Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVETTA DI ANALISI MATEMATICA 1 - 16/4/2009

ESERCIZI DI RECUPERO DELLA PRIMA PROVETTA

REGOLE: *Le soluzioni degli esercizi di recupero devono essere consegnate SEPARATAMENTE da quelle degli esercizi relativi alla seconda parta del corso, su fogli completi di nome e numero di matricola. La prima provetta si considera annullata, qualunque ne sia stato l'esito, per chi consegna le soluzioni degli esercizi di recupero.*

RECUPERO.1 Si calcoli almeno uno dei limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(\sin 3x))\log(1+x)}{x^2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+x^3+7x^2}{e^{2x}(1+\log x)+3e^x}$$

RECUPERO.2 Si studi la seguente funzione tra 0 e 2π:

$$f(x) = \log|\sin(x)| + x$$

e se ne tracci un grafico il più dettagliato possibile. Si precisi, in particolare, se la funzione ammette massimo assoluto nell'intervallo assegnato, e se ne calcoli eventualmente il valore.

RECUPERO.3 Data la funzione $g(x) = 3x^2 + \cos x$, si provi che essa ammette minimo assoluto in 0.

Usando eventualmente quel che si è trovato per g, si calcolino il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x) = x^3 + \sin x$ nell'intervallo $[0, 2]$.

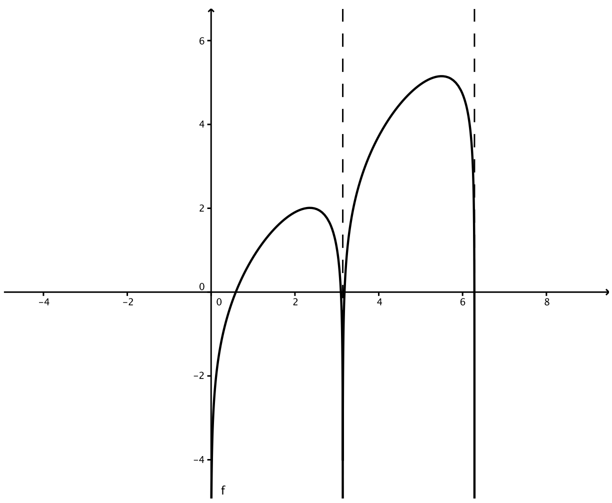
Soluzioni esercizi di recupero:

Recupero.1 Il primo limite si ottiene facilmente dai limiti fondamentali $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $\frac{\log(1+x)}{x} \to 1$ per $x \to 0$: basta riscrivere la funzione nel modo seguente

$$\frac{\sin(\sin(\sin 3x))}{\sin(\sin(3x))} \cdot \frac{\sin(\sin(3x))}{3x} \cdot 3 \cdot \frac{\log(1+x)}{x} \to 3$$

Per calcolare il secondo limite, si dividano numeratore e denominatore per e^{3x}: il numeratore tende allora a 1, mentre il denominatore tende a $+\infty$ (grazie al logaritmo). Il limite voluto vale dunque 0.

Recupero.2 Nell'intervallo assegnato per lo studio vi sono tre punti che non fanno parte del dominio della funzione: $0, \pi, 2\pi$. Per x che tende a ciascuno di questi punti la funzione tende a $-\infty$. Si ha poi $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} + 1 = \operatorname{cotg} x + 1$: la derivata prima si annulla per $x = 3/4\pi$ e per $x = 7/4\pi$ ed è positiva negli intervalli $(0, 3/4\pi)$,$(\pi, 7/4\pi)$. I punti critici sono dunque di massimo relativo, $x = 7/4\pi$ è anche di massimo assoluto (come si desume valutando la funzione nei due punti di estremo). Si ha poi $f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$, per cui la funzione è concava su ciascuno dei due intervalli $(0, \pi)$ e $(\pi, 2\pi)$. Il grafico della funzione è quello in figura:



Il valore del massimo è $\log(\frac{\sqrt{2}}{2}) + 7/8\pi$.

Recupero.3 Si ha $g'(x) = 6x - \sin x$, $g''(x) = 6 - \cos x$. La derivata seconda è sempre positiva, per cui $g'(x)$ è strettamente crescente. Poiché $g'(0) = 0$, se ne deduce che $g'(x)$ è negativo per $x < 0$, positivo per $x > 0$. 0 è quindi un punto di minimo assoluto perché g è decrescente a sinistra di quel punto, crescente a destra. In particolare, g è sempre positiva perché $g(0) = 1$.

Abbiamo poi $f'(x) = g(x) \geq 1$. Ne segue che f è strettamente crescente, per cui il minimo sull'intervallo assegnato è $f(0) = 0$, il massimo è $f(2) = 8 + \sin 2$.

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVETTA DI ANALISI MATEMATICA 1 - 16/4/2009

Tipologia A

1 Si enunci con la dovuta precisione il teorema della media integrale.

2 Si osservi il seguente calcolo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{M \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-M}^{M} = 0.$$

☒ Il calcolo è errato, e l'integrale improprio diverge;

☐ Il calcolo è corretto;

☐ Il calcolo è errato, e l'integrale improprio non esiste;

☐ Il calcolo è errato, ma l'integrale improprio converge;

3 Se per ogni $n \in \mathbf{N}$ vale $a_n > e^{-n}$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

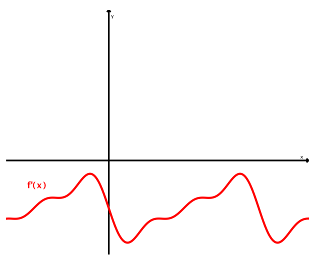
☐ converge;

☐ diverge a $+\infty$;

☒ potrebbe convergere o divergere: occorrono altre informazioni;

☐ è una serie geometrica;

4 Quale delle seguenti affermazioni è corretta se il grafico rappresenta la derivata prima di una certa funzione f?



☐ f é concava sull'intera retta reale;

☐ f è convessa sull'intera retta reale;

☐ f è crescente sull'intera retta reale;

☒ f è decrescente sull'intera retta reale;

5 La funzione reale di variabile reale $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$

☐ è derivabile e $F'(x) = e^{-x^2} - 1$;

☐ è continua ma non derivabile;

☒ è derivabile e $F'(x) = e^{-x^2}$;

☐ non è continua;

6 Si calcoli il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x\cos^2 x - 2x}{\log(1+2x)\sin^2(3x)}.$$

7 Si trovino le primitive della funzione $f(x) = \frac{e^x}{4+e^{2x}}$. Si studi anche la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{4+e^{2x}}\,dx.$$

8 Si studi la convergenza di almeno una delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)}{n^n} 10^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) x^n$$

9 (Esercizio facoltativo) Se una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è continua in 0 e possiamo scrivere

$$f(x) = f(0) + ax + o(x),$$

abbiamo visto che f è derivabile in 0 con $f'(0) = a$.

Supponiamo ora che f sia continua e derivabile in 0 e che si abbia

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{b}{2}x^2 + o(x^2).$$

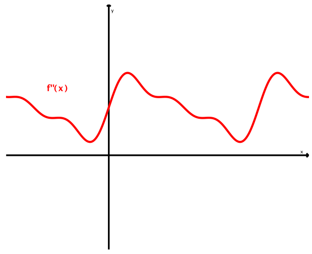
Possiamo concludere che f è derivabile due volte in 0? Si dia una risposta dopo aver meditato sulla funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \textit{se } x \in \mathbf{Q}, \\ x^2 + x^4 & \textit{se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Tipologia B

4 Quale delle seguenti affermazioni è corretta se il grafico rappresenta la derivata seconda di una certa funzione f?



- ☐ f è crescente sull'intera retta reale;
- ☒ f è convessa sull'intera retta reale;
- ☐ f é concava sull'intera retta reale;
- ☐ f è decrescente sull'intera retta reale;

6 Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos^2 x - 2x}{\log(1+2x)\sin^2(2x)}.$$

7 Si trovino le primitive della funzione $f(x) = \frac{e^x}{9+e^{2x}}$. Si studi anche la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{9+e^{2x}}\, dx.$$

8 Si studi la convergenza di almeno una delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{n^{2n}} 10^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) x^n$$

Tipologia C

6 Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos^2 x - 2x}{\log(1+3x)\sin^2(3x)}.$$

7 Si trovino le primitive della funzione $f(x) = \frac{e^x}{25+e^{2x}}$. Si studi anche la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{25+e^{2x}}\, dx.$$

8 Si studi la convergenza di almeno una delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^3}{n^{3n}} 10^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) x^n$$

Tipologia D

6 Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos^2 x - 2x}{\log(1+4x)\sin^2(2x)}.$$

7 Si trovino le primitive della funzione $f(x) = \frac{e^x}{16+e^{2x}}$. Si studi anche la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{16+e^{2x}}\, dx.$$

8 Si studi la convergenza di almeno una delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^4}{n^{4n}} 10^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) x^n$$

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

Esercizio 6 Usando gli sviluppi di Taylor noti, si vede che il numeratore è $-7/6x^3 + o(x^3)$. Il denominatore è $18x^3 + o(x^3)$, per cui il limite vale $-7/108$. Nelle altre versioni del compito il limite si calcola in modo analogo: esso cambia solo di un fattore numerico perché il denominatore è leggermente diverso.

Esercizio 7 Ponendo $y = e^x$, si trova facilmente che

$$\int \frac{e^2}{4 + e^{2x}}\, dx = \frac{1}{2} \arctan(e^x/2) + C.$$

Per studiare la convergenza dell'integrale improprio, osserviamo che il *modulo* della funzione data si maggiora con la funzione $f(x)$ di cui al punto precedente. Grazie alla primitiva trovata prima (o maggiorando con la funzione e^{-x}, si vede subito che l'integrale improprio di f è convergente: ne deduciamo che l'integrale dato converge assolutamente (e quindi converge).

Nelle altre versioni del compito il procedimento era identico: cambiavano solo le costanti numeriche nella primitiva.

Esercizio 8 La prima serie si studia facilmente usando il criterio del rapporto: detto a_n il suo termine generale, scopriamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{10}{e} > 1$: la serie data diverge a $+\infty$.

Nelle altre versioni del compito, il limite del rapporto era rispettivamente $\frac{10}{e^2}$, $\frac{10}{e^3}$, $\frac{10}{e^4}$: solo negli ultimi due casi il limite è minore di 1 e la serie converge.

Troviamo poi il raggio di convergenza della seconda serie (di potenze) usando il criterio della radice: ricordando che $\sin(1/n^{1/2}) \sim 1/n^{1/2}$ si trova che il raggio di convergenza è 1, per cui la serie converge per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$. Per $x = 1$, il termine generale della serie è $\sin(1/n^{1/2})$, e per quanto osservato sopra è asintoticamente equivalente al termine generale di una serie armonica generalizzata di esponente 1/2, che è divergente. Per $x = -1$ abbiamo invece una serie a termini di segno alterno che converge grazie al criterio di Leibniz. In conclusione, la serie data converge per $-1 \leq x < 1$.

Nelle altre versioni del compito, l'esponente non era più 1/2, ma era maggiore di 1: il raggio di convergenza era sempre 1, solo che per $x = 1$ la serie convergeva perché asintoticamente equivalente ad una serie armonica generalizzata convergente. Per $x = -1$, poi, la serie era assolutamente convergente. In conclusione, nei compiti delle tipologie B,C,D la serie di potenze convergeva per $-1 \leq x \leq 1$.

Esercizio 9 La funzione data è un controesempio all'affermazione: non è detto che una funzione derivabile in 0 che abbia un polinomio di Taylor di ordine 2 sia necessariamente derivabile due volte in 0. La funzione suggerita, infatti, è continua e derivabile in 0, mentre è discontinua in tutti gli altri punti: ne segue che $f'(x)$ è definita solo per $x = 0$, per cui non ha alcun senso chiedersi se sia derivabile! In particolare, non esiste $f''(0)$.

Invece, si ha chiaramente $f(x) = x^2 + o(x^2)$.