Università degli Studi di Verona

Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 1 - 30/6/2009

1. Si enunci una a scelta delle versioni del Teorema di Taylor viste durante il corso.

2. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una successione reale *limitata*. Allora

$\square$ $\{a_n\}$ assume soltanto un numero finito di valori;

$\square$ $\{a_n\}$ ammette limite finito;

$\boxtimes$ $\{a_n\}$ ha certamente una sottosuccessione di Cauchy;

$\square$ $\{a_n\}$ è di Cauchy;

3. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Definiamo, per ogni $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = \int_0^{x^2} f(t)\, dt$. Allora

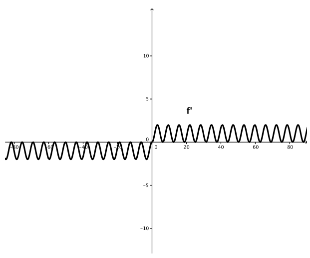
$\square$ $g'(x) = f(x)$;

$\boxtimes$ $g'(x) = 2x\, f(x^2)$;

$\square$ $g'(x) = f(x^2) - f(0)$;

$\square$ $g'(x) = f(x^2)$;

4. Quale delle seguenti affermazioni è corretta se il grafico rappresenta la derivata prima di una certa funzione f?



$\square$ f ha un massimo assoluto per $x = 0$;

$\square$ f è crescente sull'intera retta reale;

$\boxtimes$ f ha un minimo assoluto per $x = 0$;

$\square$ f è convessa sull'intera retta reale;

5. Sia $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una funzione continua. Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ e l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$

- ☐ hanno sempre lo stesso comportamento;
- ☒ hanno certamente lo stesso comportamento se sappiamo che f è decrescente;
- ☐ hanno lo stesso comportamento se e soltanto se f è decrescente;
- ☐ non hanno mai lo stesso comportamento;

N.B.: L'espressione "hanno lo stesso comportamento" significa che i due oggetti convergono entrambi, oppure divergono entrambi a $+\infty$.

6. Si calcoli almeno uno dei due limiti seguenti (se esistono)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - \sin x^2 + x^4/3}{x^6}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \log(1 + \sin^2 x) + x^3}{(1 + x)^5}.$$

7. Si studi la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 2}\right)$$

e se ne tracci il grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

8. Si studi l'invertibilità della funzione $f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\arctan(x)$ tra la semiretta $[0, +\infty)$ e la sua immagine. L'eventuale funzione inversa è ovunque derivabile?

9. Si calcoli il primo dei seguenti integrali impropri e si studi la convergenza del secondo:

$$\int_0^1 (1 + x) \log x \, dx, \qquad \int_0^1 e^x \log x \, dx.$$

10. Si studi, al variare del parametro x, la convergenza di almeno una delle due serie seguenti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{(n+1)^{3/2}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\log n} x^n.$$

Soluzioni:

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Il primo limite si ottiene facilmente usando gli sviluppi di Taylor del seno: si ha $\sin^2 x - \sin(x^2) + x^4/3 = \frac{19}{90}x^6 + o(x^6)$, per cui il limite vale 19/90.

Il secondo limite invece vale 0: lo si ottiene dividendo numeratore e denominatore per x^5 (ed osservando che $\log(1 + \sin^2 x)$ è una funzione limitata).

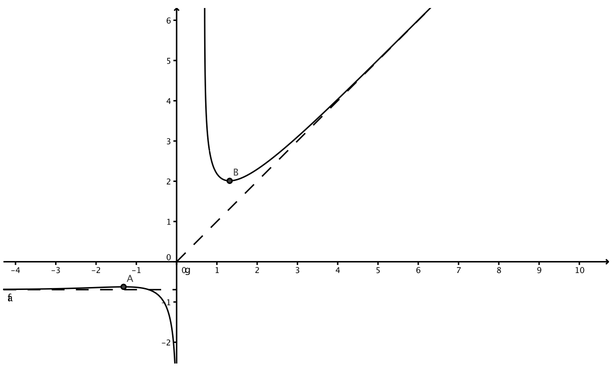
7 Il dominio della funzione è costituito dagli x per cui l-argomento del logaritmo è positivo: questo corrisponde alle semirette $x < 0$ e $x > \log 2$. Studiando dove l'argomento del logaritmo è maggiore di 1, si trova invece che la funzione è negativa per $x < 0$ e positiva per $x > \log 2$. Essa tende a $-\infty$ per $x \to 0^-$, a $+\infty$ per $x \to \log 2^+$, a $-\log 2$ per $x \to -\infty$ e a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Volendo, si può anche osservare che la retta $y = x$ è un asintoto obliquo destro per la nostra funzione.

Per quanto riguarda la derivata, si ha

$$f'(x) = \frac{e^x}{(e^{2x} - 1)(e^x - 2)}(e^{2x} - 4e^x + 1).$$

La frazione è positiva nel dominio della funzione, mentre l'ultimo fattore si annulla per $x = \log(2 - \sqrt{(3)})$ (massimo relativo) e per $x = \log(2 + \sqrt{(3)})$ (minimo relativo).

Il grafico chiesto è quindi quello della seguente figura:



8 La derivata della funzione, che è ben definita e continua sulla semiretta data, vale

$$f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{2(1+x)^2(1+x^2)},$$

funzione ovunque negativa sulla semiretta tranne che per $x = 1$ dove si annulla. Se ne deduce che f è strettamente decrescente e quindi invertibile.

La funzione inversa è derivabile in $f(x)$ ogniqualvolta $f'(x) \neq 0$, mentre non è derivabile in $f(1) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}$ (dove il grafico della funzione inversa ha tangente verticale).

9 Una primitiva della prima funzione integranda (che si trova subito integrando per parti) è $(x + x^2/2)\log x - x - x^2/4$. Se ne ricava subito (facendo l'opportuno limite) che il primo integrale vale $-5/4$.

Per studiare il secondo integrale, osserviamo che la funzione è negativa nell'intervallo di integrazione. Essa è poi asintotica alla funzione $\log x$ per $x \to 0^+$: quest'ultima funzione ha integrale improprio convergente (di calcolo immediato), quindi anche quello della funzione data converge.

10 Per la prima serie abbiamo $\left|\frac{\sin n}{(n+1)^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$: la serie converge assolutamente per confronto con una serie armonica generalizzata di esponente $3/2$.

Nel secondo caso, possiamo trovare il raggio di convergenza con il criterio della radice: scrivendo

$$\sqrt[n]{n^{-\log n}} = e^{\frac{-\log^2 n}{n}} \to 1$$

otteniamo che la nostra serie di potenze ha raggio di convergenza 1.

Per $x = 1$, il termine generale della serie è $n^{-\log n}$. Poiché per n abbastanza grande si ha $\log n > 2$, possiamo confrontare la nostra serie con una serie armonica generalizzata di esponente 2, e si ha convergenza.

Per $x = -1$, la serie dei moduli coincide con quella che si ha per $x = 1$: la serie converge assolutamente. In conclusione, la nostra serie converge per $x \in [-1, 1]$.