più eventualmente un numero finito di punti angolosi (con derivata destra e sinistra finite ma diverse). In tutti gli altri punti la funzione deve essere derivabile con derivata

continua. Per una funzione siffatta, la serie di Fourier converge ad $f(x)$ in tutti i punti che non siano di salto. Nei punti di salto, la serie converge alla *media aritmetica* tra il limite destro e il limite sinistro.

Per sperimentare un po' sulla convergenza delle serie di Fourier, potete utilizzare un foglio GeoGebra⁴ che permette di visualizzare le somme parziali della serie di Fourier di una funzione data: ovviamente, i coefficienti di Fourier sono approssimati (con un metodo noto come DFT - discrete Fourier transform)! Il programma interpreta la funzione data dall'utente come la definizione della funzione periodica tra 0 e 2π (nel senso che la estende periodicamente fuori da tale intervallo).



DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI CONVERGENZA DELLE SERIE DI FOURIER: Cominciamo a dimostrare il teorema nel caso in cui $f(x)$ sia una funzione continua con derivata continua: vedremo poi come adattare la dimostrazione al caso generale di una funzione regolare a tratti.

Siccome si ha evidentemente

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(y) \right] dy = 1,$$

ricordando la formula integrale per $S_N(x)$ trovata la volta scorsa possiamo scrivere

$$(B) \quad S_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+y) - f(x)}{2 \sin \frac{y}{2}} \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) y dy.$$

⁴<http://profs.sci.univr.it/~baldo/divulgazione/dft/dft.html>

Poniamo allora

$$g(y) = \frac{f(x+y) - f(x)}{2 \sin \frac{y}{2}}.$$

Questa è una funzione continua su tutto l'intervallo di periodicità (in particolare, per $y \rightarrow 0$ la funzione tende a $f'(x)$), e la (B) diventa:

$$\begin{aligned} S_N(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin(y/2) \cos Ny \, dy + \\ &\quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos(y/2) \sin Ny \, dy. \end{aligned}$$

La disuguaglianza di Bessel ci dice infine che i due integrali nell'ultima formula tendono a 0 per $N \rightarrow +\infty$: si tratta infatti dei coefficienti di Fourier delle funzioni (continue) $g(y) \sin(y/2)$ e $g(y) \cos(y/2)$. Questo conclude la dimostrazione del teorema. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Vediamo come si può dimostrare il teorema di convergenza delle serie di Fourier nel caso generale di una funzione regolare a tratti. La nostra dimostrazione della volta scorsa funziona già per ogni x , tranne che nei punti di salto x_1, \dots, x_k (gli x_i). Infatti, se f soddisfa le ipotesi del teorema e x è un punto in cui la funzione è continua, la funzione $g(y)$ che abbiamo definito sopra non sarà continua, ma sarà comunque limitata ed integrabile secondo Riemann (perché possiede solo discontinuità di salto). Si noti che questo funziona anche nei punti angolosi! Possiamo dunque applicare la disuguaglianza di Bessel esattamente come prima.

Viceversa, sia x uno dei punti eccezionali, e denotiamo con $f(x^+)$ e $f(x^-)$ i limiti destro e sinistro di f in x . In questo caso, dobbiamo mostrare che

$$S_N(x) \rightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Siccome si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(y) \right] dy = \frac{1}{2},$$

avremo

$$\begin{aligned} S_N(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+y) - f(x^-)}{2 \sin \frac{y}{2}} \sin(N + \frac{1}{2})y \, dy + \\ &\quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+y) - f(x^+)}{2 \sin \frac{y}{2}} \sin(N + \frac{1}{2})y \, dy. \end{aligned}$$

Se guardiamo le frazioni nei due integrali come funzioni di y , esse hanno solo discontinuità di salto (nel punto $y = 0$ questo succede perché esistono finiti

i limiti destro e sinistro di f' in x): esse sono dunque limitate e integrabili secondo Riemann, e la dimostrazione può essere conclusa esattamente come prima.

Vediamo subito un esempio di applicazione del teorema di convergenza per le serie di Fourier.

ESEMPIO: Consideriamo, sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, la funzione $f(x) = |x|$, e la prolunghiamo per periodicità a tutta la retta reale. Otteniamo in questo modo una funzione pari il cui grafico è un'onda triangolare...

La funzione $f(x)$ così definita è evidentemente regolare a tratti, per cui soddisfa le ipotesi del teorema di convergenza. Utilizzando le formule per i coefficienti di Fourier troviamo subito che $b_n = 0$ (la funzione è pari), mentre

$$a_n = \begin{cases} \pi & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari } > 0, \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

di conseguenza possiamo scrivere

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

In particolare, usando questa identità per $x = 0$ abbiamo scoperto che la somma della serie dei reciproci dei quadrati dei numeri dispari è $\frac{\pi^2}{8}$, e da questo abbiamo poi ricavato che la somma dei reciproci dei quadrati di *tutti* i numeri naturali è $\frac{\pi^2}{6}$.

ESEMPIO: Si consideri la funzione periodica di periodo 2π definita, nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ da

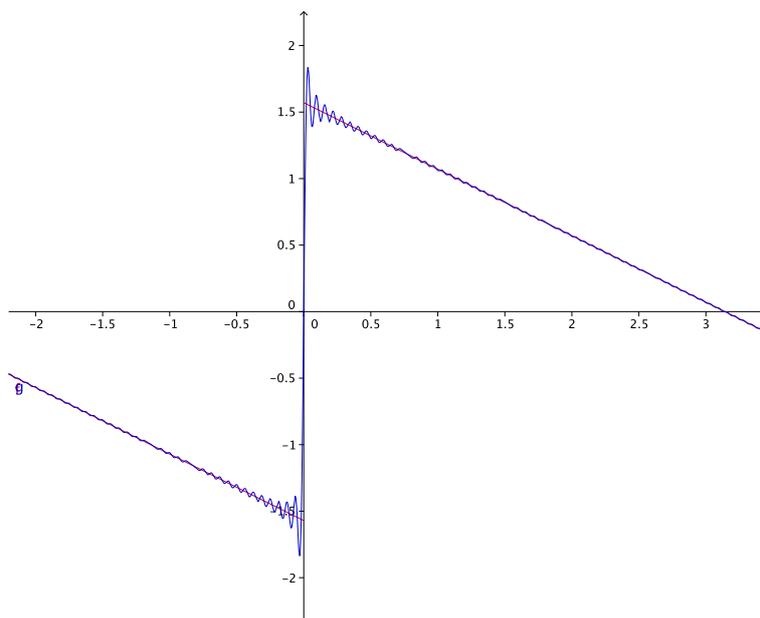
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & \text{se } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Questa funzione *a dente di sega* è dispari, per cui $a_k = 0$ per ogni k . Invece si vede subito che $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{k}$. La serie di Fourier è dunque

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx.$$

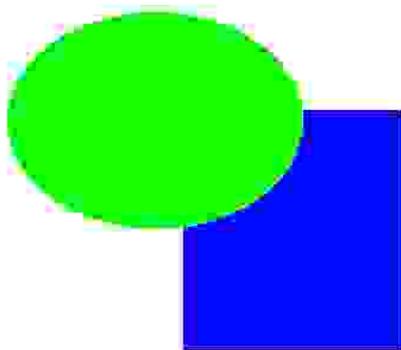
Essa converge puntualmente a f tranne che in 0, punto nel quale converge a 0 (media dei limiti destro e sinistro di f).

Ecco un foglio GeoGebra che mostra il grafico della funzione f e delle somme parziali fino all'ordine 100 della sua serie di Fourier:



Dal grafico, si riesce ad intuire abbastanza bene la convergenza della serie. Si nota anche chiaramente che *la convergenza è nettamente peggiore vicino al punto di salto $x = 0$.*

Questa “cattiva” convergenza vicino ai salti è nota come *fenomeno di Gibbs*. Essa è anche la causa degli *artefatti* che si notano talvolta nelle immagini (e nei file audio e/o video) compressi con tecnologie che impiegano (varianti discrete delle) serie di Fourier. Si osservi per esempio la seguente immagine salvata in formato JPEG con un rapporto di compressione eccessivo: ci sono degli evidenti artefatti di compressione vicino ai bordi degli oggetti.



11 Lezione del 15/1/2010 (2 ore)

Un'altra cosa che si intuisce dal grafico della funzione a dente di sega e della sua somma parziale di Fourier, è che *probabilmente* si ha convergenza uniforme su insiemi compatti che non contengano i punti di salto. Questa è una cosa che ci servirà nel seguito, per cui vale la pena di dimostrarla: facciamo vedere che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$ converge uniformemente alla funzione a dente di sega sugli insiemi del tipo $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$, con $\delta > 0$.

Prendiamo la somma parziale n -esima $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin kx$: moltiplicando ambo i membri per $\sin(x/2)$ ed usando le formule di addizione si ottiene

$$S_n(x) \sin(x/2) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (\cos(k-1/2)x - \cos(k+1/2)x).$$

Con semplici manipolazioni otteniamo allora, per $m < n$:

$$\begin{aligned} (S_n(x) - S_m(x)) \sin(x/2) &= \\ \frac{1}{m+1} \cos(m+1/2)x - \frac{1}{n} \cos(n+1/2)x + \sum_{k=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \cos(k+1/2)x. \end{aligned}$$

Se passiamo al limite per $n \rightarrow +\infty$ e chiamiamo $R_m(x)$ il resto m -esimo della serie, otteniamo

$$|R_m(x) \sin(x/2)| \leq \frac{1}{m+1} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{2}{m+1}$$

per cui, sull'insieme scritto sopra avremo

$$\|R_m(x)\|_{\infty} \leq \frac{2}{(m+1) \sin(\delta/2)} \rightarrow 0 :$$

abbiamo convergenza uniforme!

Si noti che un risultato analogo vale per la serie di Fourier della funzione $g(x) = \frac{k}{\pi} f(x - x_0)$ (dove f è ancora la funzione a dente di sega). La funzione g ha un salto (di ampiezza k) nel punto x_0 , e la sua serie di Fourier converge uniformemente sui compatti che non contengono punti di salto per g : è infatti facile vedere che la serie di Fourier della traslata è la traslata della serie di Fourier!

Sommando funzioni di questo tipo, possiamo ottenere degli "esempi" di funzioni regolari a tratti che hanno un numero finito (qualunque) salti di

ampiezza prescritta in punti prescritti del periodo: anche per queste funzioni, la serie di Fourier converge uniformemente sui compatti che non contengono punti di salto. Questa osservazione sarà cruciale nel seguito per dimostrare il seguente:

TEOREMA (Convergenza uniforme delle serie di Fourier): Sia f una funzione 2π -periodica e regolare a tratti, K un insieme compatto che non contiene punti di salto per f . Allora la serie di Fourier di f converge ad f uniformemente in K .

DIM.: Dimostriamo dapprima il teorema nel caso in cui f , oltre che regolare a tratti, sia anche *continua*. In questo caso possiamo dimostrare che si ha convergenza uniforme sul periodo $[-\pi, \pi]$.

Siccome abbiamo già convergenza puntuale, ci basta mostrare che la serie converge *totalmente*. A questo scopo, consideriamo i coefficienti di Fourier α_k , β_k della *derivata* f' : questa è una funzione continua a tratti con un numero finito di salti, per cui i coefficienti esistono e soddisfano la disuguaglianza di Bessel. Inoltre, spezzando il periodo negli intervallini in cui f' è continua ed usando continuità e periodicità di f , vediamo anche che è possibile integrare per parti ottenendo:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos kt \, dt = \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt = kb_k,$$

dove b_k sono i coefficienti di Fourier seno di f . In maniera del tutto analoga, $\beta_k = -ka_k$, con a_k i coefficienti di Fourier coseno di f .

Dalla disuguaglianza di Bessel applicata a f' abbiamo allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 [a_k^2 + b_k^2] < +\infty.$$

Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in \mathbf{R}^N abbiamo allora:

$$\sum_{k=1}^N \|a_k \cos kx\|_{\infty} \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} |a_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 \right)^{1/2}.$$

Passando al limite per $N \rightarrow +\infty$, vediamo che la serie $\sum_{k=1}^N a_k \cos kx$ converge totalmente. In maniera del tutto analoga,

$$\sum_{k=1}^N \|b_k \cos kx\|_{\infty} \leq +\infty :$$

la serie di Fourier converge allora totalmente e quindi uniformemente. Il limite è ovviamente f perché sappiamo già che vi è convergenza puntuale.

Passiamo al caso generale in cui f è regolare a tratti ma possiede un numero finito di punti di salto in ogni periodo. Abbiamo visto sopra che sommando opportune funzioni a dente di sega, possiamo ottenere una funzione $g(x)$ regolare a tratti, con punti di salto che coincidono con quelli di f e di ampiezza uguale a quelli di f .

Inoltre, abbiamo dimostrato “manualmente” che la serie di Fourier di g converge uniformemente sui compatti che non contengono punti di salto. La funzione $f(x) - g(x)$ è continua e regolare a tratti: la sua serie di Fourier converge uniformemente. Per differenza, se ne deduce che la serie di Fourier di f converge uniformemente sui compatti che non contengono salti. Q.E.D.

L'ultimo risultato che vedremo sulla convergenza delle serie di Fourier riguarda la loro convergenza in norma L^2 :

TEOREMA (convergenza in L^2 delle serie di Fourier): Sia f una funzione 2π -periodica ed integrabile secondo Riemann nel periodo. Allora la serie di Fourier di f converge ad f in norma L^2 : se S_N denota la somma parziale N -esima della serie di Fourier, allora

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N - f\|_{L^2} = 0.$$

DIM.: Per la dimostrazione daremo per buono il seguente risultato di analisi funzionale: ogni funzione f come nelle ipotesi può essere approssimata in norma L^2 con funzioni periodiche di classe \mathcal{C}^1 . In altre parole, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione di classe \mathcal{C}^1 e 2π -periodica g tale che $\|f - g\|_{L^2} < \varepsilon/2$. La serie di Fourier di g , grazie al risultato precedente, converge uniformemente: se denotiamo con \tilde{S}_N la somma parziale N -esima della serie di Fourier di g , esiste ν tale che per $N \geq \nu$ vale

$$\|g - \tilde{S}_N\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}.$$

Ma allora

$$\|g - \tilde{S}_N\|_{L^2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f - g|^2 \right)^{1/2} \leq (2\pi \|f - g\|_{\infty}^2)^{1/2} < \varepsilon/2.$$

Infine, sempre per $N \geq \nu$:

$$\|f - S_N\|_{L^2} \leq \|f - \tilde{S}_N\|_{L^2} \leq \|f - g\|_{L^2} + \|g - \tilde{S}_N\|_{L^2} < \varepsilon.$$

La prima disuguaglianza viene dal fatto che S_N è il polinomio trigonometrico di grado $\leq N$ più vicino ad f rispetto alla distanza L^2 (si riveda la dimostrazione della disuguaglianza di Bessel). Q.E.D.

Nel risultato di convergenza in L^2 , le ipotesi sono molto meno restrittive che per il risultato di convergenza puntuale: in realtà basterebbe molto meno. Ad esempio, il risultato vale anche se f è illimitata, a patto che abbia norma L^2 finita.

Purtroppo, però, la convergenza in L^2 non implica la convergenza puntuale. D'altra parte, si può far vedere che la serie di Fourier di una funzione che soddisfa le ipotesi dell'ultimo teorema converge puntualmente *in quasi tutti i punti*, cioè si ha convergenza puntuale al di fuori di un insieme di *misura di Lebesgue* 0. Si tratta di un risultato molto profondo e difficile da dimostrare: fin dalla prima metà del '900 era ben noto che esistono funzioni continue la cui serie di Fourier non converge in qualche punto, e persino in un insieme denso di punti. La convergenza quasi ovunque, però, venne provata solo nel 1966 dal matematico svedese L. Carleson... mentre una parte consistente della comunità matematica mondiale stava tentando di produrre dei controesempi!

12 Lezione del 18/1/2010 (2 ore)

Ci rimane da fare un'ultimissima osservazione sul teorema di convergenza in L^2 visto la volta scorsa: tenuto conto dei conti che abbiamo visto quando abbiamo dimostrato la disuguaglianza di Bessel, si vede subito che per ogni f che sia 2π -periodica ed integrabile nel periodo vale l'uguaglianza

$$\|f\|_{L^2}^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right),$$

nota come *identità di Parseval*: la disuguaglianza di Bessel è in realtà un'uguaglianza!

Come argomento finale del corso, vogliamo mettere a frutto le serie di Fourier per risolvere alcuni problemi che coinvolgono equazioni alle derivate parziali.

Il primo esempio che vogliamo considerare è quello dell'*equazione del calore*: vogliamo trovare una funzione $u(t, x)$ che soddisfi il problema

$$(*) \quad \begin{cases} u_t = k u_{xx} & \text{se } 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

La funzione $u(x, t)$ rappresenta la *temperatura*, nella posizione x ed al tempo t , di una sbarra metallica di lunghezza π che giace sull'asse delle x tra

$x = 0$ e $x = \pi$. La seconda equazione ci dice che gli estremi della sbarra sono tenuti a temperatura 0 (valori al contorno), la terza equazione che la temperatura iniziale in posizione x è data da una funzione nota $f(x)$ (condizione iniziale). Infine, la prima equazione è un'equazione alle derivate parziali nota, appunto, come *equazione del calore*: essa descrive l'evoluzione temporale della temperatura in un corpo unidimensionale conduttore di calore.

Per risolvere il nostro *problema ai valori iniziali ed al contorno*, usiamo il *metodo della separazione delle variabili*. Cominciamo a cercare soluzioni non banali dell'equazione differenziale che siano a variabili separate, ossia del tipo $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ (prodotto di una funzione della sola x e di una della sola t). Visto che abbiamo condizioni al contorno nulle, è naturale imporre anche che $X(0) = X(\pi) = 0$.

Sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo $XT' = kX''T$, da cui $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT}$. In quest'ultima equazione, a primo membro abbiamo una funzione della sola x , a destra una funzione della sola t : i due membri dell'equazione devono allora essere costanti, ossia deve essere

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

In particolare abbiamo $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, equazione lineare omogenea che si risolve immediatamente. Se $\lambda < 0$, la soluzione generale è $X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$: imponendo le condizioni al contorno troviamo $A = B = 0$, per cui non c'è solo la soluzione nulla. Se $\lambda = 0$ abbiamo $X(x) = A + Bx$ e imponendo le condizioni al contorno troviamo ancora $A = B = 0$.

Infine, se $\lambda > 0$, la soluzione generale dell'equazione è $X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x$. La condizione $X(0) = 0$ implica $A = 0$, mentre la seconda condizione diventa $B \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$. Possiamo prendere $B \neq 0$ se e solo se $\sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$, cioè se $\lambda = n^2$ con $n = 1, 2, 3, \dots$. In questi casi, troviamo le seguenti soluzioni non nulle:

$$X(x) = B \sin(n\lambda x).$$

Le corrispondenti equazioni per $T(t)$ sono $T'(t) = -kn^2T(t)$, che hanno soluzione $T(t) = Ce^{-kn^2t}$.

In conclusione, le sole soluzioni non banali a variabili separate sono date da

$$u_n(x, t) = Be^{-kn^2t} \sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Vogliamo provare a trovare una soluzione del nostro problema in forma di *serie* di queste soluzioni a variabili separate: vogliamo scrivere

$$(**) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-kn^2t} \sin nx,$$

ove ovviamente i coefficienti b_n devono essere scelti in modo da soddisfare la condizione iniziale e *speriamo che la serie converga, e converga proprio ad una soluzione del problema (*)!*

Per trovare i coefficienti b_n , osserviamo che

$$(***) \quad f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \dots$$

e il secondo membro ha tutta l'aria di una serie di Fourier di una funzione dispari! Estendiamo allora f ad una funzione 2π -periodica e dispari: i suoi coefficienti di Fourier sono dati da

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

e con questa scelta dei coefficienti la condizione iniziale (***) è soddisfatta purché f sia abbastanza regolare: per esempio, regolare a tratti e continua in modo da avere convergenza uniforme della serie con $t = 0$ al dato iniziale. In effetti, con questa ipotesi la serie di due variabili (**) converge totalmente sulla striscia $[0, \pi] \times [0, +\infty)$: la serie delle norme è maggiorata da $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$, che è convergente (si riveda la dimostrazione del teorema di convergenza uniforme!). In particolare, la somma $u(x, t)$ della serie è continua sulla striscia e la condizione iniziale è genuinamente soddisfatta!

Si noti, in particolare, che i coefficienti di Fourier b_n tendono a 0 e sono quindi limitati da una certa costante M .

Le condizioni al contorno sono evidentemente soddisfatte: ci manca “solo” da mostrare che la funzione $u(x, t)$ definita dalla serie (**) è regolare per $t > 0$ e soddisfa effettivamente l'equazione del calore!

Consideriamo, sul rettangolo $[0, \pi] \times [\tau, T]$ con $0 < \tau < T$, la convergenza totale delle serie che si ottengono derivando termine a termine la (**) una volta rispetto a t o due volte rispetto a x (vale a dire, le due serie che si ottengono calcolando formalmente u_t e u_{xx}). Le relative serie delle norme sono dominate (a meno di una costante moltiplicativa k nel caso di u_t) dalla serie convergente

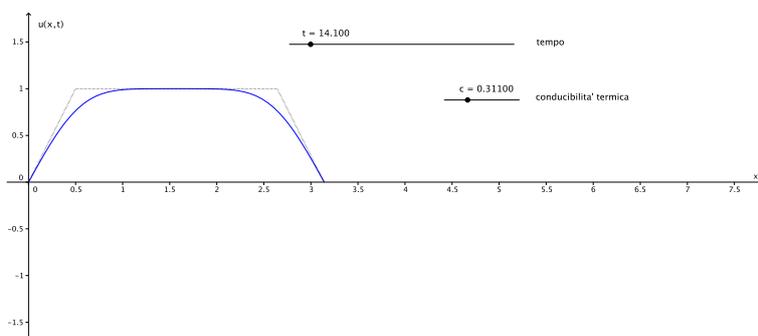
$$M \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-kn^2\tau} < +\infty,$$

per cui si ha convergenza totale. La derivazione termine a termine è allora lecita, e (**) fornisce effettivamente una soluzione del nostro problema.

Il ragionamento appena fatto mostra la proprietà *regolarizzante* dell'equazione del calore: anche se il dato iniziale $f(x)$ è non derivabile, o persi-

no discontinuo in qualche punto, la soluzione (**) diventa immediatamente regolare per tempi positivi⁵.

Ecco un foglio GeoGebra che mostra un'animazione delle soluzioni dell'equazione del calore:



Tecniche molto simili si possono usare per risolvere l'equazione della corda vibrante (o equazione delle onde unidimensionale), cioè il problema

$$(V) \quad \begin{cases} u_{tt} = cu_{xx} & \text{se } 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Questo problema descrive il movimento di una corda vibrante che a riposo giace sull'asse delle x tra 0 e π : $u(x, t)$ rappresenta lo spostamento verticale (rispetto a 0) del punto della corda di ascissa x , al tempo t . Le condizioni al contorno $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ dicono che gli estremi della corda sono fissati, $f(x)$ rappresenta la *posizione iniziale* della corda, mentre l'ultima condizione dice che la corda viene lasciata andare con velocità iniziale nulla (problema della *corda pizzicata*).

Procediamo ancora per separazione di variabili, cercando soluzioni non banali dell'equazione alle derivate parziali della forma $u(x, t) = X(x)T(t)$: otteniamo le equazioni

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda.$$

La prima equazione è esattamente quella di prima: abbiamo soluzioni non banali del tipo $X(x) = B \sin nx$ se e solo se $\lambda = n^2$. La corrispondente equazione per T è $T'' + n^2 c^2 T = 0$ con la condizione $T'(0) = 0$ (proveniente

⁵In realtà, con ragionamenti del tutto analoghi a quelli fatti sopra, si vede che le serie delle derivate di qualunque ordine convergono totalmente sul rettangolo $[0, \pi] \times [\tau, T]$: la soluzione è di classe C^∞

dalla condizione su u_t): le soluzioni a variabili separate sono allora $u_n(x, t) = B \sin nx \cos cnt$ e cerchiamo di scrivere la soluzione del problema (V) come serie

$$(VI) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin nx \cos cnt.$$

Ancora una volta, affinché sia soddisfatta la condizione iniziale $f(x)$ dovremo scegliere $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$.

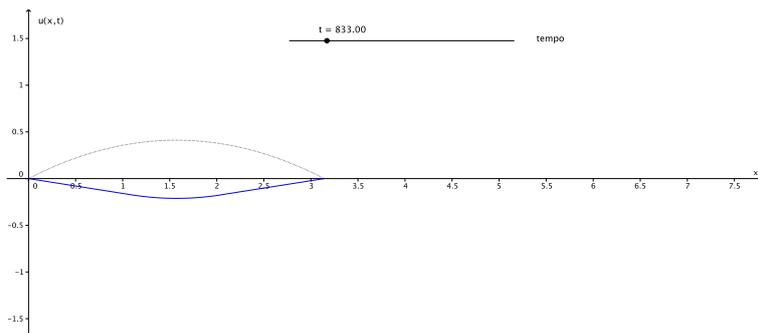
Mostriamo che, sotto opportune ipotesi su f , la serie (VI) fornisce effettivamente una soluzione del nostro problema. Per non avere problemi, supponiamo che f sia estendibile ad una funzione 2π -periodica e dispari di classe almeno C^3 . La disuguaglianza di Bessel applicata alla derivata terza ci garantisce che $\sum_{k=1}^{\infty} k^6 |b_k|^2 < +\infty$ (si integri per parti 3 volte...).

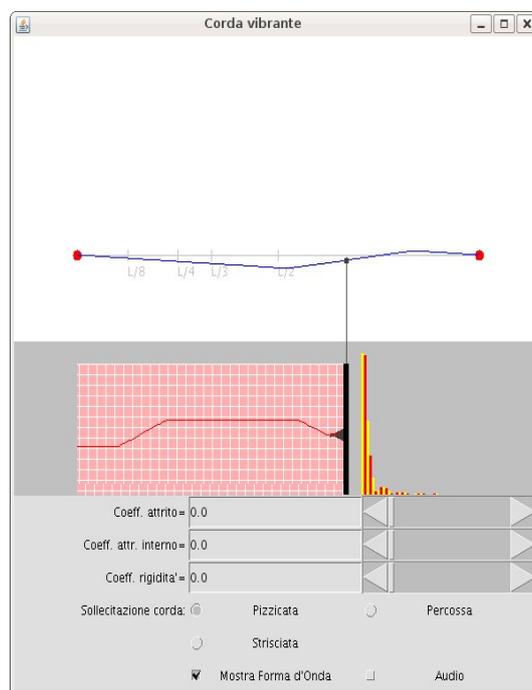
Si ha ovviamente convergenza totale della serie (VI) su tutta la striscia $[0, \pi] \times [0, +\infty]$: la somma è una funzione continua che soddisfa la condizione iniziale e le condizioni al contorno. Per verificare che vale l'equazione, calcoliamo formalmente u_{tt} e u_{xx} derivando termine a termine la serie e verifichiamo che vi è convergenza totale: le serie derivate sono dominate da

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} k^3 |b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^6 |b_k|^2 \right)^{1/2} < +\infty,$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Ecco un foglio GeoGebra che mostra un'animazione delle soluzioni dell'equazione delle onde:





Concludo mostrandovi una simulazione di corda vibrante, scritta in java, che permette di osservare il moto della corda pizzicata con un modello leggermente più completo, che tiene conto anche di effetti di smorzamento e di rigidità. Selezionando le apposite caselle, è possibile anche vedere ed ascoltare la forma d'onda generata.