

Diario del Corso di Analisi - I/II Unità Didattica

Corsi di Laurea: Matematica, Fisica, Fisica Applicata

Docente: Sisto Baldo

ATTENZIONE: Il presente Diario del Corso vuole essere un riassunto abbastanza dettagliato di quello che è stato detto in aula, e come tale può essere un utile sussidio per chi voglia sistemare i propri appunti, o per chi sia stato assente e voglia ricostruire i contenuti di una lezione. D'altra parte, queste brevi paginette NON possono sostituire completamente un libro di testo, la lezione in aula o un'interazione diretta con il docente o l'esercitatrice: siete quindi invitati a servirvi ANCHE di queste altre opportunità per approfondire le vostre conoscenze!

Lezione del 12/9/2006 (2 ore): Presentazione del corso: orario, esercitazioni, ricevimento studenti, sito web, tempi e modalità delle prove di valutazione (provetta in itinere, prova finale, recuperi). Argomento del corso: calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale.

Visto che nel corso ci occuperemo di funzioni reali di variabile reale, sarà bene capire esattamente cosa sono i numeri reali!

Consideriamo la seguente catena di insiemi numerici, sempre più grandi:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Ogni volta che passiamo da un insieme al successivo, *guadagnamo qualcosa...* Nell'insieme $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ dei numeri naturali non è possibile trovare l'elemento inverso di un numero rispetto alla somma (l'opposto): perché questo si possa fare dobbiamo allargarci all'insieme $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ dei numeri interi. Analogamente, in \mathbf{Z} non è possibile definire l'operazione inversa del prodotto: per questo, si introduce l'insieme \mathbf{Q} dei numeri razionali ($\mathbf{Q} = \{m/n : m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$).

Con l'insieme dei numeri razionali potremmo dirci soddisfatti, almeno dal punto di vista delle quattro operazioni! E allora, perché sentiamo il bisogno di allargare ulteriormente l'insieme dei "numeri"?

Questa necessità divenne evidente già agli albori della matematica greca (anche se i greci avevano una visione più "geometrica" che "algebrica" della matematica): i pitagorici si accorsero che *la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 non è un numero razionale*. In termini moderni (e grazie al teorema di Pitagora), questo equivale a dire che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Dimostriamolo per assurdo: supponiamo che esista un numero razionale $q = m/n$ tale che $q > 0$ e $q^2 = 2$. Riducendo la frazione ai minimi termini, non è restrittivo supporre che i numeri naturali m e n non abbiano fattori primi in comune.

Ora, la nostra supposizione equivale a $m^2 = 2n^2$, da cui segue che m^2 è un numero pari. Poiché ogni fattore primo di m^2 deve essere presente anche in m , ne deriva che m è pari.

Dunque, $m = 2r$ per qualche numero naturale r , e la nostra identità diventa $4r^2 = 2n^2$, da cui $2r^2 = n^2$. Ripetendo esattamente il ragionamento appena fatto, questo mostra che n è pari. Assurdo perché abbiamo supposto che m e n non abbiano fattori in comune, e quindi essi non possono essere entrambi pari!

Per i pitagorici, la scoperta dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ ebbe sconvolgenti conseguenze filosofiche...per noi, significa solo che dobbiamo trovare un insieme *più ampio* di numeri, in modo che almeno uno di essi abbia quadrato uguale a 2 (e in cui magari sia possibile risolvere altri interessanti problemi!).

Una buona risposta a queste necessità è l'insieme \mathbf{R} dei numeri reali, che noi ben conosciamo. Vero?

Cosa sono i numeri reali di cui abbiamo parlato (e che abbiamo usato) per buona parte della nostra carriera scolastica?

Una possibile risposta: sono tutti i numeri decimali, eventualmente con infinite cifre dopo la virgola. Questo è un buon modello dei numeri reali, che presenta però un piccolo problema: se *definiamo* i reali come numeri decimali infiniti, non è poi facilissimo definire le operazioni e la relazione d'ordine, e mostrare poi che esse godono di tutte le proprietà che ci aspettiamo... Comunque, questo è possibile senza eccessive difficoltà.

Un approccio alternativo (adottato da molti testi di analisi matematica) è quello assiomatico: i numeri reali sono *per definizione* un *campo ordinato e completo*.

Questo significa che i numeri reali sono un *insieme* su cui sono definite due *operazioni* (la somma e il prodotto), entrambe associative e commutative. Inoltre, entrambe le operazioni hanno un elemento neutro (0 e 1 rispettivamente) e sono "invertibili" (cioè per ogni $x \in \mathbf{R}$ esiste un altro elemento che denotiamo $(-x)$ tale che $x + (-x) = 0$; per ogni $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ esiste un altro elemento x^{-1} tale che $x \cdot x^{-1} = 1$). Vale inoltre la proprietà distributiva, che lega la somma al prodotto. Un insieme con due operazioni che godono di queste proprietà è detto *campo*.

C'è poi una *relazione d'ordine*, che dati due numeri reali ci consente di dire qual è il più grande. Questa relazione d'ordine è compatibile con le operazioni (nel senso che possiamo manipolare le disuguaglianze nel modo in cui siamo abituati: sommando uno stesso numero reale ad ambo i membri

di una disuguaglianza essa rimane vera, così come se moltiplichiamo ambo i membri per uno stesso numero reale positivo). Un campo che gode di queste proprietà è un *campo ordinato*: ma anche \mathbf{Q} è un campo ordinato!

Quel che distingue \mathbf{R} da \mathbf{Q} è l'*assioma di completezza*.

Ne esistono varie formulazioni equivalenti (in classe abbiamo visto solo la seconda di quelle che seguono, la prima viene proposta agli interessati...):

ASSIOMA DI COMPLETEZZA, I FORMULAZIONE (Dedekind): Se A e B sono sottinsiemi di \mathbf{R} , entrambi non vuoti e tali che $a \leq b \forall a \in A, \forall b \in B$, allora esiste un numero reale c tale che

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Un tale numero c si dice *elemento separatore* di A e B .

In soldoni, se abbiamo due sottinsiemi non vuoti A e B della retta reale tali che A sta tutto a sinistra di B , possiamo trovare un numero reale che sta sia a destra di A che a sinistra di B .

ASSIOMA DI COMPLETEZZA, II FORMULAZIONE (Esistenza dell'estremo superiore): Ogni sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato di \mathbf{R} ammette estremo superiore in \mathbf{R} .

Per capire la formulazione dell'assioma di completezza che si rifà al concetto di estremo superiore, abbiamo bisogno di alcune definizioni:

DEFINIZIONI: Se $A \subset \mathbf{R}$, un *maggiorante* di A è un numero reale M tale che $M \geq a$ per ogni $a \in A$.

Un sottinsieme di \mathbf{R} si dice *superiormente limitato* se ammette almeno un maggiorante.

L'*estremo superiore* di un sottinsieme A di \mathbf{R} è il *minimo* dei maggioranti di A , se questo minimo esiste.

Cerchiamo di comprendere il significato di questa definizione di estremo superiore (che per inciso si indica col simbolo $\sup A$...).

Se l'insieme A ammette massimo, allora l'estremo superiore coincide col massimo. Infatti il massimo dell'insieme è un maggiorante per definizione, e inoltre nessun numero più piccolo del massimo può essere un maggiorante (perché è superato dal massimo stesso, che è un elemento dell'insieme).

D'altra parte, un insieme infinito non è detto che possieda massimo anche se è superiormente limitato: per esempio, la semiretta $A = \{x \in \mathbf{R} : x < 2\} = (-\infty, 2)$ non possiede un elemento massimo. Infatti, dato un qualunque elemento $a \in A$, il numero $\frac{a+2}{2}$ è ancora minore di 2, ed è maggiore di a : *a non può essere dunque l'elemento massimo della semiretta*. Invece, è immediato

verificare che $\sup A = 2$... L'estremo superiore è la *naturale generalizzazione del concetto di massimo* agli insiemi superiormente limitati che non hanno massimo!

L'assioma di completezza nella sua seconda formulazione dice una cosa non ovvia: *qualunque* sottinsieme non vuoto e superiormente limitato $A \subset \mathbf{R}$ ammette il sup. La cosa *non* è immediata perché il sup è definito come minimo di un insieme *infinito* (l'insieme dei maggioranti di A), e non sempre un insieme infinito ammette minimo!

Per gli studenti interessati, mostriamo l'equivalenza delle due formulazioni dell'assioma di completezza. Fermo restando che gli studenti non interessati possono limitarsi a studiare quella che predica l'esistenza del sup...

Cominciamo col mostrare che se vale l'assioma di Dedekind, allora ogni sottinsieme non vuoto e superiormente limitato di \mathbf{R} ammette estremo superiore.

Sia infatti $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$, A superiormente limitato. Definiamo

$$B = \{b \in \mathbf{R} : b \text{ è un maggiorante di } A\}.$$

La coppia di insiemi A e B soddisfa le richieste dell'assioma di Dedekind (B è non vuoto perché A è superiormente limitato, e giace a destra di A perché contiene solo maggioranti di A), quindi esiste un elemento separatore $c \in \mathbf{R}$ tale che $a \leq c \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$. La disuguaglianza di sinistra dice che c è un maggiorante di A , mentre quella di destra assicura che è più piccolo di ogni altro maggiorante: in conclusione, $c = \sup A$.

Mostriamo che la seconda formulazione dell'assioma di completezza implica la prima.

Siano A, B due sottinsiemi come nell'assioma di Dedekind (cioè sono non vuoti e A giace tutto a sinistra di B). Poniamo $c = \sup A$ (esiste per ipotesi, visto che A è non vuoto, ed è anche superiormente limitato perché B è non vuoto ed è tutto fatto di maggioranti di A).

Dico che c è un elemento separatore tra A e B : infatti, c è un maggiorante di A per definizione di sup. Inoltre, è minore o uguale di *ogni* elemento di B perché è il minimo dei maggioranti di A , e B è costituito interamente da maggioranti di A . Q.E.D.

Lezione del 14/9/2006 (2 ore): Evidentemente, l'assioma di completezza (in una qualunque delle sue formulazioni equivalenti) *non è vero* nel campo dei razionali: per esempio, l'insieme $A = \{q \in \mathbf{Q} : q \geq 0, q^2 \leq 2\}$ è un sottinsieme di \mathbf{Q} non vuoto e superiormente limitato (per esempio, 2 è un maggiorante), ma esso non ha estremo superiore in \mathbf{Q} : il problema è che possiamo trovare maggioranti razionali *arbitrariamente vicini* a $\sqrt{2}$, che però non appartiene ai razionali. Ovviamente, se vediamo questo insieme come *sottinsieme di \mathbf{R}* , l'estremo superiore c'è ed è uguale a $\sqrt{2}$.

In matematica, oltre all'estremo superiore si usa spesso l'estremo inferiore che è l'oggetto simmetrico:

DEFINIZIONE: Un *minorante* di un insieme $A \subset \mathbf{R}$ è un numero reale c tale che $c \leq a$ per ogni $a \in A$. A si dice *inferiormente limitato* se possiede un minorante. L'*estremo inferiore* di A (se esiste) è il *massimo* dei minoranti di A , e si indica con $\inf A$.

Ovviamente, l'estremo inferiore coincide con il minimo di A quando questo esiste.

Inoltre, un'ulteriore formulazione equivalente dell'assioma di completezza consiste nel chiedere che ogni insieme inferiormente limitato ammette estremo inferiore (esercizio)!

Per comodità, vale anche la pena di introdurre una notazione per indicare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di insiemi illimitati, e dell'insieme vuoto:

DEFINIZIONE: Il fatto che un insieme A non sia superiormente limitato si esprime con la scrittura $\sup A = +\infty$. Analogamente, per un insieme illimitato inferiormente scriveremo $\inf A = -\infty$. Poniamo poi $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$.

La definizione assiomatica di \mathbf{R} è comoda (è sostanzialmente un menù delle proprietà che possiamo utilizzare quando manipoliamo i numeri reali), ma rimane il problema di mostrare che *esiste almeno un insieme, dotato di operazioni e relazione d'ordine, che soddisfa tutti gli assiomi*: abbiamo bisogno di un *modello* dei numeri reali.

Come accennavamo ieri, un tale modello è costituito dai *numeri decimali infiniti*. Non è difficile convincersi che con tale modello si possono definire le operazioni e la relazione d'ordine, e che esse godono di tutte le proprietà che ci servono...

Per gli studenti interessati, cerchiamo di mostrare che in questo modello vale l'assioma di completezza: precisamente, supponiamo di avere un insieme $A \subset \mathbf{R}$ (cioè A è una collezione di decimali infiniti) non vuoto e inferiormente limitato, e mostriamo come sia possibile identificarne l'estremo inferiore *come decimale infinito*.

Evidentemente, non è restrittivo supporre che 0 sia un minorante di A (basta compiere una traslazione, cioè aggiungere a tutti gli elementi di A uno stesso numero, per esempio l'opposto di un minorante: anche l'estremo inferiore risulterà modificato nello stesso modo...).

Ci troviamo nella seguente situazione: abbiamo un sottinsieme della retta reale che giace tutto a destra di 0, e ci chiediamo come calcolare *le cifre decimali* del massimo dei suoi minoranti.

Evidentemente, per trovare l'estremo inferiore a meno di un'unità, ci basta prendere il *massimo dei numeri naturali che sono minoranti di A* , per trovarlo a meno di un decimo ci basta prendere il *massimo dei numeri decimali finiti con una cifra dopo la virgola che sono minoranti di A* , per trovarlo a meno di un centesimo troveremo il *massimo dei numeri decimali finiti con due cifre dopo la virgola che sono minoranti di A* , e così via... Ogni volta, dobbiamo trovare il massimo di un insieme finito. Inoltre, ogni volta che raffiniamo la suddivisione è evidente che *le cifre che avevamo già trovato in precedenza non cambiano*.

Proseguendo indefinitamente, abbiamo una ricetta per trovare tutte le cifre che vogliamo di un numero decimale infinito c , che gode di questa proprietà: se arrestiamo c alla k -esima cifra dopo la virgola e chiamiamo c_k il numero decimale finito così ottenuto¹, c_k è un minorante di A ed esiste un elemento di A che dista meno di $1/10^k$ da c_k (altrimenti avrei potuto aumentare di almeno un'unità la k -esima cifra decimale di c). Siccome k può essere preso arbitrariamente grande, questo ci dice che *esistono punti di A arbitrariamente vicini a c* .

In conclusione, c è per costruzione un minorante di A , ed è il massimo perché l'insieme A possiede punti arbitrariamente vicini a c , per cui un qualunque numero più grande di c non può essere più un minorante di A .

L'esistenza della radice quadrata di un numero reale positivo può essere recuperata usando l'estremo superiore: se $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, definiamo $\sqrt{a} = \sup\{x \in \mathbf{R} : x^2 \leq a\}$. Questo definisce un numero reale positivo, il cui quadrato si può dimostrare che è uguale ad a .

Non dimostriamo questo fatto, perché esso è una conseguenza immediata del teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue, che verrà enunciato e dimostrato a metà di questo corso... Durante questo breve periodo,

¹ c_k non è altro che il numero decimale ottenuto al k -passo del nostro algoritmo

faremo un atto di fede e “confideremo” nell’esistenza delle radici n -esime, della funzione logaritmo, etc...

Ma i numeri reali non sono utili solo per poter fare la radice quadrata... essi entrano in modo essenziale nella definizione di funzioni importanti quali esponenziale, logaritmo, funzioni trigonometriche...

Cominciamo con un brevissimo ripasso sul concetto di funzione e su quello di grafico di una funzione: una funzione $f : A \rightarrow B$, dove A, B sono insiemi (A si chiama dominio, B codominio) può essere pensata come una “scatola nera” o una “regola” che ad ogni elemento $a \in A$ associa uno ed un solo elemento $f(a) \in B$. Qualche esempio di funzioni che “esistono in natura”: la temperatura nella nostra aula o il valore di una certa azione alla Borsa di Milano (entrambe in funzione del tempo), la forza elastica esercitata da una molla in funzione dell’elongazione, il segnale acustico raccolto da un microfono in funzione del tempo, la funzione che associa ad ogni sedia presente in quest’aula il nome di chi la occupa...

Caso particolarmente importante per noi: le funzioni reali di variabile reale, cioè quelle per cui $A \subset \mathbf{R}$ e $B \subset \mathbf{R}$. Grafico di una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$: è il sottinsieme del piano cartesiano

$$G_f = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y = f(x)\}.$$

Tra i sottinsiemi del piano cartesiano, come distinguere quelli che sono grafici di una funzione reale di variabile reale? Sono i sottinsiemi G tali che per ogni $x \in \mathbf{R}$ troviamo una ed una sola $y \in \mathbf{R}$ tale che $(x, y) \in G$.

Nel caso generale in cui A e B sono insiemi qualunque, si introduce il prodotto cartesiano $A \times B$ di due insiemi A e B come l’insieme delle *coppie ordinate* (a, b) in cui $a \in A$ e $b \in B$: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Il grafico di una funzione $f : A \rightarrow B$ è allora il sottinsieme di $A \times B$ definito esattamente come sopra:

$$G_f = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\}.$$

Identifichiamo i sottinsiemi di $A \times B$ che sono grafici di una funzione $f : A \rightarrow B$: otteniamo una “ricetta”, simile a quella sopra, che può essere adottata come definizione rigorosa di funzione tra due insiemi.

Lezione del 19/9/2006 (2 ore): Cominciamo con un breve ripasso sulle potenze: potenze ad esponente naturale, intero, razionale (la definizione è “obbligata” se vogliamo che valgano le proprietà delle potenze!).

Potenze ed esponente reale: se $a > 1$ e $x \in \mathbf{R}$, definiamo

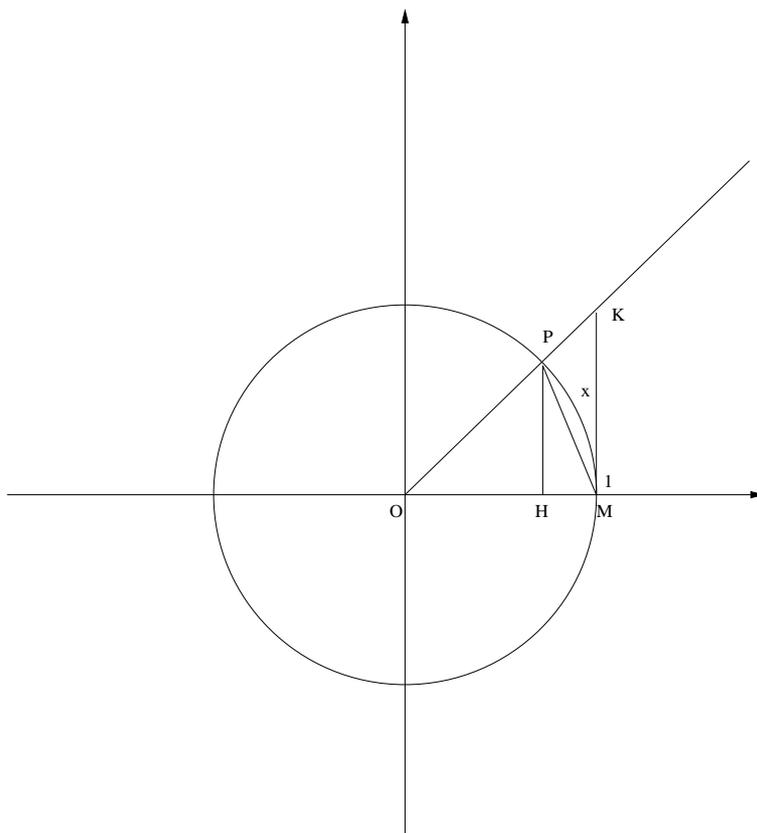
$$a^x = \sup\{a^q : q \in \mathbf{Q}, q \leq x\}.$$

Si può dimostrare che questo oggetto ha tutte le proprietà della funzione esponenziale che ben conosciamo.

Le dimostrazioni sono semplici, ma piuttosto noiose: preferiamo invece usare questa lezione per introdurre, dapprima in modo assolutamente informale, le nozioni di limite di una funzione reale di variabile reale e di funzione continua.

Cerchiamo ora di affrontare un “esercizio” piuttosto difficile: vogliamo capire come è fatto il grafico della funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, funzione reale definita su $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Osserviamo che questa è una funzione pari (cioè $f(-x) = f(x)$) e che per $x > 0$ ha lo stesso segno della funzione seno ed è compresa tra le funzioni $-1/x$ e $1/x$. Quello che non è per niente chiaro a priori, è come si comporta la funzione per *valori piccoli della x* ...

Attraverso semplici considerazioni geometriche, scopriamo che per $0 < x < \pi/2$ valgono le disuguaglianze $x \leq \tan x$ e $\sin x < x$:



La seconda disuguaglianza si ottiene osservando che l'arco PM (lungo x) è più lungo della corda PM , che a sua volta è più lunga del segmento $PH = \sin x$ (sono rispettivamente cateto e ipotenusa del triangolo rettangolo OHP).

Per ottenere la prima disuguaglianza, osserviamo che il settore circolare OMP è contenuto nel triangolo rettangolo OMK , per cui l'area del settore circolare è minore dell'area del triangolo. D'altra parte, l'area del settore circolare è $x/2$, mentre l'area del triangolo è $\tan x/2$.

Ne segue subito che

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{se } 0 < x < \pi/2.$$

Si noti che le disuguaglianze rimangono valide anche per $-\pi/2 < x < 0$ perché tutte le funzioni coinvolte sono pari.

Geometricamente, questo dice che il grafico della funzione $f(x)$, per angoli piccoli, è compreso tra i grafici della funzione $\cos x$ e della funzione costante 1: possiamo quindi concludere che quando x si avvicina a 0, il valore della funzione $f(x)$ deve necessariamente avvicinarsi ad 1. Esprimiamo questo fatto scrivendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Vedremo la prossima volta cosa questo significa in dettaglio!

Lezione del 21/9/2006 (2 ore):

Le considerazioni euristiche della volta scorsa ci hanno portato a dire che la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ tende a 1 quando x tende a 0, e abbiamo scritto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Cerchiamo di dare una prima pseudodefinitione di limite:

DEFINIZIONE INFORMALE: la scrittura

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

esprime il fatto che, se si avvicina sufficientemente la x a x_0 (con $x \neq x_0$), il valore di $f(x)$ diventa arbitrariamente vicino al numero ℓ .

Osserviamo che non è affatto necessario che la funzione f sia definita in x_0 (e, se lo fosse, conveniamo comunque di *non tenerne conto quando andiamo a verificare la relazione di limite*). Quel che serve, è solo che la funzione f sia definita in punti *arbitrariamente vicini ad x_0 e diversi da x_0* (in matematica, x_0 deve essere un punto di accumulazione del dominio di f).

Attendiamo ancora qualche istante per dare una definizione precisa di limite: essa arriverà inesorabilmente tra non molto.

Piuttosto, avendo a disposizione il concetto di limite si può introdurre quello di funzione continua:

DEFINIZIONE: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione reale di variabile reale definita su un intervallo. Se $x_0 \in [a, b]$, diciamo che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se f è continua in ogni punto del suo dominio $[a, b]$, diciamo semplicemente che essa è continua.

Ci si convince facilmente che l'idea geometrica dietro al concetto di continuità è piuttosto semplice: il grafico di una funzione continua è una "curva continua", cioè può essere disegnato "senza staccare la penna dal foglio". Infatti, se rileggiamo la definizione di continuità alla luce della nostra pseudo-definizione di limite, vediamo che una funzione è continua in x_0 quando $f(x)$ diventa *arbitrariamente vicino* a $f(x_0)$ a patto di prendere x *sufficientemente vicino* a x_0 . In maniera ancora più informale possiamo dire che una funzione continua $f(x)$ ha la proprietà di "cambiare di poco" il suo valore quando si "cambia di poco" la variabile indipendente x .

A questo punto, viene naturale chiedersi se già conosciamo delle funzioni continue... La risposta è affermativa: si pensi alla funzione *costante* $f(x) = k$, o alla funzione *identica* $f(x) = x$. In questi due casi, le (pseudo)-definizioni date sopra diventano delle tautologie!

Dopo questi discorsi informali, è ormai ora di arrivare ad una definizione rigorosa del concetto di limite: vale la pena di sottolineare che nei prossimi pochi secondi... percorreremo un iter che storicamente ha richiesto moltissimo tempo ed un'accesa discussione nella comunità matematica! Daremo infatti la definizione di limite dovuta a Weierstrass.

Avevamo detto che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se succede che, avvicinando *sufficientemente* x a x_0 (con $x \neq x_0$), $f(x)$ diventa *arbitrariamente vicina* a ℓ . Possiamo tradurre questa frase nella seguente

DEFINIZIONE: Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 . Diciamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se e soltanto se, comunque scegliamo un intervallo I_ℓ centrato in ℓ , piccolo quanto vogliamo, è possibile trovare un intervallo J_{x_0} centrato in x_0 tale che $f(x) \in I_\ell$ per ogni $x \in J_{x_0}$, $x \neq x_0$.

Se scriviamo $I_\ell = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ e $J_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, la definizione si può tradurre nella seguente (che è assolutamente equivalente a quella sopra, ed è quella che ha sempre riscosso il maggior successo di pubblico e di critica):

DEFINIZIONE: Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 . Diciamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se e soltanto se, per ogni $\varepsilon > 0$, è possibile trovare $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \quad (P)$$

Osserviamo, che la definizione di limite ha senso anche se f è definita su un insieme qualunque A , purchè A possenga punti *distinti da x_0 e vicini quanto si vuole* a x_0 : questo si esprime dicendo che x_0 è un *punto di accumulazione* di A . Ovviamente, in tal caso la disuguaglianza nella definizione di limite andrà verificata solo per gli $x \in A$.

Verifichiamo che con la definizione di limite appena vista, valgono alcune proprietà dei limiti e delle funzioni continue che suonano abbastanza naturali e che si riveleranno utilissime:

- *Continuità delle costanti e della funzione identica:* Per mostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ basta prendere $\delta = \varepsilon$ nella definizione di limite. Dimostrare che il limite di una costante è la costante stessa è altrettanto facile!

Oops! È finita l'ora di lezione: continueremo la prossima volta!

Lezione del 26/9/2006 (2 ore): Continuiamo a vedere alcune semplici conseguenze della definizione di limite:

- **TEOREMA (dei carabinieri):** Se f, g, h sono tre funzioni definite in un intorno di x_0 , $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ in tale intorno e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, allora esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell.$$

DIM.: sia $\varepsilon > 0$, e scegliamo $\delta > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, $|g(x) - \ell| < \varepsilon$ ogni qual volta $0 < |x - x_0| < \delta$ (a priori, la definizione di limite potrebbe darci due valori diversi di δ per f e per g : perché sia vero quanto appena scritto, basta prendere il più piccolo dei due).

Le due disuguaglianze per f e per g possono anche essere scritte: $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$, $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$. Usando l'ipotesi $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ otteniamo allora (per ogni x tale che $0 < |x - x_0| < \delta$):

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < \ell + \varepsilon,$$

cioè $|h(x) - \ell| < \varepsilon$, Q.E.D.

- *Algebra dei limiti*: Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell_1} \quad \text{se } \ell_1 \neq 0.$$

Questi risultati, applicati alle funzioni continue, ci dicono ad esempio che i polinomi sono funzioni continue!

La dimostrazione di queste affermazioni può essere ottenuta abbastanza facilmente a partire dalla definizione. Cominciamo dalla prima: per definizione di limite, scelto $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - \ell_1| < \varepsilon$, $|g(x) - \ell_2| < \varepsilon$. Ma allora $|(f(x) + g(x)) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| < 2\varepsilon$, che implica la nostra tesi.

Per dimostrare l'affermazione sul limite del prodotto, osserviamo per prima cosa che per tutti gli x sufficientemente vicini a x_0 (e diversi da x_0) si ha $|f(x)| \leq (|\ell_1| + 1)$, $|g(x)| \leq (|\ell_2| + 1)$... Si dimostri questo fatto per esercizio, usando la definizione di limite con $\varepsilon = 1$! Detto in altre parole, possiamo trovare una costante positiva M tale che $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$ in un opportuno intorno di x_0 ($x \neq x_0$).

Fissato poi $\varepsilon > 0$, sia δ come sopra: evidentemente non è restrittivo supporre che δ sia tanto piccolo da far valere le nostre limitazioni $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$ per $0 < |x - x_0| < \delta$. Allora

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| &= |f(x)g(x) - f(x)\ell_2 + f(x)\ell_2 - \ell_1\ell_2| \leq \\ &|f(x)| |g(x) - \ell_2| + |f(x) - \ell_1| |\ell_2| \leq 2M\varepsilon, \end{aligned}$$

che implica la tesi.

Infine, mostriamo l'ultima delle proprietà elencate: fissiamo $\bar{\varepsilon} > 0$ e osserviamo che

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell_1} \right| = \frac{|f(x) - \ell_1|}{|f(x)||\ell_1|}.$$

Usando la definizione di limite con $\varepsilon = |\ell_1|/2$, possiamo trovare δ_1 tale che $|f(x)| \geq |\ell_1|/2$ quando $|x - x_0| < \delta_1$, $x \neq x_0$. A questo punto, basta riapplicare la definizione di limite con ε qualunque per stimare il numeratore: troviamo così un $\delta < \delta_1$ tale che

$$\frac{|f(x) - \ell_1|}{|f(x)||\ell_1|} < \frac{2\varepsilon}{|\ell_1|^2}$$

ogni qual volta $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$.

Lezione del 28/9/2006 (2 ore):

Continuamo a dimostrare interessanti proprietà dei limiti:

- *Limite di funzione composta:* Nel caso delle funzioni continue, l'enunciato è piuttosto semplice: la composizione di due funzioni continue è continua. In altre parole $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sono due funzioni definite (per semplicità) su tutto \mathbf{R} , ovunque continue, allora la funzione composta (funzione di funzione) $f(g(x))$ è pure lei continua: un risultato del tutto plausibile se ricordiamo la nostra pseudo-definizione di continuità.

Per i limiti, occorre una certa cautela dovuta al fatto che nella definizione di limite non vogliamo tener conto del comportamento della funzione *nel punto in cui si calcola il limite*.

Diamo un enunciato preciso, che implica evidentemente quanto detto sopra sulle funzioni continue:

TEOREMA: Sia f definita in un intorno di x_0 tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, g definita in un intorno di y_0 tale che $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \ell$. Supponiamo poi che g sia continua in y_0 , oppure che si abbia $f(x) \neq y_0$ in un intorno di x_0 . Allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell.$$

DIM.: Dimostriamo il risultato nel secondo caso: dato $\varepsilon > 0$, troviamo $\eta > 0$ tale che $|g(y) - \ell| < \varepsilon$ se $0 < |y - y_0| < \eta$.

Troviamo poi δ tale che, se $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - y_0| < \eta$ (e questa quantità è positiva, a patto di prendere η abbastanza piccolo, grazie all'ipotesi che $f(x) \neq y_0$ in un intorno di x_0). Usando dunque la disuguaglianza valida per g , otteniamo

$$|g(f(x)) - \ell| < \varepsilon \quad \text{se } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

Se poi g è continua in y_0 , con la stessa notazione usata sopra avremo $g(y_0) = \ell$, per cui la disuguaglianza $|g(y) - \ell| < \varepsilon$ vale per $|y - y_0| < \eta$ (non c'è bisogno di supporre $y \neq y_0$). Q.E.D.

- Un altro utile fatto da osservare è il seguente: se $f(x)$ è *limitata* (sia superiormente che inferiormente) in un intorno di x_0 , e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$. Infatti, se $|f(x)| \leq M$ in un opportuno

intorno di x_0 , avremo $-Mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, e il risultato voluto segue dal teorema dei carabinieri.

- *Continuità della funzione inversa*: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua e strettamente crescente (oppure strettamente decrescente), allora esiste la funzione inversa $g : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$, (rispettivamente $g : [f(b), f(a)] \rightarrow [a, b]$), anch'essa continua. Questo risultato è “geometricamente evidente”, ed una sua dimostrazione rigorosa sarà dedotta facilmente dal teorema di esistenza degli zeri e da una notevole proprietà delle funzioni crescenti o decrescenti.

Per il momento, basti dire che questo implica ad esempio la continuità della funzione radice quadrata...

Abbiamo sostanzialmente usato il “teorema dei carabinieri” per far vedere che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$... anche se a rigore avremmo avuto bisogno di mostrare che la funzione $\cos x$ è continua in 0: abbiamo dato per scontato che “ $\cos x$ si avvicina a 1 quando x si avvicina a 0”. Questo, fortunatamente, può essere dedotto dalle considerazioni appena fatte.

Anzitutto, abbiamo visto che per angoli acuti si ha $0 < \sin x \leq x$ (mentre per ragioni di simmetria avremo $x \leq \sin x < 0$ per $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$): grazie al teorema dei carabinieri deduciamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

In altre parole, la funzione seno è continua in 0.

Sempre per angoli acuti (e positivi), da semplici considerazioni geometriche si ricava che $1 - \cos x < x$, da cui deduciamo subito che $1 - x < \cos x < 1$. Dal teorema dei carabinieri abbiamo allora $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ (per il limite a sinistra di 0, si ricordi che la funzione coseno è pari).

In realtà seno e coseno sono funzioni continue ovunque: se $x_0 \in \mathbf{R}$ possiamo scrivere

$$\sin x = \sin(x_0 + (x - x_0)) = \sin x_0 \cos(x - x_0) + \cos x_0 \sin(x - x_0)$$

da cui si deduce facilmente che $\sin x$ è continua in x_0 . In maniera analoga, la funzione $\cos x$ è continua in tutti i punti.

Torniamo al concetto di limite: abbiamo visto che purtroppo non esiste sempre. Ad esempio non esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ (questa funzione compie *infinite* oscillazioni tra -1 e 1 in *ogni* intorno comunque piccolo di 0).

Introduciamo alcune variazioni sul tema: limiti destro e sinistro, limiti all'infinito e limiti infiniti (e mostriamo qualche esempio di ciascuno): diremo innanzitutto che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$0 < |x - x_0| < \delta$ implica $f(x) > M$ (e c'è una definizione analoga per il limite $-\infty$).

Limiti all'infinito: diciamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che $x > N$ implica $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Analogamente, si definisce il limite a $-\infty$, e anche i limiti infiniti all'infinito...

Si noti che per parlare di limite a $+\infty$ di una funzione f , basta che il dominio di f sia un insieme *illimitato superiormente*: in particolare, data una funzione $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, ha senso chiedersi se esiste il $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$.

Osserviamo che il calcolo del limite di rapporti, prodotti e somme diventa complicato in alcuni casi particolarmente delicati, detti *forme indeterminate*.

Infatti non è difficile convincersi che se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = 0$. Invece, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, (*forma indeterminata 0/0*) non è così chiaro cosa succeda al limite del rapporto!

Questo per un buon motivo: il limite del rapporto di due funzioni che tendono entrambe a 0 può combinare *qualunque cosa*. Può essere un qualunque numero reale, essere infinito o non esistere. Per vederlo prendiamo $x_0 = 0$ e (i) $f(x) = g(x) = x$: in questo caso il limite del rapporto è 1; (ii) $f(x) = x$, $g(x) = x^3$: in questo caso il limite è $+\infty$; (iii) $f(x) = x \sin(1/x)$, $g(x) = x$: in questo caso il limite non esiste.

Altre forme indeterminate (cioè situazioni come quella appena vista, in cui la sola conoscenza del limite delle funzioni f e g non permette di stabilire quanto fa il limite di f/g , $f \cdot g$, $f + g$ oppure f^g) sono ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0 ...

A titolo di esempio, ripetiamo l'esercizio sopra per la forma indeterminata $0 \cdot \infty$ (prodotto di una funzione che tende a 0 e di una che tende all'infinito), mostrando che anche in questo caso il limite del prodotto può essere finito, infinito o non esistere.

Lezione del 3/10/2006 (2 ore): Ecco di seguito un caso particolare importante di limite all'infinito... Una funzione definita su \mathbf{N} si chiama *successione*. Di solito, per le successioni si adotta una notazione differente da quella usata per le funzioni: piuttosto che scrivere $f(n)$, si usa una scrittura del tipo $\{a_n\}$, dove il simbolo a_n rappresenta il valore della successione in $n \in \mathbf{N}$.

Facendo l'opportuna traduzione della definizione di limite in questo particolare caso, scopriamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbf{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

Abbiamo già visto che il limite di una funzione in un punto non necessaria-

mente esiste, così come non necessariamente esiste il limite di una successione per $n \rightarrow +\infty$: per esempio, la successione $a_n = (-1)^n$ non ha limite.

Ci piacerebbe avere un risultato che dica almeno che le successioni *fatte in un certo modo* hanno limite. Ancora una volta, ci viene in aiuto la completezza di \mathbf{R} :

TEOREMA: Sia $\{a_n\}$ una successione crescente (cioè $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni n). Allora $\{a_n\}$ ammette limite per $n \rightarrow +\infty$, e si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}.$$

Analogo risultato vale per successioni decrescenti: in questo caso il limite coincide con l'estremo inferiore dell'immagine della successione.

Dimostrazione: Sia $S = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$. Supponiamo dapprima che sia $S \in \mathbf{R}$: vedremo poi il caso $S = +\infty$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome S è un maggiorante dei valori assunti dalla successione, abbiamo che $a_n \leq S < S + \varepsilon$ per ogni n . D'altra parte, $S - \varepsilon$ non è più un maggiorante (per definizione di sup), per cui esiste un elemento della successione, chiamiamolo $a_{\bar{n}}$, tale che $a_{\bar{n}} > S - \varepsilon$. Siccome la successione è crescente, se $n \geq \bar{n}$ si ha $a_n \geq a_{\bar{n}} > S - \varepsilon$.

Mettendo insieme le due disuguaglianze ottenute sopra, abbiamo che per $n > \bar{n}$ si ha $|a_n - S| < \varepsilon$.

Se poi $S = +\infty$, l'immagine della successione non ammette maggioranti. Dunque, per ogni fissato $M > 0$ esiste \bar{n} tale che $a_{\bar{n}} > M$. Per la crescita della successione abbiamo allora $a_n \geq a_{\bar{n}} > M$ per ogni $n \geq \bar{n}$ e dunque $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ Q.E.D.

In maniera del tutto analoga, si mostra che una funzione crescente ammette limite a $+\infty$, e che questo limite è uguale al sup. Ancora, una funzione crescente $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ammette limite destro e sinistro in ogni punto: precisamente,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x > x_0\}.$$

Usiamo ora il teorema sui limiti delle successioni monotone per *definire il numero di Nepero e (la base dei logaritmi naturali)*: poniamo per definizione

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Naturalmente, occorre far vedere che questo limite *esiste ed è finito!*

L'idea della dimostrazione non è difficile: mostriamo dapprima che la successione $a_n = (1 + 1/n)^n$ è crescente (e quindi il limite esiste!). Questo

può essere dimostrato usando la disuguaglianza di Bernoulli²: dobbiamo far vedere che $a_n \geq a_{n-1}$ per ogni numero naturale $n \geq 1$. Ora, manipolando un po' la disuguaglianza da dimostrare si vede che questa equivale a $(\frac{n^2-1}{n^2})^n \geq (\frac{n-1}{n})$, cioè a $(1 - \frac{1}{n^2})^n \geq (1 - \frac{1}{n})$: ma questo è esattamente quel che ci dice la disuguaglianza di Bernoulli! (In realtà, potremmo anche far vedere che la successione a_n è strettamente crescente...)

Per mostrare poi che il limite è finito, occorre mostrare che la successione è superiormente limitata. Per far questo prendiamo la successione $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$, e mostriamo che questa è *decreciente*. Infatti, manipolandola un po' ci si rende conto che la disuguaglianza $b_n \leq b_{n-1}$ è equivalente alla seguente:

$$1 + \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n.$$

D'altra parte, grazie alla disuguaglianza di Bernoulli abbiamo

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2 - 1} = 1 + \frac{1}{n - \frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n},$$

come volevamo.

Si ha allora $2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4$, e possiamo essere certi che e è un numero reale compreso tra 2 e 4. Evidentemente, si possono avere stime migliori prendendo n grande, in quanto $a_n < e < b_n$...

Lezione del 6/10/2006 (2 ore): Dalla definizione del numero di Nepero e , vista la volta scorsa, deriva il seguente *limite fondamentale* (di funzione reale!):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = e.$$

La cosa può essere dimostrata senza troppa difficoltà giocando con le parti intere: ricordo che il simbolo $[x]$ indica *il più grande numero intero minore o uguale a x* , da cui si ha evidentemente $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]} = e$ grazie alla definizione del numero e . Inoltre, per $x > 0$ valgono le ovvie disuguaglianze

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

²La disuguaglianza di Bernoulli afferma che $(1+a)^n \geq 1+na$ se $a > -1$ e $n \in \mathbf{N}$. Essa può essere dimostrata facilmente utilizzando il *principio di induzione*, procedendo come segue. Per $n = 0$ la disuguaglianza è ovviamente vera. Supponiamola vera per un certo n : allora $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$, che dimostra il passo induttivo. Si noti che, in realtà, per $n \geq 2$, $a \neq 0$ la disuguaglianza è stretta!

Ora, è immediato verificare che la funzione a sinistra e quella a destra tendono entrambe ad e (grazie all'osservazione fatta sopra), e il risultato voluto segue dal teorema dei carabinieri.

Usando il limite fondamentale dimostrato sopra, e la continuità della funzione esponenziale e della funzione logaritmo (per il momento diamola per buona: la dimostreremo tra poco!), possiamo dimostrare senza eccessiva difficoltà che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Per dimostrare il primo limite, possiamo cominciare a far vedere che $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ (questo è un semplice esercizio), da cui $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ (basta “cambiare variabile” ponendo $y = 1/x$... è anche opportuno distinguere il limite destro e il limite sinistro). Il limite voluto segue allora prendendo il logaritmo in base e (ricordando anche il teorema sul limite di funzione composta: prendiamo per buona la continuità della funzione logaritmo!). Il secondo dei due limiti fondamentali segue invece dal primo con il “cambio di variabile” $y = e^x - 1$ (anche in questo caso, ci serve la continuità della funzione esponenziale per dire che $y \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$).

Verifichiamo finalmente che le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$ (con $a > 0$, $a \neq 1$) sono continue. Grazie alle proprietà delle potenze, è sufficiente verificarne la continuità in $x_0 = 0$: ci basta far vedere che $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.

Supponiamo per fissare le idee che sia $a > 1$ (la generalizzazione al caso $0 < a < 1$ è lasciata per esercizio: basti osservare che $a^x = (1/a)^{-x}$...). Cominciamo col mostrare che vale il limite di successione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Definiamo $b_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$: questa è una successione positiva, ed il nostro limite sarà provato se facciamo vedere che $b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Ora, si vede subito che $a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$ (dove per l'ultimo passaggio usiamo la disuguaglianza di Bernoulli), da cui $0 < b_n \leq \frac{a-1}{n}$. Il limite segue allora dal teorema dei carabinieri. Sia ora $\varepsilon > 0$. Troviamo $\bar{n} \in \mathbf{N}$ tale che $a^{1/\bar{n}} < 1 + \varepsilon$. Siccome la funzione esponenziale è crescente, se ne deduce che $1 < a^x < 1 + \varepsilon$ se $0 < x < \frac{1}{\bar{n}}$, per cui $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 1$. Per mostrare che anche il limite sinistro ha lo stesso valore, basta osservare che $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$...

Cosa dire della continuità di logaritmi, radici, funzioni trigonometriche inverse? Essa segue da un fatto generale: mostreremo tra breve che *l'inversa*

di una funzione continua e strettamente crescente definita su un intervallo, è anche lei continua!

Uno dei risultati fondamentali sulle funzioni continue, è il
TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Questo teorema dall'aria innoqua si rivela in realtà assai utile. Per esempio, consideriamo la funzione continua $f(x) = x^2 - a$ (con $a > 0$) sull'intervallo $[0, a+1]$. Si vede subito che $f(0) = -a < 0$, mentre $f(a+1) = a^2 + a + 1 > 0$. Il teorema ci assicura che esiste un punto c dell'intervallo tale che $c^2 - a = 0$: abbiamo così dimostrato che esiste la radice quadrata di a . Essa è poi unica perché la funzione considerata è strettamente crescente sulla semiretta dei reali positivi (e quindi non si può annullare due volte).

In maniera analoga possiamo dimostrare l'esistenza del logaritmo, delle funzioni trigonometriche inverse, delle radici di ogni ordine....Non sarà nemmeno difficile verificare che tutte queste funzioni sono continue.

Lezione del 10/10/2006 (2 ore): Prima di dimostrare il teorema di esistenza degli zeri, voglio proporvi un esercizio guidato per dimostrare due limiti fondamentali molto utili: visto che la volta scorsa abbiamo parlato della funzione esponenziale e delle sue proprietà, questo è un buon momento per farlo!

ESERCIZIO: Si provino i due seguenti *limiti fondamentali*:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0$$

per ogni $a > 1$ e per ogni $b > 0$.

[*SUGGERIMENTO:* Cominciamo con l'osservare che, grazie alla disuguaglianza di Bernoulli, $a^n / \sqrt{n} = (1 + (a-1))^n / \sqrt{n} \geq (1 + n(a-1)) / \sqrt{n} = 1/\sqrt{n} + \sqrt{n}(a-1) \rightarrow +\infty$, e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n}} = +\infty$.

Si ha poi, per $x > 0$,

$$\frac{a^x}{\sqrt{x}} \geq \frac{a^{[x]}}{\sqrt{[x]+1}} = \frac{a^{[x]+1}}{a\sqrt{[x]+1}}.$$

La quantità a destra, per $x \rightarrow +\infty$ tende a $+\infty$ grazie al limite di successione appena visto. Ne consegue che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Da questo segue facilmente il primo dei due limiti fondamentali scritti sopra, in quanto

$$\frac{a^x}{x^b} = \left(\frac{(a^{\frac{1}{2b}})^x}{\sqrt{x}} \right)^{2b} \dots$$

(Per fare il limite di funzione composta serve la continuità della funzione $g(y) = y^{2b}$ con $y \geq 0$... Questa è una conseguenza della continuità di esponenziale e logaritmo in quanto $y^{2b} = e^{2b \log x}$.)

Per verificare il secondo “limite fondamentale”, è sufficiente cambiare variabile ponendo $y = \log x$.]

Propongo due diverse dimostrazioni del teorema di esistenza degli zeri (in aula abbiamo visto la seconda!).

PRIMA DIMOSTRAZIONE (lunghetta ma istruttiva...): Usiamo il cosiddetto metodo di bisezione. Sia $d = (b - a)/2$ il punto medio dell’intervallo $[a, b]$: se $f(d) = 0$ siamo felicissimi perché abbiamo trovato il punto voluto, in caso contrario avremo $f(d) < 0$ oppure $f(d) > 0$. In ogni caso, in uno dei due “mezzi intervalli” $[a, d]$ oppure $[d, b]$ si ripropone la situazione di partenza: f è negativa nell’estremo sinistro dell’intervallo, positiva nell’estremo destro. Chiamiamo $[a_1, b_1]$ il semiintervallo che gode di questa proprietà.

Ripetiamo poi la stessa costruzione: prendiamo il punto di mezzo dell’intervallo $[a_1, b_1]$ e osserviamo che se la funzione non si annulla nel punto di mezzo (ma se così fosse avremmo finito), in uno dei due mezzi intervalli che chiameremo $[a_2, b_2]$ si ripropone la situazione di partenza: $f(a_2) < 0$ e $f(b_2) > 0$.

Iteriamo questa costruzione: se il processo non si arresta perché troviamo un punto in cui la funzione si annulla, avremmo individuato una successione infinita di intervalli $[a_n, b_n]$, ciascuno contenuto nel precedente e tali che $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. Per costruzione abbiamo che la successione degli estremi sinistri a_n è crescente, la successione degli estremi destri b_n è decrescente e inoltre $b_n - a_n = (b - a)/2^n$. Siccome una successione crescente e limitata ammette limite finito, esisterà il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = c$, ed evidentemente $c \in [a, b]$.

È evidente che si ha anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = c$ per quanto osservato sopra sulla differenza tra a_n e b_n . Grazie alla continuità di f , si ha poi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(c) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c).$$

D’altra parte, il primo limite deve essere necessariamente ≤ 0 in quanto limite di una successione di numeri negativi, mentre il secondo deve essere ≥ 0 in quanto limite di una successione di numeri positivi: siccome i due limiti sono entrambi uguali a $f(c)$, ne deriva che $f(c) = 0$. Q.E.D.

DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA: Vogliamo proporre un'altra dimostrazione del teorema, leggermente più rapida.

Poniamo $c = \sup A$, dove $A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Questo è evidentemente un numero reale compreso tra a e b . Dico che $f(c) = 0$.

Infatti, se per assurdo avessimo $f(c) > 0$, per definizione di limite avremmo $f(x) > 0$ anche per tutti gli x in un certo intorno sinistro $[c - \delta, c]$ di c .³ Quindi $c - \delta$ sarebbe un maggiorante di A più piccolo di c , contro la definizione di estremo superiore.

Se poi fosse $f(c) < 0$, dovrebbe essere $c < b$ (perché $f(b) > 0$). Per lo stesso motivo di prima, troveremmo $\delta > 0$ tale che $f(x) < 0$ per $x \in [c, c + \delta]$, e c non sarebbe più un maggiorante di A . Q.E.D.

Un immediato corollario del teorema di esistenza degli zeri è il seguente

TEOREMA (dei valori intermedi): Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua, essa assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

Dimostrazione: Sia y_0 un valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$. Basta applicare il Teorema di esistenza degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - y_0$...

Q.E.D.

Da questo teorema segue che se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua e strettamente crescente (che è evidentemente iniettiva!), essa è *surriettiva* sull'intervallo $[f(a), f(b)]$: in altre parole, essa è *invertibile*. Questo ci assicura l'esistenza di radici, logaritmi, funzioni inverse delle funzioni trigonometriche...

Sarebbe però piacevole sapere che queste funzioni inverse sono continue! La risposta si può facilmente desumere dal seguente

TEOREMA (Continuità delle funzioni monotone): Una funzione crescente $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è continua se e solo se

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

Un risultato analogo vale per le funzioni decrescenti.

DIM.: Se f è continua, la tesi è una conseguenza immediata del Teorema dei valori intermedi. Viceversa, supponiamo che f non sia continua, e sia x_0 un suo punto di discontinuità (supponiamo per semplicità $x_0 \in (a, b)$: le semplici modifiche necessarie nei casi $x_0 = a$ o $x_0 = b$ sono lasciate per esercizio).

Abbiamo visto che le funzioni crescenti ammettono sempre limite destro e sinistro, che evidentemente devono essere diversi in x_0 :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : a \leq x < x_0\} <$$

³Questo semplice fatto è noto come *teorema della permanenza del segno*: se una funzione ha limite positivo in x_0 , allora è positiva in un intorno di x_0 (con la possibile esclusione di x_0).

$$\ell_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x_0 < x \leq b\}.$$

Per la crescenza di f , segue subito che $f([a, b])$ contiene al più un punto dell'intervallo aperto (ℓ_1, ℓ_2) , ossia il valore $f(x_0)$ se questo non coincide con uno dei due limiti: per questo motivo f non può essere suriettiva.

Q.E.D.

Da quest'ultimo teorema segue che *la funzione inversa di una funzione continua e strettamente crescente definita su un intervallo $[a, b]$, è anch'essa continua*. Infatti, la funzione inversa è strettamente crescente e suriettiva da $[f(a), f(b)]$ in $[a, b]$.

Sono in particolare continue le radici, i logaritmi, le funzioni trigonometriche inverse...

Un altro, importante risultato sulle funzioni continue è il

TEOREMA (di Weierstrass): Una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ammette massimo e minimo. (Attenzione: è importante che il dominio della funzione sia un intervallo chiuso e limitato, e che la funzione sia continua. Abbiamo visto con qualche esempio che senza queste ipotesi la tesi può anche essere falsa!).

Per dimostrare il teorema di Weierstrass useremo un risultato che si rivelerà utilissimo in molte altre occasioni: il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Oggi non è rimasto neanche il tempo per enunciare tale teorema: ci limitiamo a dare un'importante definizione che sarà necessaria a comprenderlo.

DEFINIZIONE: Data una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, una sua *sottosuccessione* è una nuova successione del tipo $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbf{N}}$, dove n_k è a sua volta una *successione strettamente crescente di numeri naturali*.

Per esempio, da una data successione si può estrarre la sottosuccessione dei termini di indice pari, dei termini di indice dispari, di quelli il cui indice è divisibile per 54...

Evidentemente, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$, a maggior ragione si avrà $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \ell$ per ogni sottosuccessione della prima. È però interessante notare che anche da una successione che *non ha limite* si può estrarre una sottosuccessione che ce l'ha:

Lezione del 13/10/2006 (2 ore): Enunciamo e dimostriamo il Teorema di Bolzano-Weierstrass:

TEOREMA (di Bolzano-Weierstrass): Da una successione limitata $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ è sempre possibile estrarre una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbf{N}}$ che ammette limite finito.

DIM.: Dimostriamo il teorema usando il buon vecchio metodo di bisezione. Per ipotesi, la nostra successione è limitata, cioè esiste un intervallo $[\alpha, \beta]$ tale che $a_n \in [\alpha, \beta]$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Se dividiamo l'intervallo $[\alpha, \beta]$ in due metà uguali, ce ne dovrà essere almeno una (che chiameremo $[\alpha_1, \beta_1]$) tale che $a_n \in [\alpha_1, \beta_1]$ per infiniti indici n . Analogamente, se dividiamo $[\alpha_1, \beta_1]$ in due metà uguali, ce ne sarà una che chiameremo $[\alpha_2, \beta_2]$ tale che $a_n \in [\alpha_2, \beta_2]$ per infiniti indici n .

Proseguendo in questo modo, costruiamo una successione infinita di intervalli $[\alpha_k, \beta_k]$, ciascuno dei quali è una delle due metà del precedente, con la proprietà che la successione $\{a_n\}$ cade entro $[\alpha_k, \beta_k]$ per infiniti indici n .

Evidentemente, $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ è una successione crescente per cui esisterà

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = \ell \in [\alpha, \beta].$$

Inoltre, avremo anche $\lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k = \ell$ poiché $\beta_k - \alpha_k = (\beta - \alpha)/2^k$.

Costruiamo una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ nel modo seguente: come n_1 prendiamo il più piccolo indice n per cui a_n appartiene a $[\alpha_1, \beta_1]$, come n_2 il più piccolo indice $n > n_1$ per cui $a_n \in [\alpha_2, \beta_2]$ (esisterà certamente: di indici siffatti ce ne sono infiniti per costruzione di $[\alpha_2, \beta_2]$)... Proseguiamo allo stesso modo: n_k sarà il più piccolo indice $n > n_{k-1}$ per cui $a_n \in [\alpha_k, \beta_k]$.

In questo modo, avremo individuato una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ tale che $\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$ per ogni k . Grazie al teorema dei carabinieri, si avrà quindi $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \ell$. Q.E.D.

DIM. DEL TEOREMA DI WEIERSTRASS: Sia

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Dobbiamo mostrare che M è finito ed è il massimo di f , cioè che esiste $\bar{x} \in [a, b]$ tale che $f(\bar{x}) = M$. L'esistenza del minimo si dimostra poi in modo analogo.

Innanzitutto, dalla definizione di sup segue che possiamo trovare una successione $\{x_n\} \subset [a, b]$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M.$$

Infatti, se M è finito e $n \in \mathbf{N}$, basta osservare che $M - \frac{1}{n}$ non è un maggiorante dell'immagine di f per trovare $x_n \in [a, b]$ tale che $M - \varepsilon < f(x_n) \leq M$.

Se viceversa $M = +\infty$ e $n \in \mathbf{N}$, allora n non è un maggiorante dell'immagine di f (perché essa è illimitata superiormente): esiste dunque x_n tale che $f(x_n) > n$.

La successione $\{x_n\}$ è limitata (perché lo è l'intervallo $[a, b]$): il teorema di Bolzano-Weierstrass ci fornisce una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_k$ tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \bar{x}$. Evidentemente, $\bar{x} \in [a, b]$ (e per questo è essenziale la chiusura dell'intervallo...).

Allora, grazie alla continuità di f in \bar{x} si ha:

$$M = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x}),$$

e \bar{x} è il punto di massimo cercato. Q.E.D.

Concluso il nostro studio delle funzioni continue, è giunto il momento di avvicinarci al calcolo differenziale. Cominciamo dunque a introdurre il fondamentale concetto di derivata di una funzione.

Supponiamo di avere una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, e di voler capire come è fatto il suo grafico: questo può avere un notevole interesse applicativo, per esempio se vogliamo massimizzare o minimizzare una quantità fisica rappresentata da f .

Se guardiamo il grafico di una funzione “a caso” (che sia però abbastanza regolare: supponiamo che il grafico sia una linea continua e senza spigoli vivi), ci accorgiamo che ci sarebbe estremamente utile saper identificare i tratti “in salita” e i tratti “in discesa” del grafico della funzione! Per far questo, abbiamo bisogno di una definizione di *pendenza del nostro grafico in un punto*.

Se la funzione è un polinomio di primo grado, cioè se $f(x) = mx + q$, il grafico è una retta e la risposta è facilissima: la pendenza del grafico (in senso “stradale”: rapporto tra quanto si sale e quanto ci si sposta in orizzontale!) è data *dal coefficiente angolare* m . In sostanza, per chi si sposta da sinistra verso destra, se $m > 0$ il grafico è in “salita”, se $m = 0$ è “piano” e se $m < 0$ è in “discesa”!

Se prendiamo però una funzione il cui grafico non sia una retta, la pendenza non sarà più costante, ma potrà cambiare da punto a punto. Vedremo la prossima volta come fare a definire in modo rigoroso questa “pendenza nel punto”!

Lezione del 17/10/2006 (2 ore): Vediamo come possiamo definire la “pendenza” del grafico di una funzione reale di variabile reale in un suo punto di ascissa x_0 : se prendiamo due punti *abbastanza vicini* sulla retta reale, x_0 e $x_0 + h$, è ragionevole pensare che la “pendenza” del grafico di f in x_0

(qualunque cosa questo significhi!), sia vicina alla pendenza della retta che passa per i due punti corrispondenti sul grafico, $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0) + h)$. Tale pendenza è data dall'espressione

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

detta “rapporto incrementale”.

E' ragionevole supporre che prendendo h sempre più piccolo (e quindi i due punti sempre più vicini), avremo un'approssimazione sempre migliore della pendenza del grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$. Diamo dunque la seguente

DEFINIZIONE: La pendenza del grafico di f per $x = x_0$ si chiama derivata di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$. Essa si definisce ponendo

$$f'(x_0) =_{def} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

purché il limite esista finito.

Se il limite non esiste o è infinito, non è definita la pendenza e diciamo che la funzione non è derivabile in x_0 .

In particolare, se $f'(x_0)$ esiste, la *retta tangente* al grafico di f per $x = x_0$ sarà la retta passante per $(x_0, f(x_0))$ la cui pendenza coincide con quella del grafico stesso: essa avrà dunque equazione $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Passiamo ad un esempio che mostra la potenza della nozione di derivata. Consideriamo la funzione $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$: si tratta di un polinomio di terzo grado, un oggetto non tanto complicato il cui grafico non è comunque facile da indovinare!

Calcoliamo il rapporto incrementale di f (pendenza media del grafico) tra x_0 e $x_0 + h$: troviamo

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 6x_0^2 + 6x_0h + 2h^2 - 6x_0 - 3h,$$

e il limite di questo oggetto per $h \rightarrow 0$ è $f'(x_0) = 6x_0^2 - 6x_0$. Studiando il segno di questa espressione, scopriamo che il grafico di f “è in salita” per $x_0 < 0$, in “discesa” tra 0 e 1, e di nuovo “in salita” per $x_0 > 1$... Se calcoliamo f in 1 e in 0, e osserviamo che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ possiamo tracciare un grafico ragionevolmente preciso di f !

Diamo altre possibili interpretazioni del rapporto incrementale e della derivata: velocità media e velocità istantanea di un corpo che si muove di moto rettilineo, velocità media e istantanea di una reazione chimica, tasso di interesse (o tasso di aumento dell'inflazione...).

Un risultato assai semplice ma importante è il seguente

TEOREMA: Se f è una funzione definita in un intorno di x_0 derivabile in x_0 , allora f è anche continua in x_0 .

Dimostrazione: Si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h = 0.$$

Infatti, nell'ultima espressione la frazione tende a $f'(x_0)$, mentre il fattore h tende a 0.

Q.E.D.

Osserviamo che il viceversa non è vero: una funzione può essere continua ma non derivabile in un punto, come ad esempio la funzione $f(x) = |x|$ in 0.

Come abbiamo fatto con i limiti, possiamo chiederci cosa sia la derivata della somma, del prodotto o del rapporto di due funzioni:

TEOREMA (Algebra delle derivate): Siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni definite in un intorno di x_0 , derivabili in x_0 .

- (i) La somma di f e g è derivabile in x_0 , e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
- (ii) Il prodotto di f e g è derivabile in x_0 , e $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
- (iii) se $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Dimostrazione: La (i) è praticamente ovvia (il rapporto incrementale della somma è la somma dei rapporti incrementali...

Dimostriamo la (ii): abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\ & \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0 + h) + f(x_0)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\ & \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} g(x_0 + h) + f(x_0) \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \end{aligned}$$

e passando al limite per $h \rightarrow 0$ (tenendo conto anche della continuità delle funzioni derivabili) si ottiene (ii).

Per dimostrare la (iii), calcoliamoci la derivata di $1/g(x)$: dobbiamo fare

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \cdot \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)} = - \frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

La (iii) segue allora immediatamente usando la formula appena ricavata e la (ii). Q.E.D.

Usando queste semplici regole, e la stessa definizione di derivata, verifichiamo senza difficoltà che $(x^n)' = nx^{n-1}$ per $n \in \mathbf{Z}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $(e^x)' = e^x$ (e analogamente $(a^x)' = a^x \log a$), $(\log x)' = \frac{1}{x}$.

Vediamo ora come si deriva una funzione composta:

TEOREMA (Chain Rule): Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 , derivabile in x_0 , e sia g una funzione definita in un intorno di $y_0 = f(x_0)$, derivabile in y_0 . Allora la funzione composta $g \circ f(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Dimostrazione: Introduciamo la seguente funzione ausiliaria, definita in un intorno di 0:

$$A(k) = \begin{cases} \frac{g(y_0+k) - g(y_0)}{k} & \text{se } k \neq 0, \\ g'(y_0) & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Evidentemente, questa funzione è *continua in 0*, per definizione di derivata.

Costruiamo ora il rapporto incrementale della funzione $g \circ f$, e passiamo al limite per $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} &= \\ A(f(x_0+h) - f(x_0)) \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &\rightarrow g'(f(x_0))f'(x_0). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Usando questa formula possiamo calcolarci altre derivate. Per esempio, se $x > 0$ e $a \in \mathbf{R}$ abbiamo: $(x^a)' = (e^{a \log x})' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$.

Analogamente

$$(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \log f(x)})' = \dots$$

Lezione del 20/10/2006 (2 ore): Ci poniamo ora la questione della derivabilità dell'inversa di una funzione derivabile (ed invertibile).

TEOREMA (Derivata della funzione inversa): Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua e strettamente crescente, $g : (c, d) \rightarrow (a, b)$ la sua inversa (con $c = f(a)$, $d = f(b)$). Se f è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e $f'(x_0) \neq 0$, allora g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, e $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$. In altre parole,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Dimostrazione: Osserviamo che se sapessimo già che la funzione inversa g è derivabile in y_0 , la formula per la derivata di g sarebbe facilissima da trovare. Infatti $g(f(x)) = x$, e derivando ambo i membri si ha $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1$, da cui la formula voluta.

Siccome però non sappiamo che g è derivabile in y_0 , dobbiamo proprio trovare il limite del rapporto incrementale $(g(y_0 + h) - g(y_0))/h$ per $h \rightarrow 0$.

Se poniamo $y_0 + h = f(x_0 + k)$, applicando la g ad ambo i membri troviamo $g(y_0 + h) = x_0 + k = g(y_0) + k$, da cui $g(y_0 + h) - g(y_0) = k$. Siccome sappiamo che con le nostre ipotesi la funzione inversa g è continua, vediamo che quando $h \rightarrow 0$ anche $k \rightarrow 0$. Dunque

$$g'(y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{f(x_0 + k) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Q.E.D.

Utilizziamo il teorema di derivazione della funzione inversa per trovare la derivata di $\arcsin y$:

$$\begin{aligned} (\arcsin y)' &= \frac{1}{(\sin)'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos \arcsin y} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}. \end{aligned}$$

In maniera del tutto analoga troviamo che $(\arccos y)' = -1/\sqrt{1 - y^2}$, e che $(\arctan y)' = 1/(1 + y^2)$ (per quest'ultima formula, si ricordi l'identità $\cos^2 \alpha = 1/(1 + \tan^2 \alpha)$).

Ora abbiamo a disposizione un arsenale di risultati sufficiente a calcolare le derivate di tutte le funzioni esprimibili in termini di funzioni elementari tramite operazioni algebriche e di composizione. Quindi, in linea di principio, siamo in grado di studiare l'andamento di un gran numero di funzioni studiando il segno delle loro derivate.

Per determinare in modo più accurato l'andamento del grafico di una funzione, è utile saper trovare gli intervalli di concavità e di convessità del grafico stesso: bisogna cioè saper determinare se, in un certo intervallo, la funzione "fa la pancia" verso il basso o verso l'alto....

Cominciamo con una definizione rigorosa di convessità *per una funzione derivabile*: in realtà, si può dare una definizione più generale, valida anche per funzioni non derivabili.

Definizione: Diciamo che una funzione derivabile $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è *convessa sull'intervallo* $[a, b]$ se il grafico di f giace tutto al di sopra di ogni retta tangente al grafico stesso, condotta per un punto qualunque di $[a, b]$. Con linguaggio simbolico, vogliamo che per ogni $x_0 \in [a, b]$ e per ogni $x \in [a, b]$ valga

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Se vale sempre la disuguaglianza opposta, diremo che la funzione è *concava*.

Se disegniamo il grafico di una funzione convessa, osserviamo come la pendenza delle rette tangenti cresca man mano che il punto di tangenza si sposta verso destra: in effetti, questa è una caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili:

TEOREMA: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Allora f è convessa se e solo se la funzione derivata f' è *crescente* sull'intervallo $[a, b]$.

Dimostrazione: Supponiamo che f sia convessa, e prendiamo x_1, x_2 in $[a, b]$. Per la disuguaglianza di convessità abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1), \\ f(x) &\geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2), \end{aligned}$$

disuguaglianze valide per ogni $x \in [a, b]$. In particolare, prendiamo $x = x_2$ nella prima disuguaglianza, $x = x_1$ nella seconda, e sommiamo: si ottiene

$$(f'(x_1) - f'(x_2)) \cdot (x_2 - x_1) \leq 0,$$

che è proprio la crescenza della funzione derivata.

Viceversa, supponiamo che la funzione f' sia crescente e prendiamo $x_0 \in [a, b]$. Consideriamo la funzione derivabile $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$. Si ha $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$, per cui g' è una funzione crescente che è negativa per $x < x_0$, mentre è positiva per $x > x_0$. Ne deduciamo che la funzione g ha un minimo assoluto per $x = x_0$. Poichè $g(x_0) \geq 0$, abbiamo $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$: questa è proprio la disuguaglianza di convessità!
Q.E.D.

Grazie a questo teorema, abbiamo un comodo criterio di convessità per funzioni la cui derivata sia ancora derivabile (ossia per funzioni derivabili due volte): una funzione f derivabile due volte in un intervallo sarà *convessa* se $f''(x) \geq 0$ per ogni x nell'intervallo, sarà invece *concava* se $f''(x) \leq 0$ in ogni punto x dell'intervallo⁴.

Lezione del 24/10/2006 (2 ore): Passiamo ora ad esaminare con le dovute cautele un fatto che abbiamo usato sinora con indebita disinvoltura. Infatti, abbiamo osservato che siccome la derivata corrisponde geometricamente alla “pendenza del grafico”, se una funzione ha derivata positiva in un intervallo, essa sarà crescente in esso.

Questo fatto è intuitivamente molto plausibile, perché non si vede come una funzione possa avere il grafico “in salita” in tutti i punti di un intervallo senza essere anche crescente! D'altra parte, non ne abbiamo vista alcuna dimostrazione rigorosa: tale dimostrazione è lo scopo dei discorsi che seguono.

Cominciamo col ricordare la seguente definizione:

DEFINIZIONE: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. Un punto $x_0 \in [a, b]$ si dice di *massimo relativo* (risp., di *minimo relativo*) per f se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)$ (risp., $f(x) \geq f(x_0)$) per ogni $x \in I_{x_0} \cap [a, b]$.

Veniamo ad un primo, semplice risultato: se una funzione è derivabile in un punto di *massimo o minimo relativo interno* all'intervallo di definizione, in quel punto la derivata si deve annullare:

TEOREMA (Principio di Fermat): Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in (a, b)$ un punto di *massimo o minimo relativo* per f . Se f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo per fissare le idee che x_0 sia di minimo relativo.

Consideriamo il rapporto incrementale per f in x_0 :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Se prendiamo h abbastanza piccolo, in modo che $x_0 + h$ appartenga all'intorno I_{x_0} nella definizione di minimo relativo, vediamo subito che il numeratore è maggiore o uguale a 0. Ne consegue che il rapporto incrementale sarà positivo (o nullo) per $h > 0$ abbastanza piccolo, e negativo (o nullo) per $h < 0$ abbastanza piccolo in modulo. Ne segue che

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

⁴Abbiamo usato il fatto che una funzione derivabile è crescente se e solo se la sua derivata è non negativa: questo è intuitivamente vero, e verrà dimostrato con tutti i crismi tra pochissimo!

e contemporaneamente

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Dunque, $f'(x_0) = 0$, Q.E.D.

Si noti che questo teorema può essere falso per punti di massimo o minimo relativo che siano *agli estremi* dell'intervallo su cui f è definita. Per esempio, si consideri la funzione $f(x) = x$ sull'intervallo $[0, 1]$...

Due conseguenze di questo principio sono i teoremi di Rolle e di Lagrange, che sono tra i risultati più importanti del calcolo differenziale per funzioni di una variabile:

TEOREMA (di Rolle): Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua, derivabile nell'intervallo (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

DIMOSTRAZIONE: Grazie al teorema di Weierstrass, la funzione possiede un punto di massimo assoluto x_M , e uno di minimo assoluto x_m .

Se uno di questi punti appartiene all'interno dell'intervallo, esso è anche di massimo o minimo relativo, e per il principio di Fermat la derivata si deve annullare in quel punto (che sarà dunque il punto c cercato).

In caso contrario, x_m e x_M coincidono con gli estremi a e b dell'intervallo. Allora, per ogni $x \in [a, b]$ si ha

$$f(a) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(b) = f(a),$$

per cui il massimo e il minimo di f coincidono. Ne segue che f è costante, e la sua derivata si annulla in *tutti* i punti dell'intervallo.

TEOREMA (di Lagrange): Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua, derivabile nell'intervallo (a, b) . Esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Questa è una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Inoltre $g(a) = f(a) = g(b)$, per cui possiamo applicare il teorema di Rolle e ottenere un punto $c \in (a, b)$ tale che $g'(c) = 0$. Questo è proprio il punto cercato. Q.E.D.

A lezione, abbiamo visto che le ipotesi di questi due teoremi non possono essere in generale indebolite, e abbiamo discusso il significato geometrico di questi risultati.

Quel che è più importante, è comunque la seguente conseguenza del teorema di Lagrange:

COROLLARIO: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, allora f è crescente in $[a, b]$.

Se f' è invece minore o uguale a 0, la funzione è decrescente in $[a, b]$. Infine, se $f' = 0$ in tutto l'intervallo, la funzione è costante.

DIMOSTRAZIONE: Facciamo vedere per esempio che vale la prima delle nostre affermazioni: supponiamo che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Siano poi x_1 e x_2 due punti di $[a, b]$, con $x_1 < x_2$. Applichiamo il teorema di Lagrange a f sull'intervallo $[x_1, x_2]$: troviamo $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c).$$

Per l'ipotesi sulla derivata, il membro di destra è maggiore o uguale a zero. Q.E.D.

Come conseguenza del teorema di Lagrange, abbiamo anche ottenuto un risultato semplice e utile: sia f una funzione derivabile in un intorno I_{x_0} di x_0 , tranne eventualmente in x_0 . Se f è continua in x_0 , e se esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell$, allora f è derivabile anche in x_0 e $f'(x_0) = \ell$.

Per ottenere questo risultato è sufficiente applicare il teorema di Lagrange al rapporto incrementale di f in x_0 ...

Lo stesso risultato si può ottenere anche grazie al Teorema di l'Hôpital, che è utilissimo quando si devono calcolare limiti nella forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞ :

TEOREMA (l'Hôpital): Siano f, g funzioni derivabili in un intorno di x_0 , tranne eventualmente in x_0 (dove possono anche non essere definite). Supponiamo inoltre che $g'(x) \neq 0$ in tale intorno e che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

Se esiste (finito o infinito) il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

e questi due limiti sono uguali. L'enunciato del teorema rimane vero anche se $x_0 = \pm\infty$.

A lezione, abbiamo visto un esempio di applicazione di questo teorema. Attenzione: il limite del rapporto $f(x)/g(x)$ (in una delle due forme indeterminate suddette) può benissimo esistere anche se non esiste il limite del rapporto delle derivate.

Non vedremo invece la dimostrazione del teorema.

Lezione del 7/11/2006 (2 ore): Nella lezione di oggi ci occuperemo del problema di approssimare una funzione regolare, in un intorno di un punto, mediante polinomi.

Supponiamo di avere una funzione f derivabile in x_0 : se ci chiedessero qual è la retta che meglio approssima il grafico di f vicino a x_0 , probabilmente risponderemmo tutti che è la retta tangente $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$: la cosa è ancora più plausibile se facciamo un disegno!

Vediamo però di precisare meglio (in maniera quantitativa) in che senso la retta tangente è quella che approssima meglio f in un intorno di x_0 : se $g(x) = ax + b$ è un polinomio di primo grado che approssima f , possiamo scrivere che $f(x) = g(x) + R(x)$, dove $R(x)$ è un "resto" che vogliamo sia il più piccolo possibile quando x si avvicina a x_0 .

Siccome $R(x) = f(x) - a(x - x_0) - b$, notiamo subito che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0 \iff b = f(x_0).$$

In questo senso, tutte le rette che passano per il punto $(x_0, f(x_0))$ "approssimano f ", nel senso che il resto tende a zero quando x si avvicina a x_0 ! Perché, dunque, la retta tangente è meglio delle altre?

Perché è l'unica per cui *il resto tende a zero più rapidamente di $x - x_0$* , cioè è l'unica per cui si abbia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

Infatti, siccome abbiamo già osservato che deve essere $b = f(x_0)$, la quantità di cui dobbiamo fare il limite diventa:

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \rightarrow f'(x_0) - a.$$

Dunque, il limite è zero se $a = f'(x_0)$, mentre è non nullo in tutti gli altri casi.

Concludiamo dunque che la retta tangente è la retta di migliore approssimazione intorno a x_0 , nel senso che è quella per cui *il resto tende a 0 più rapidamente quando $x \rightarrow x_0$* !

Nel tentativo di generalizzare quanto appena scoperto, diventa naturale chiedersi qual è il polinomio di grado n che meglio approssima una certa funzione f (che supporremo derivabile quante volte si vuole) in un intorno di x_0 . Ci viene il sospetto che sia un polinomio simile alla retta tangente, nel senso che le sue derivate fino alla n -esima nel punto x_0 dovranno coincidere con quelle di f ...

Per semplificarci la vita, supponiamo che sia $x_0 = 0$: ci si può sempre ridurre a questa situazione con una traslazione lungo l'asse delle x .

Il *polinomio di Taylor di grado n per f centrato in 0* è definito da

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

(Si noti che, ironia della sorte, il polinomio di Taylor “di grado n ” ha in realtà grado *minore o uguale a n* ...)

LEMMA 1: Sia f una funzione derivabile n volte in x_0 . Tra tutti i polinomi $P(x)$ di grado minore o uguale a n , il polinomio di Taylor $P_n(x)$ è l'unico tale che $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$, ..., $P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$.

DIM.: Il generico polinomio di grado minore o uguale a n sarà della forma $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Ora, derivando h volte il monomio x^k si ottiene $k(k-1)\dots(k-h+1)x^{k-h}$ se $h < k$, $k!$ per $h = k$, mentre si ottiene 0 per $h > k$. Tale funzione è sempre nulla in 0, tranne che nell'unico caso in cui $h = k$, in cui vale $k!$.

Dunque, sostituendo nelle relazioni che abbiamo si ottiene $P(0) = a_0 = f(0)$, $P'(0) = a_1 = f'(0)$, $P''(0) = 2a_2 = f''(0)$, e in generale (per $k \leq n$) $P^{(k)}(0) = k!a_k = f^{(k)}(0)$. Di conseguenza, i coefficienti del polinomio devono essere proprio quelli che abbiamo attribuito al polinomio di Taylor di grado n . Q.E.D.

Proseguiamo la nostra discussione sull'approssimazione di funzioni mediante polinomi. Ci servirà il seguente lemma:

LEMMA 2: Sia $g(x)$ una funzione derivabile $n - 1$ volte in un intorno di 0, con derivata n -esima in 0. Se $g(0) = g'(0) = g''(0) = \dots = g^{(n)}(0) = 0$, allora abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0.$$

DIM.: Basta applicare $n - 1$ volte il teorema di L'Hôpital (grazie alle nostre ipotesi, ad ogni passo abbiamo una forma indeterminata $0/0$) ed infine la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{n x^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n! x} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{g^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(0)}{x} &= \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Osservazione: Se g è come nel lemma, ma qualcuna delle derivate di ordine minore o uguale a n è diversa da 0, il limite *non può* essere 0: rifacendo lo stesso calcolo, si trova che è infinito, oppure è un numero diverso da zero.

Come corollario, otteniamo una prima forma del Teorema di Taylor:

TEOREMA (Di Taylor con resto di Peano): Sia f una funzione derivabile $n - 1$ volte in un intorno di 0 con derivata n -esima in 0. Se $P_n(x)$ denota il polinomio di Taylor di grado n centrato in 0, allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = 0.$$

Tra tutti i polinomi di grado minore o uguale a n , il polinomio di Taylor è l'unico ad avere questa proprietà.

DIM.: Grazie al Lemma 1, la funzione $g(x) = f(x) - P_n(x)$ soddisfa le ipotesi del Lemma 2, e il teorema risulta dimostrato. L'unicità del polinomio di Taylor rispetto a questa proprietà segue dall'Osservazione fatta dopo la dimostrazione del Lemma 2. Q.E.D.

Osservazione: Se al posto di 0 prendiamo un generico punto x_0 , il polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 sarà

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

In questo caso, il teorema di Taylor dice che se f è derivabile $(n - 1)$ volte in un intorno di x_0 , e possiede derivata n -esima in x_0 , allora

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \text{ con } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Lezione del 10/11/2006 (2 ore): A proposito della formula di Taylor con resto di Peano, torna comoda la definizione di “o piccolo”:

DEFINIZIONE: Date due funzioni f, g definite in un intorno di x_0 , diremo che f è un “o piccolo” di g per $x \rightarrow x_0$, e scriveremo $f(x) = o(g(x))$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

cioè se $f(x)$ tende a zero più rapidamente di $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$.

Con il linguaggio degli “o piccoli”, il teorema di Taylor con resto di Peano dice che $f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$...

Applichiamo ora la formula di Taylor con resto di Peano allo studio dei massimi e dei minimi relativi di una funzione. L’idea è che spesso, per capire se un punto in cui la derivata prima si annulla è di massimo o minimo relativo, basta studiare il segno della derivata seconda:

TEOREMA: Sia f una funzione derivabile k volte in x_0 ($k \geq 2$), e supponiamo che le prime $k - 1$ derivate esistano in un intorno di x_0 . Supponiamo anche che $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, mentre $f^{(h)}(x_0) = 0$ per $h = 1, \dots, k - 1$ (in altre parole, la prima derivata che non si annulla è la k -esima).

Allora

- se k è dispari, x_0 non è né di massimo relativo né di minimo relativo;
- se k è pari e $f^{(k)}(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo;
- se k è pari e $f^{(k)}(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo.

DIM.: Si tratta di studiare il segno della funzione $f(x) - f(x_0)$ quando x varia in un intorno sufficientemente piccolo di x_0 : se tale funzione è positiva siamo in presenza di un punto di minimo relativo, se è negativa di un massimo (mentre se essa cambia di segno in ogni intorno, comunque piccolo, di x_0 , il punto non è né di massimo né di minimo).

Se prendiamo x abbastanza vicino a x_0 in modo che valgano le ipotesi del teorema di Taylor, otteniamo

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_k(x) = \left[\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{R_k(x)}{(x - x_0)^k} \right] (x - x_0)^k.$$

Siccome $R_k(x)/(x - x_0)^k \rightarrow 0$, la quantità tra parentesi quadre tende a $f^{(k)}(x_0)/k!$ per $x \rightarrow x_0$. Di conseguenza, essa avrà lo stesso segno di $f^{(k)}(x_0)$

quando x varia in un intorno sufficientemente piccolo di x_0 . Poiché è invece chiaro che il polinomio $(x - x_0)^k$ è sempre positivo per k pari, mentre cambia di segno per k dispari (a seconda che x stia a destra o a sinistra di x_0), la tesi segue immediatamente. Q.E.D.

Osservazione: Il teorema appena dimostrato ci dice che se $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, allora $f(x) > f(x_0)$ (con la disuguaglianza stretta) se $x \neq x_0$ è sufficientemente vicino a x_0 : in altre parole, il punto in questione è un punto di minimo relativo stretto, e dunque non può di sicuro essere di massimo relativo.

Questo ci permette di invertire in parte il risultato precedente: se f è derivabile due volte in un intorno di x_0 e x_0 è di massimo relativo, allora $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$ (La derivata prima si annulla per il principio di Fermat, mentre la seconda non può essere positiva perché se lo fosse il risultato precedente mi darebbe un punto di minimo relativo “stretto”, il che sarebbe assurdo!). Analogamente, in un punto di minimo relativo deve essere $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$.

In molti casi, il nostro teorema permette di stabilire se un punto in cui si annulla la derivata prima corrisponde ad un massimo o minimo relativo: basta trovare la prima derivata diversa da zero (a patto che la funzione sia derivabile abbastanza volte)! Può però capitare che la funzione sia derivabile infinite volte, ma *tutte* le derivate si annullino nel punto che ci interessa:

ESEMPIO: Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Con un po' di fatica si vede che f è derivabile infinite volte in 0, e che tutte le derivate si annullano (abbiamo visto la dimostrazione a lezione: il punto chiave è far vedere, per esempio per induzione, che per $x \neq 0$ si ha per ogni n

$$f^{(n)}(x) = \frac{g_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2},$$

dove $g_n(x)$ è un polinomio... A questo punto, basta passare al limite per $x \rightarrow 0$ per concludere che la derivata n -esima esiste ed è nulla nell'origine).

D'altra parte, siccome la funzione f è non negativa, è evidente che 0 è un punto di minimo relativo.

Conviene tenere presente la funzione f di questo esempio: tornerà utile tra non molto!

Dimostriamo ora una versione leggermente più generale del teorema di Lagrange, che ci tornerà utile per trovare subito dopo un'espressione molto precisa del resto nella formula di Taylor.

TEOREMA (di Cauchy): Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni continue, derivabili in (a, b) . Supponiamo poi che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

DIM.: Si noti che risulta $g(b) \neq g(a)$ (altrimenti otterremo un assurdo col teorema di Rolle): di conseguenza, il denominatore del secondo membro nella tesi non si annulla, e il teorema ha perfettamente senso.

Per dimostrarlo, basta applicare il teorema di Rolle alla funzione ausiliaria $h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$. Q.E.D.

Il prossimo teorema esprime appunto in modo molto preciso il resto che si ha nella formula di Taylor: lo dimostreremo la prossima volta.

TEOREMA (Formula di Taylor con resto di Lagrange): Sia f una funzione derivabile $(n + 1)$ volte in un intorno di x_0 , e sia x un punto appartenente a tale intorno. Allora esiste un punto c , compreso tra x_0 e x , tale che

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

dove

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

è il polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 .

Lezione del 14/11/2006 (2 ore): Cominciamo questa lezione con la dimostrazione della formula di Taylor con resto di Lagrange. Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - P_n(x)$ (cioè il resto n -esimo).

Abbiamo visto la volta scorsa che essa ha la fondamentale proprietà di avere $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$. Inoltre, $g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ perché la derivata $(n + 1)$ -esima del polinomio P_n si annulla identicamente.

L'idea è ora di applicare $(n + 1)$ volte il teorema di Cauchy, a partire dal rapporto

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}}.$$

Infatti, il teorema di Cauchy applicato a tale espressione ci garantisce l'esistenza di un punto c_1 compreso tra x_0 e x , tale che l'espressione stessa è uguale a

$$\frac{g'(c_1)}{(n+1)(c_1 - x_0)^n}.$$

L'ultima quantità può essere anche riscritta

$$\frac{g'(c_1) - g'(x_0)}{(n+1)(c_1 - x_0)^n - (n+1)(x_0 - x_0)^n},$$

e possiamo riapplicare il teorema di Cauchy... Ripetendo questo passaggio per $(n+1)$ volte troviamo:

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \dots = \frac{g^{(n)}(c_n) - g^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(c_n - x_0)} = \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

dove c_1, \dots, c_n, c sono opportuni punti compresi tra x_0 e x . Q.E.D.

ESERCIZIO: Supponiamo che una funzione f soddisfi le ipotesi del teorema appena dimostrato, e che inoltre la derivata $f^{(n+1)}$ sia continua in x_0 . Mostrare che allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = 0.$$

(In buona sostanza, avremo ridimostrato il Teorema di Taylor con resto di Peano, anche se con ipotesi leggermente più forti perché chiediamo la continuità della derivata $(n+1)$ -esima...)

Mettiamo subito a frutto il teorema dimostrato, usandolo per approssimare alcune importanti funzioni con polinomi.

Cominciamo col prendere $f(x) = e^x$ ($e_{x_0} = 0$): la formula di Taylor con resto di Lagrange ci dice che esiste un punto c compreso tra 0 e x tale che

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Dimostriamo ora che il resto, qualunque sia $x \in \mathbf{R}$, tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Si noti che, anche se c dipende in generale sia da x che da n , la quantità e^c è maggiorata da $e^{|x|}$, per cui ci basterà far vedere che $x^{n+1}/(n+1)! \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Questo fatto, a sua volta, si dimostra immediatamente ricordando la stima

$$n! \geq \left(\frac{n}{3}\right)^n,$$

che abbiamo provato per induzione.

In conclusione, abbiamo fatto vedere che

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

L'ultimo limite si chiama *serie di Taylor di e^x* , e si denota usualmente con $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$:

DEFINIZIONE: Se $\{a_k\}$ è una successione di numeri reali, col simbolo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (che si legge “*serie degli a_k* ”, si intende per definizione il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k,$$

a patto che tale limite esista. Se il limite è finito, si dice che la serie *converge*, se è infinito che *diverge*, se infine non esiste si dice che la serie è *indeterminata*.

Con lo stesso tipo di conti, abbiamo poi verificato che si ha anche

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Come ulteriore applicazione del teorema di Taylor con resto di Lagrange, dimostriamo che *il numero di Nepero e è irrazionale*.

Supponiamo infatti per assurdo che si abbia $e = p/q$, con p e q numeri naturali. Applichiamo il teorema di Taylor con resto di Lagrange alla funzione esponenziale, con $x_0 = 0$ e $x = 1$: per ogni $n \in \mathbf{N}$ troviamo un punto $c \in (0, 1)$ tale che

$$e = \frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + e^c \frac{1}{n+1!}.$$

Prendiamo $n > q$, e moltiplichiamo ambo i membri dell'identità per $n!$. Otteniamo:

$$\frac{p}{q} n! = \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \cdot n! + \frac{e^c}{n+1}.$$

Il membro di sinistra dell'uguaglianza è evidentemente un intero, così come il primo pezzo del membro di destra (la quantità tra parentesi tonde moltiplicata per $n!$). Invece, l'ultimo termine è non nullo e si migliora con $e/(n+1)$ (perché $c < 1$), e quest'ultima quantità è strettamente minore di 1 per n abbastanza grande: questo è evidentemente assurdo (un intero non può essere uguale ad un intero più una quantità minore di 1).

Per concludere la lezione, cerchiamo di determinare un'altra serie di Taylor interessante in modo un po' bizzarro. Precisamente, studiamo la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Per definizione di serie, abbiamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1, \\ +\infty & \text{se } x \geq 1, \\ \cancel{\exists} & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

dove abbiamo usato la formula per la somma di una progressione geometrica.

In conclusione, per $-1 < x < 1$ si ha

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

mentre al di fuori di questo intervallo la serie non converge ad un limite finito (o non converge affatto).

Ora, non è affatto difficile verificare che questa è proprio la serie di Taylor (centrata in 0) della funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$: infatti abbiamo $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, da cui $f^{(k)}(0) = k!$.

Questo è un esempio di funzione la cui serie di Taylor centrata in zero converge alla funzione stessa su un intervallo centrato nell'origine, ma non sull'intera retta reale.

Sostituendo x con $-x$ nella serie precedente si ottiene

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad -1 < x < 1.$$

Lezione del 17/11/2006 (2 ore): Per concludere la parte sui polinomi e sulle serie di Taylor, vogliamo dare una brevissima panoramica, senza dimostrazioni, della *teoria delle serie di potenze*: gli studenti di matematica avranno modo di approfondire questa parte nel corso di Analisi 3 U.D.

Una *serie di potenze* è per definizione una serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

dove $\{a_k\}$ è una successione nota di numeri reali. Questo è proprio il tipo di serie che si ottiene come serie di Taylor (centrata nell'origine) di una funzione derivabile infinite volte!

Nel caso peggiore, una serie di potenze converge solo per $x = 0$... In tutti gli altri casi, converge in un intervallo centrato nell'origine, del tipo $(-r, r)$

(oppure $[-r, r]$, $(-r, r]$ o $[-r, r)$... r può anche essere infinito). Il numero r si chiama raggio di convergenza della serie di potenze, e ci sono metodi piuttosto semplici per calcolarlo.

Supponiamo dunque che la nostra serie di potenze abbia raggio di convergenza positivo, e chiamiamo $f(x)$ la somma della serie (per x nell'intervallo in cui questa converge):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Allora si può dimostrare che $f(x)$ è una funzione derivabile infinite volte, e che la serie di potenze non è altro che la serie di Taylor della sua somma $f(x)$ (...e dunque quel che avevamo visto nel caso della funzione $1/(1-x)$ non era casuale). Inoltre, la derivata si calcola semplicemente derivando la serie termine a termine:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Si noti che quest'ultima affermazione non è immediatamente ovvia: stiamo derivando una *somma infinita* di funzioni!

A questo punto, sorge spontanea la seguente questione: se f è una funzione derivabile infinite volte in x_0 , è sempre possibile trovare un intorno di x_0 tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k?$$

La risposta è negativa:

ESEMPIO: Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

già studiata ieri in un altro contesto: abbiamo visto che essa è derivabile infinite volte in 0, e che tutte le derivate si annullano.

Ne segue che la serie di Taylor centrata in 0 per f è identicamente nulla, e quindi evidentemente essa coincide con f solo per $x = 0$.

Le funzioni la cui serie di Taylor converge alla funzione stessa in un intorno di x_0 si dicono *analitiche in x_0* : la funzione dell'esempio non è analitica in 0, mentre la funzione esponenziale, il seno ed il coseno lo sono.

Conclusi i nostri discorsetti sulla formula di Taylor, cominceremo a studiare una definizione rigorosa di area per certe figure piane delimitate da un

contorno curvilineo. Questo ci porterà a dare la definizione di integrale nel senso di Riemann per una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$.

Partiamo da un esempio concreto: supponiamo di voler dare un senso all'area della regione limitata del piano delimitata dall'asse delle x , dal grafico della funzione $f(x) = e^x$, dall'asse delle y e dalla retta $x = a$: si tratta di una specie di trapezio rettangolo, solo che il lato obliquo è curvo (è infatti il grafico della funzione e^x).

Un'idea potrebbe essere la seguente: dividiamo l'intervallo $[0, a]$ in n intervallini uguali (che avranno quindi estremi $0, a/n, 2a/n, 3a/n, \dots, a$). Per ciascuno di questi intervallini, costruiamo un rettangolo che ha l'intervallino stesso come base, e altezza uguale al valore della funzione esponenziale *nell'estremo di sinistra*: in altre parole, sull'intervallino $[ka/n, (k+1)a/n]$ costruiamo un rettangolo di altezza $e^{ka/n}$. In questo modo otteniamo una figura "a scala" che è tutta *contenuta* nella figura curvilinea di cui vogliamo calcolare l'area: l'area di questa scala inscritta si calcola subito, e vale

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n} e^{ka/n} = \frac{a}{n} \cdot \frac{e^a - 1}{e^{a/n} - 1}.$$

L'ultima espressione, per $n \rightarrow +\infty$, tende al numero $(e^a - 1)$, che rappresenta quindi il limite delle nostre approssimazioni per difetto.

In maniera analoga, possiamo costruire una "scala circoscritta" alla regione che ci interessa, prendendo su ciascun intervallino $[ka/n, (k+1)a/n]$ un rettangolo di altezza $e^{(k+1)a/n}$. In tal caso, l'area della scalinata sarà

$$e^{a/n} \frac{a}{n} \cdot \frac{e^a - 1}{e^{a/n} - 1},$$

che tende ancora al limite $e^a - 1$. Possiamo dunque legittimamente affermare che l'area del trapezoide curvilineo sotto la funzione esponenziale tra 0 e a , vale esattamente $e^a - 1$: tale numero si chiama *integrale* della funzione esponenziale tra 0 e a , e si indica

$$\int_0^a e^x dx = e^a - 1.$$

Vedremo la prossima volta come l'idea soggiacente a questo conticino con la funzione esponenziale sia estendibile ad un gran numero di funzioni!

Lezione del 24/11/2006 (2 ore): La volta scorsa abbiamo calcolato l'area del trapezoide curvilineo relativo alla funzione esponenziale e^x . Volendo estendere quest'idea in modo sistematico al maggior numero possibile di funzioni, cominciamo col definire le *funzioni a scala* ed il loro integrale:

DEFINIZIONE: Una funzione $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ si dice *a scala* se esiste una suddivisione di $[a, b]$ in un numero finito di intervallini di estremi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$, in modo tale che ϕ assuma valore costante c_i su ciascun intervallino (x_i, x_{i+1}) (per $i = 0, \dots, N - 1$).

L'*integrale* della suddetta funzione a scala si definisce come

$$\int_a^b \phi(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)c_i.$$

Come si vede, una funzione a scala è caratterizzata dal fatto che il suo grafico è un *istogramma*. Si noti che se ϕ è positiva, l'integrale della funzione a scala è semplicemente l'area dell'unione finita di rettangoli delimitata dal grafico di ϕ , l'asse delle x e le rette verticali $x = a$ e $x = b$. Se ϕ ha anche tratti negativi, l'unica differenza è che gli scalini con "altezza negativa" si contano con "area negativa".

Le funzioni a scala ed il loro integrale godono delle seguenti proprietà, la cui dimostrazione è lasciata alla riflessione del lettore:

LEMMA: Se ϕ_1 e ϕ_2 sono funzioni a scala su $[a, b]$, e $c \in \mathbf{R}$, allora

- $c\phi_1$ e $\phi_1 + \phi_2$ sono funzioni a scala;
- l'*integrale* è lineare:

$$\begin{aligned} \int_a^b (c\phi_1(x)) dx &= c \int_a^b \phi_1(x) dx \\ \int_a^b (\phi_1(x) + \phi_2(x)) dx &= \int_a^b \phi_1(x) dx + \int_a^b \phi_2(x) dx; \end{aligned}$$

- l'*integrale* è monotono: se $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora

$$\int_a^b \phi_1(x) dx \leq \int_a^b \phi_2(x) dx.$$

Siamo ora in grado di definire l'integrale superiore, l'integrale inferiore ed eventualmente l'integrale di una funzione limitata:

DEFINIZIONE: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione limitata. L'*integrale superiore* di f si definisce come

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b \phi(x) dx : \phi \text{ a scala, } \phi \geq f \text{ in } [a, b] \right\}.$$

Analogamente, l'integrale inferiore di f si definisce come

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\left\{\int_a^b \psi(x) dx : \psi \text{ a scala, } \psi \leq f \text{ in } [a, b]\right\}.$$

Se l'integrale superiore e l'integrale inferiore coincidono, diremo che la funzione f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$, ed indicheremo il valore comune dei due integrali con

$$\int_a^b f(x) dx,$$

integrale secondo Riemann di f su $[a, b]$.

Vale una semplice caratterizzazione dell'integrale di Riemann, che permette tra l'altro di verificare la correttezza di quanto trovato sopra per l'integrale della funzione esponenziale:

PROPOSIZIONE: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione limitata. f è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ si possono trovare due funzioni a scala ϕ, ψ con $\psi \leq f \leq \phi$ in $[a, b]$ tali che

$$\int_a^b \phi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx < \varepsilon.$$

Prima di dare la semplice dimostrazione di questo risultato, vediamo un esempio di funzione *non integrabile* secondo Riemann:

ESEMPIO (Funzione di Dirichlet): Si consideri la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Abbiamo già incontrato questa funzione, ed abbiamo osservato che essa è ovunque discontinua. Attualmente, invece, ci preme di osservare che *una funzione a scala maggiore o uguale a f sarà ovunque maggiore o uguale a 1*, e che *una funzione a scala minore o uguale a f è ovunque minore o uguale a 0*. Questo segue dalla densità dei razionali e degli irrazionali: in ogni "scalino" di qualunque funzione a scala, esistono sia punti razionali in cui la funzione vale 1, che punti irrazionali in cui essa vale 0.

Se ne deduce che

$$\int_0^1 f(x) dx = 1, \quad \int_0^1 f(x) dx = 0,$$

e la funzione non è integrabile secondo Riemann.

DIM. della caratterizzazione delle funzioni integrabili: Se f è integrabile, per definizione di integrale superiore e di integrale inferiore possiamo trovare due funzioni a scala ϕ e ψ , la prima maggiore o uguale e la seconda minore o uguale a f , tali che

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi(x) dx &< \int_a^b f(x) dx + \varepsilon/2, \\ \int_a^b \psi(x) dx &> \int_a^b f(x) dx - \varepsilon/2,\end{aligned}$$

da cui

$$\int_a^b \phi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx < \varepsilon.$$

Viceversa, prendiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo le due funzioni a scala ϕ , ψ che ci vengono assicurate dall'ipotesi.

Per definizione di integrale superiore e di integrale inferiore avremo

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi(x) dx &\geq \overline{\int_a^b f(x) dx}, \\ \int_a^b \psi(x) dx &\leq \underline{\int_a^b f(x) dx},\end{aligned}$$

per cui

$$0 \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \underline{\int_a^b f(x) dx} \leq \int_a^b \phi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx < \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε , ne deriva che l'integrale superiore e l'integrale inferiore sono uguali. Q.E.D.

A questo punto, diventa importante far vedere che tutte le funzioni "abbastanza decenti" sono integrabili. Per esempio, sono integrabili le funzioni monotone:

TEOREMA: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è crescente (decrescente), allora è integrabile secondo Riemann.

DIM.: Per fissare le idee, trattiamo il caso in cui f sia crescente.

Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali (lunghe $(b-a)/n$), di estremi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Definiamo una funzione a scala maggiorante ϕ_n e una funzione a scala minorante ψ_n nel modo seguente: nell' i -esimo intervallino $[x_i, x_{i+1})$, poniamo ϕ_n uguale a $f(x_{i+1})$, e ψ_n uguale a $f(x_i)$.

Si ha

$$\int_a^b \phi_n(x) dx - \int_a^b \psi_n(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] =$$
$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)],$$

e l'ultima quantità può essere resa piccola a piacere a patto di prendere n abbastanza grande. Q.E.D.

Verificare che sono integrabili anche le funzioni continue non sarà altrettanto facile...

Lezione del 28/11/2006 (2 ore): Come le funzioni monotone, anche le funzioni continue sono integrabili secondo Riemann:

TEOREMA (Integrabilità delle funzioni continue): Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile secondo Riemann.

La dimostrazione di questo teorema è molto meno semplice di quella che abbiamo dato per le funzioni monotone: in effetti, abbiamo bisogno di un concetto nuovo, quello di *uniforme continuità*.

DEFINIZIONE: Una funzione f si dice *uniformemente continua* su un intervallo I se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in I$ con $|x - y| < \delta$, si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

In questa definizione chiediamo qualcosa di più della continuità in tutti i punti di I : stiamo infatti pretendendo che δ dipenda da ε , ma non dal punto in cui andiamo a valutare la continuità. Lo stesso δ deve funzionare in tutti i punti dell'intervallo I !

In effetti, se è vero che ogni funzione uniformemente continua in I è anche continua in I , il viceversa può essere falso: per esempio, la funzione $f(x) = x^2$ è continua in tutti i punti della retta reale, ma non è uniformemente continua su \mathbf{R} .

Se però consideriamo soltanto intervalli chiusi e limitati, i due concetti coincidono:

TEOREMA (di Heine-Cantor): Una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è anche uniformemente continua.

DIM.: Ragioniamo per assurdo. Se f non fosse uniformemente continua, dovrebbe esistere $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistano $x, y \in [a, b]$ con $|x - y| < \delta$ e tali che $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$.

Poniamo $\delta = \frac{1}{n}$ (δ può essere scelto arbitrariamente...): per quanto appena visto possiamo trovare due punti $x_n, y_n \in [a, b]$ con $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.

Ora, la successione $\{x_n\} \subset [a, b]$ è limitata, per cui possiamo estrarre una successione $\{x_{n_k}\}$ tale che esiste $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \bar{x}$. Evidentemente, visto che si ha $x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$ avremo anche $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k} = \bar{x}$.

Per la continuità di f in \bar{x} avremo allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(y_{n_k}) = f(\bar{x}),$$

e in particolare

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0.$$

Questo è assurdo perché per costruzione la disuguaglianza $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ deve valere per ogni k . Q.E.D.

DIM. dell'integrabilità di $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua:

Sia $\varepsilon > 0$. Per il teorema di Heine-Cantor, f è uniformemente continua su $[a, b]$, e possiamo trovare $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ quando $x, y \in [a, b]$ e $|x - y| < \delta$.

In particolare, se I è un qualunque sottointervallo chiuso di $[a, b]$ di lunghezza minore di δ , avremo

$$\max\{f(x) : x \in I\} - \min\{f(x) : x \in I\} \leq \varepsilon.$$

Scegliamo ora n abbastanza grande, in modo che $(b-a)/n < \delta$, e suddividiamo $[a, b]$ in n parti uguali tramite i punti $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Definiamo una funzione a scala maggiorante ϕ_n ed una minorante ψ_n nel modo seguente: sull' i -esimo intervallino $[x_i, x_{i+1})$, la funzione ϕ_n vale $M_i = \max\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$, mentre ψ_n vale $m_i = \min\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$. Per quanto visto sopra, sarà $M_i - m_i \leq \varepsilon$.

Abbiamo

$$\int_a^b \phi_n(x) dx - \int_a^b \psi_n(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} (M_i - m_i) \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} = \varepsilon(b-a),$$

e questa quantità può essere resa piccola a piacere. Q.E.D.

Avendo ora una grande abbondanza di funzioni integrabili, passiamo a verificare che l'integrale gode delle stesse proprietà di linearità dell'integrale delle funzioni a scala:

PROPOSIZIONE: Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni integrabili secondo Riemann, $c \in \mathbf{R}$. Allora le funzioni $c \cdot f$ e $f + g$ sono integrabili secondo

Riemann e si ha

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

DIM.: Supponiamo dapprima $c > 0$. L'integrabilità della funzione $c \cdot f$ (e la prima delle due identità nella tesi) segue subito se si osserva che l'insieme delle funzioni a scala maggiori o uguali a $c \cdot f$ coincide con l'insieme delle funzioni a scala maggiori o uguali a f moltiplicate per c . Poiché per le funzioni a scala è lecito "portare la costante c fuori dal segno di integrale" (si veda il lemma enunciato la volta scorsa), ne deduciamo che

$$\overline{\int_a^b c \cdot f(x) dx} = c \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

Un'identità del tutto analoga vale per l'integrale inferiore, da cui la tesi.

Se invece $c < 0$ (il caso $c = 0$ è ovvio!), l'unico cambiamento da fare viene dal fatto che una funzione a scala maggiorante per f moltiplicata per c , darà una funzione a scala minorante per $c \cdot f$.

Veniamo alla somma: osserviamo che

$$\{\Phi : \Phi \text{ a scala, } \Phi \geq f + g\} \supset \{\phi_1 + \phi_2 : \phi_1, \phi_2 \text{ a scala, } \phi_1 \geq f, \phi_2 \geq g\},$$

da cui, ricordando la definizione di integrale superiore:

$$\overline{\int_a^b [f(x) + g(x)] dx} \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} + \overline{\int_a^b g(x) dx}.$$

(A lezione abbiamo visto un esempio che mostra come, se togliamo l'ipotesi che f e g siano integrabili, possa anche succedere che valga la disuguaglianza stretta).

Analogamente, per gli integrali inferiori si ottiene

$$\underline{\int_a^b [f(x) + g(x)] dx} \geq \underline{\int_a^b f(x) dx} + \underline{\int_a^b g(x) dx}.$$

Mettendo assieme le due disuguaglianze e ricordando l'integrabilità di f e g otteniamo

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq \underline{\int_a^b [f(x) + g(x)] dx} \leq \overline{\int_a^b [f(x) + g(x)] dx} \leq$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

da cui la tesi. Q.E.D.

Un'altra proprietà dell'integrale che ci sarà piuttosto utile, è l'additività rispetto all'intervallo di integrazione:

PROPOSIZIONE: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è integrabile, $c \in (a, b)$ si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Lasciamo per esercizio la facile dimostrazione.

Lezione del 30/11/2006 (2 ore): È comodo definire l'integrale anche su intervalli "orientati alla rovescia": se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è integrabile secondo Riemann, poniamo *per definizione*

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Con questa posizione, la proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo vale *in generale*, anche se c non è compreso tra a e b (in tal caso, f dovrà essere integrabile sul più grande tra gli intervalli coinvolti...).

Per il calcolo effettivo degli integrali, lo strumento fondamentale risulta il seguente

TEOREMA (teorema fondamentale del calcolo integrale): Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua, e definiamo la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Allora F è derivabile, e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Evidentemente, se siamo in grado di calcolare la funzione integrale $F(x)$ associata a f , siamo a maggior ragione in grado di calcolare l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ (che sarà uguale semplicemente a $F(b)$).

Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che la funzione integrale $F(x)$ è da ricercarsi tra le funzioni la cui derivata è data da $f(x)$ (che si chiamano *primitive* di f). Si capisce quindi che se siamo in grado di trovare le primitive di una data funzione $f(x)$, saremo anche in condizione di trovare la funzione integrale ad essa associata: vedremo meglio come fare la prossima volta, dopo aver dimostrato il teorema fondamentale.

Per dimostrare il teorema fondamentale ci servirà il seguente risultato:

TEOREMA (Della media integrale): Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua. Esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

DIM.: Sia $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Per la monotonia dell'integrale, avremo $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$, per cui la quantità

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

(che è detta *media integrale*) è compresa tra m e M .

Per il teorema dei valori intermedi, f assume tutti i valori compresi tra m e M , e quindi anche il valore corrispondente alla media integrale! Q.E.D.

DIM. DEL TEOREMA FONDAMENTALE: Consideriamo il rapporto incrementale della funzione F nel punto x . Ricordando l'additività dell'integrale rispetto all'intervallo si ha:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Applicando il Teorema della media all'ultimo integrale troviamo un punto c compreso tra x e $x+h$ tale che

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c).$$

Passando al limite per $h \rightarrow 0$, avremo $c \rightarrow x$ e $f(c) \rightarrow f(x)$ (perché f è continua), da cui

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Si possono leggermente indebolire le ipotesi del teorema fondamentale del calcolo integrale. Se ad esempio $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione integrabile secondo Riemann continua in un certo punto $x_0 \in [a, b]$, allora la funzione integrale $F(x)$ è derivabile nel punto x_0 , e $F'(x_0) = f(x_0)$. Infatti, indichiamo con $M(h)$ e $m(h)$ rispettivamente il sup e l'inf della funzione f nell'intervallo di estremi x_0 e $x_0 + h$. Come visto sopra, si ha

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt,$$

e la media integrale che compare nel membro di destra è compresa tra $m(h)$ e $M(h)$ (vedi dimostrazione del teorema della media integrale...). Grazie alla continuità di f in x_0 si ha che $M(h) \rightarrow f(x_0)$ e $m(h) \rightarrow f(x_0)$ per $h \rightarrow 0$, e la tesi segue dal teorema dei carabinieri.

DEFINIZIONE: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, una *primitiva* di f è una funzione $G : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che la funzione integrale è una primitiva dell'integranda. Ora, spesso è facile "indovinare" una primitiva di una funzione f (e vedremo presto delle tecniche per trovare in modo più sistematico le primitive di moltissime funzioni elementari). Se ci riusciamo, siamo anche in grado di calcolare l'integrale di f :

PROPOSIZIONE: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua, $G : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una qualunque primitiva di f . Allora

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

DIM.: Per il Teorema fondamentale, anche la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ è una primitiva di F . Ne segue che la funzione $F(x) - G(x)$ ha derivata nulla in $[a, b]$, e quindi è costante: esiste $C \in \mathbf{R}$ tale che

$$F(x) = G(x) + C$$

per ogni $x \in [a, b]$. Siccome $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$, ponendo $x = a$ nell'ultima identità troviamo $C = -G(a)$, da cui $F(x) = G(x) - G(a)$. In particolare, per $x = b$ si ha la tesi. Q.E.D.

ESEMPI:

- Se $f(x) = e^x$, riconosciamo subito che una primitiva è data dalla funzione $G(x) = e^x$, e quindi

$$\int_0^a e^x dx = G(a) - G(0) = e^a - 1.$$

Abbiamo così rapidamente riottenuto un risultato che ci eravamo conquistati con una certa fatica a partire dalla definizione di integrale!

- Se $f(x) = mx$, si vede che una primitiva è $G(x) = mx^2/2$, quindi

$$\int_a^b mx dx = m(b^2 - a^2)/2.$$

Possiamo convincerci della veridicità di questa formula se osserviamo che geometricamente l'integrale appena calcolato rappresenta l'area di un trapezio rettangolo di altezza $(b - a)$ e basi ma e mb .

- Se $f(x) = \sin x$, una primitiva sarà $G(x) = -\cos x$. Quindi

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 2,$$

risultato che non sarebbe stato facile prevedere in altro modo!

Cerchiamo ora di studiare una maniera un po' più sistematica per trovare le primitive di una data funzione elementare.⁵

Conviene stabilire una notazione per l'insieme di tutte le primitive di una funzione f :

DEFINIZIONE: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua, l'insieme delle primitive $G : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ (cioè l'insieme delle funzioni derivabili la cui derivata è uguale ad f), si denota con il simbolo $\int f(x) \, dx$:

$$\int f(x) \, dx = \{G : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} : G'(x) = f(x) \, \forall x \in [a, b]\}.$$

L'insieme delle primitive di f si chiama talvolta *integrale indefinito* di f .

Grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale e a quanto osservato la volta scorsa, sappiamo che la funzione integrale è una primitiva di f , e anche che due primitive diverse definite su uno stesso intervallo differiscono per una costante, dunque:

$$\int f(x) \, dx = \left\{ \int_a^x f(t) \, dt + C : C \in \mathbf{R} \right\}.$$

Con lieve abuso di notazione, se G è una qualunque primitiva di f si scrive $\int f(x) \, dx = G(x) + C$, con C *costante arbitraria*.

Se prendiamo una tabella delle derivate delle funzioni elementari, e la leggiamo al contrario, troviamo la seguente tabella di integrali indefiniti "immediati":

⁵La parte che segue è stata vista nelle esercitazioni del corso, con Elisabetta Barozzi: le brevi note che seguono sono per vostra comodità! La formula di integrazione per sostituzione la vedrete domani, sempre con Elisabetta!

$f(x)$	$\int f(x) dx$
x^a (con $a \neq -1$)	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
$1/x$	$\log x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Altre regole di integrazione vengono direttamente dalle regole di derivazione della somma e del prodotto:

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ (additività),
- $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$,
- $\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$ (formula di integrazione per parti).

Dalla formula per la derivata della funzione composta viene un'utile formula di *integrazione per sostituzione*: se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Se “cambiamo variabile” ponendo $y = g(x)$, l'identità appena scritta diventa $\int f(y) dy = \int f(g(x))g'(x) dx$. Questa formula può essere ricordata nel seguente modo, poco ortodosso ma efficace: usando la notazione di Leibniz per la derivata, abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(g(x))}{dx} = g'(x),$$

e moltiplicando ambo i membri per dx (cosa che *ovviamente* non ha alcun senso!) otteniamo l'identità $dy = d(g(x)) = g'(x) dx$, che sostituita nell'integrale $\int f(y) dy$ ci restituisce la formula voluta...

Evidentemente, abbiamo commesso più di un crimine matematico: la derivata NON è un rapporto, e il simbolo dx nell'integrale NON ha un significato matematico ben definito (se non quello di indicare la variabile indipendente rispetto alla quale si integra). D'altra parte, la notazione per la derivata e l'integrale si è rivelata suggestiva: agendo senza farci troppi scrupoli, abbiamo comunque ottenuto un risultato corretto (infatti lo avevamo già giustificato partendo dalla formula di derivazione di funzioni composte!).

ESEMPI:

1. Si voglia calcolare $\int \cos^2 x \, dx$. Per una nota identità trigonometrica, abbiamo $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ da cui

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int \cos 2x \, d(2x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

2. Calcoliamo poi $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$. Poniamo $x = \sin y$, da cui (OK, non è ortodosso ma abbiamo verificato che funziona): $dx = \cos y \, dy$ e

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y \, dy = \int \cos^2 y \, dy = \frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4} + C.$$

Ora, $y = \arcsin x$ e $\cos y = \sqrt{1-x^2}$, da cui $\sin 2y = 2x\sqrt{1-x^2}$ e l'integrale cercato vale $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$.

L'integrale definito di questa funzione tra -1 e 1 vale allora $\pi/2\dots$ e questo ha un semplice significato geometrico: quale? Questa è un'ulteriore conferma del fatto che l'integrale di Riemann è l'oggetto giusto per definire l'area di oggetti curvilinei del piano dal contorno abbastanza regolare!

3. Calcoliamo $\int \log x \, dx$. Integrando per parti si ha: $\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx = \int (x)' \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \log x - x + C$.

4. Calcoliamo $\int e^x \sin x \, dx$. Integrando due volte per parti si ottiene: $\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$. Portando l'ultimo integrale a primo membro si ottiene subito

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C.$$

5. Calcoliamo

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Poniamo $y = 1 - x^2$, da cui: $dy = -2x \, dx$ e l'integrale diventa

$$-\frac{1}{2} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\sqrt{y} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Oppure, con un uso disinvolto della formula di integrazione per sostituzione:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

6. Si voglia calcolare $\int \sin \sqrt{x} \, dx$. Si ottiene subito il risultato ponendo $\sqrt{x} = y$, e integrando per parti.
7. Per calcolare l'integrale $\int \sqrt{1+x^2} \, dx$, si operi la sostituzione $\sqrt{1+x^2} = y - x \dots$

Avendo imparato delle efficaci tecniche di integrazione, vogliamo ora cominciare un discorsetto introduttivo sulle *equazioni differenziali ordinarie*.

Dovremmo essere già sufficientemente motivati allo studio di questo argomento: nel corso di fisica abbiamo visto numerosi esempi di equazioni del secondo ordine che “nascono” dall'applicazione del II principio della dinamica.

Cominciamo col ricordare qualche definizione: un'equazione differenziale è un'equazione *funzionale* (cioè un'equazione in cui l'incognita è una funzione) della forma

$$f(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \dots, x'(t), x(t), t) = 0,$$

dove $x(t)$ è la funzione incognita da cercare, e f è una funzione nota di $(n+2)$ variabili. L'equazione scritta sopra è *di ordine n* , perché la derivata di ordine massimo che vi compare ha appunto ordine n . In particolare, la più generale equazione differenziale ordinaria del primo ordine sarà del tipo

$$f(x'(t), x(t), t) = 0.$$

Almeno in questa prima fase, ci occuperemo soltanto di equazioni del primo ordine: vedremo infatti che uno studio accorto sulle equazioni e sistemi del primo ordine, ci darà poi un sacco di informazioni utili anche sulle equazioni di ordine superiore.

Notiamo che, in certi casi, un'equazione differenziale del primo ordine si può scrivere esplicitando $x'(t)$ in funzione di $x(t)$ e t :

$$x'(t) = g(x(t), t).$$

In tal caso si dice che l'equazione è scritta *in forma normale*, e sarà di questo tipo di equazioni che ci occuperemo nel seguito.

Se imponiamo il valore della soluzione $x(t)$ in un punto iniziale t_0 , otteniamo quello che si chiama *problema di Cauchy*: per una generale equazione del primo ordine in forma normale esso assume la forma

$$\begin{cases} x'(t) = g(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Ci sarebbe estremamente utile avere un *teorema di esistenza e unicità* che ci dicesse che il problema ha soluzione, e che questa soluzione è unica.

Nel caso in cui l'equazione differenziale rappresenti il modello di una situazione reale, è evidente l'importanza fisica e filosofica di un risultato di esistenza e unicità di questo tipo: se il modello è corretto, il sistema dovrà evolvere in qualche modo (e quindi ci devono essere soluzioni del problema di Cauchy), mentre l'unicità delle soluzioni corrisponde al requisito di *ripetibilità di un esperimento* (il sistema deve reagire nello stesso modo se sono identiche le condizioni iniziali: *determinismo*).

Lezione del 5/12/2006 (2 ore): Per cercare di capire che genere di risultato di esistenza e unicità possiamo aspettarci, vediamo un paio di esempi!

ESEMPIO: Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Scrivendo l'equazione nella forma $x'(t)/x^2(t) = 1$ e integrando, si trova che l'unica soluzione è $x(t) = 1/(1-t)$. Siccome una soluzione ci aspettiamo che sia continua e derivabile in un intervallo che contiene il punto iniziale, se ne deduce che la soluzione del problema *non è definita su tutta la retta reale, ma solo sulla semiretta* $(-\infty, 1)$.

Dunque, anche se il secondo membro dell'equazione è estremamente regolare, possiamo sperare solo in un teorema di esistenza e unicità *locale*, che ci assicuri l'esistenza di una soluzione in un opportuno *intorno dell'istante iniziale* t_0 .

ESEMPIO: Si noti che, affinché la nostra equazione differenziale abbia senso, sembra ragionevole assumere che la funzione $g(x, t)$ sia continua (anche se dovremo precisare cosa significa che una funzione di due variabili è continua).

La sola continuità non è però sufficiente a garantire l'unicità della soluzione del problema di Cauchy: ad esempio il problema

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni. Infatti, si vede subito che $x(t) = 0$ è una soluzione. Inoltre, applicando lo stesso trucco usato sopra scopriamo che la funzione $x(t) = t^2/4$ è una soluzione del problema per $t > 0$... e indoviniamo così che tutte le funzioni del tipo

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_0)^2}{4} & \text{se } t \geq t_0 \\ 0 & \text{se } t < t_0 \end{cases}$$

sono soluzioni del problema di Cauchy ($t_0 > 0$ è una costante).

A questo punto, sappiamo che il nostro teorema di esistenza e unicità potrà darci soltanto un *risultato di esistenza locale*, e che per avere l'unicità dovremo chiedere più che la continuità della funzione g ...

In compenso, il trucchetto che abbiamo usato prima per risolvere i semplici problemi che abbiamo preso in considerazione, si generalizza a tutta una classe di equazioni differenziali dette *a variabili separabili*: supponiamo che $A(t)$ e $B(x)$ siano due funzioni continue, definite rispettivamente in un intorno di t_0 e di x_0 . Supponiamo anche che $B(x_0) \neq 0$. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{A(t)}{B(x(t))} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Supponiamo ora che $x(t)$ sia una soluzione del problema: moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per $B(x(t))$ e integriamo tra t_0 e t . Se denotiamo con $F(t)$ e $G(x)$ delle primitive di $A(t)$ e $B(x)$ rispettivamente, si ottiene $G(x(t)) = F(t) - F(t_0) + G(x_0)$.

Questa è un'equazione che ci fornisce la soluzione $x(t)$ *in forma implicita*: se per caso sapessimo che la funzione G è invertibile in un intorno di x_0 (e tra un attimo mostreremo che questo è proprio vero!), potremmo ottenere esplicitamente la soluzione come $x(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(x_0))$.

Vediamo di mostrare che G è invertibile in un intorno di x_0 . Ora, $G'(x) = B(x)$ è una funzione continua, e per ipotesi $G'(x_0) = B(x_0) \neq 0$. Per il teorema della permanenza del segno, $G'(x)$ deve avere segno costante in un intorno di x_0 , per cui G è strettamente monotona ed invertibile in tale intorno. La funzione inversa G^{-1} sarà definita di conseguenza in un intorno di $G(x_0)$, e possiamo scrivere $x(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(x_0))$.

Si noti che vale anche il viceversa: la funzione $x(t)$ appena trovata è una soluzione del problema di Cauchy (basta ripercorrere a ritroso i passaggi che abbiamo fatto!): in questo caso abbiamo trovato esplicitamente la soluzione del problema, ed abbiamo anche dimostrato che essa è unica.

Un'altra classe di equazioni del primo ordine che si possono risolvere esplicitamente è costituita dalle *equazioni lineari del primo ordine*: esse sono della forma

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t),$$

dove a e b sono date funzioni continue definite su un certo intervallo (a, b) .

Se imponiamo anche la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ (con $t_0 \in (a, b)$), mostreremo ora che esiste un'unica soluzione, definita su tutto l'intervallo (a, b) : in questo caso particolarmente fortunato abbiamo *esistenza e unicità globale*, e possiamo anche scrivere esplicitamente la soluzione.

Il trucco consiste nel moltiplicare ambo i membri dell'equazione per il *fattore integrante*

$$F(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$

Facendo questo, a primo membro avremo la derivata del prodotto $x(t)F(t)$, e integrando ambo i membri tra t_0 e t troviamo la soluzione esplicita del problema di Cauchy:

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} b(t) dt \right).$$

La prossima volta vedremo finalmente il teorema di esistenza e unicità locale!

Lezione del 11/12/2006 (2 ore): Dagli esempi visti la volta scorsa, abbiamo capito che quel che vogliamo è teorema di *esistenza e unicità locale* per le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

In sostanza, vogliamo un risultato che ci dica che se la funzione f è *sufficientemente buona*, allora il problema ammette un'unica soluzione, e questa soluzione è definita *in un opportuno intorno* dell'istante iniziale t_0 .

Un tipico risultato di questo tipo è il seguente:

TEOREMA (Di esistenza e unicità locale o di Cauchy-Lipschitz): Sia $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione di due variabili continua, per cui esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(t, w) - f(t, z)| \leq L|w - z| \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall w, z \in [c, d]$$

(si dice in tal caso che f è *lipschitziana nella seconda variabile*, con una costante che non dipende dalla prima).

Siano poi $t_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$. Allora esiste $\delta > 0$ ed una funzione derivabile $y(t) : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbf{R}$ che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Questa soluzione è *unica*, nel senso che ogni altra soluzione del problema coincide con $y(t)$ nell'intervallo in cui sono definite entrambe.

Di questo teorema, dimostreremo solo la parte relativa all'unicità: per dimostrare l'esistenza c'è bisogno di alcuni risultati (non difficili) sugli spazi funzionali che esulano dallo scopo di questo corso. Prima di passare alla dimostrazione dell'unicità, facciamo comunque qualche osservazione sulle ipotesi del teorema e sul loro significato.

OSSERVAZIONI:

- Per capire l'enunciato, ci occorre la definizione di funzione continua in due variabili. In realtà, essa non cambia molto rispetto all'analoga definizione in una variabile: se $(x_0, y_0) \in A \subset \mathbf{R}^2$ e $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, diremo che f è continua in (x_0, y_0) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

ogni volta che la distanza tra i punti $(x, y) \in A$ e (x_0, y_0) è minore di δ .

Esattamente come in una variabile, si verifica facilmente che somma, prodotto, rapporto di funzioni continue è una funzione continua (se non si annulla il denominatore), che composizione di funzioni continue è continua, che i polinomi e le altre funzioni elementari sono continue. Inoltre, vale il teorema di Weierstrass: una funzione continua su un rettangolo chiuso e limitato ammette massimo.

Torneremo comunque sul concetto di continuità in due variabili nel seguito del corso: ci accorgeremo che i limiti in più variabili possono essere decisamente difficili da calcolare...

- La condizione di lipschitzianità di f serve a garantire l'unicità della soluzione (per l'esistenza basterebbe la continuità): abbiamo visto che se f è soltanto continua, il problema di Cauchy può avere più di una soluzione.

Fortunatamente, la lipschitzianità è implicata da condizioni più maneggevoli da verificare: per esempio, è sufficiente che esista la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$, e che essa sia una funzione continua in tutto il rettangolo $[a, b] \times [c, d]$. Infatti, in tali condizioni il teorema di Weierstrass ci assicura che la funzione continua $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|$ ammette massimo L sul rettangolo. Siano ora $t \in [a, b]$, $w, z \in [c, d]$. Usando il teorema di Lagrange (in una variabile) otteniamo:

$$|f(t, w) - f(t, z)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, c) \right| |w - z| \leq L|w - z|,$$

dove c è un opportuno punto compreso tra w e z .

- Abbiamo visto che in generale non ci possiamo aspettare che la soluzione sia definita su tutto l'intervallo $[a, b]$: con le ipotesi generali che abbiamo scelto possiamo pretendere soltanto *esistenza locale*. Per avere *esistenza globale* ci sarà bisogno di avere qualche informazione supplementare sulla funzione f : per esempio, abbiamo visto che nel caso delle equazioni lineari si ha sempre esistenza globale (e si riesce anche a scrivere esplicitamente la soluzione!).

Come promesso, dimostriamo la parte “unicità” del teorema di esistenza e unicità locale. Ci serve il seguente

LEMMA: Sia $y(t) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Supponiamo che $y(a) = 0$ (oppure che $y(t_0) = 0$ per almeno un $t_0 \in [a, b]$), e che esista una costante $L > 0$ tale che

$$|y'(t)| \leq L|y(t)|$$

per ogni $t \in [a, b]$. Allora $y(t) = 0$ per ogni $t \in [a, b]$.

DIM.: Sia $\delta > 0$, e denotiamo con M il massimo della funzione $|y(t)|$ sull'intervallo $[a, a + \delta]$. Se $t \in [a, a + \delta]$, grazie al teorema di Lagrange otteniamo

$$|y(t)| = |y(t) - y(a)| = |y'(c)| |t - a| \leq L|y(c)|\delta \leq LM\delta,$$

dove c è un punto opportuno tra a e t . Prendendo il massimo del membro di sinistra della nostra disuguaglianza otteniamo $M(1 - L\delta) \leq 0$: se scegliamo $\delta < 1/L$, quest'ultima stima implica che $M = 0$, cioè $y(t)$ si annulla identicamente tra a e $a + \delta$. Ripetendo questo stesso ragionamento, troveremo che $y(t)$ si annulla anche tra $a + \delta$ e $a + 2\delta \dots$ e in un numero finito di passi otterremo la tesi. Con minime modifiche, la stessa dimostrazione vale anche se l'ipotesi $y(a) = 0$ è sostituita da $y(t_0) = 0$, per qualche $t_0 \in [a, b]$. Q.E.D.

DIMOSTRAZIONE DELL'UNICITÀ: Siano $y_1(t), y_2(t) : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbf{R}$ due soluzioni del problema di Cauchy, e poniamo $z(t) = y_1(t) - y_2(t)$. Evidentemente, $z(t_0) = 0$. Inoltre:

$$|z'(t)| = |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \leq L|y_1(t) - y_2(t)| = L|z(t)|.$$

Applicando il Lemma, otteniamo che $z(t)$ si annulla identicamente nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, e il teorema è dimostrato. Q.E.D.

Lezione del 12/12/2006 (2 ore): Il risultato di esistenza e unicità locale ha un'importante interpretazione geometrica: se $f(t, y)$ è una funzione di due variabili continua e lipschitziana in \mathbf{R}^2 , allora per ogni punto del piano ty passa una ed una sola soluzione dell'equazione differenziale $y'(t) = f(t, y(t))$.

Quest'osservazione apparentemente banale, consente spesso di effettuare uno studio qualitativo delle soluzioni di un'equazione differenziale ordinaria: in altre parole, è spesso possibile *disegnare con buona approssimazione l'andamento delle soluzioni senza dover risolvere esplicitamente l'equazione*.

Vedremo un esempio di questo al termine del corso se avanzerà un po' di tempo...

Passiamo ora a considerare brevemente che aspetto assume il problema di Cauchy per un *sistema di equazioni ordinarie del primo ordine*: per un sistema di n equazioni in n incognite $y_1(t), \dots, y_n(t)$ si avrà una scrittura del tipo

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \vdots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ y_1(t_0) = y_1^0 \\ \vdots \\ y_n(t_0) = y_n^0 \end{cases}$$

dove f_1, \dots, f_n sono n funzioni note di $n+1$ variabili, definite in un opportuno intorno rettangolare Q del dato iniziale $(t_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$.

Come spesso avviene in matematica, quando si studiano i sistemi di equazioni differenziali l'uso di una buona notazione produce dei benefici quasi miracolosi: l'idea è di considerare le nostre n funzioni incognite come *un'unica funzione incognita a valori vettoriali*...

Riscriviamo le n incognite del nostro sistema di equazioni differenziali (vedi lezione precedente) come un'unica funzione incognita vettoriale

$$y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$$

(dunque, $y : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, dove I è un intorno di t_0).

Analogamente, possiamo raggruppare le n funzioni f_1, \dots, f_n in un'unica funzione vettoriale $f = (f_1, \dots, f_n) : Q \rightarrow \mathbf{R}^n$, e altrettanto possiamo fare con i dati iniziali definendo $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$. Utilizzando questa notazione stenografica, il problema di Cauchy diventa

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y^0 \end{cases}$$

ossia formalmente identico a quello per un'unica equazione: l'unica differenza è che ora le quantità coinvolte vanno interpretate come vettori!

Questa fortissima somiglianza suggerisce che il Teorema di esistenza e unicità locale valga anche per i sistemi. Ecco infatti l'enunciato:

Se la funzione vettoriale f è continua in tutti i punti $(t, y) \in Q \subset \mathbf{R}^n$ e lipschitziana nella variabile $y \in \mathbf{R}^n$ (con costante indipendente da t), allora esiste un'unica soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy per il sistema, definita in un intorno di t_0 .

Ovviamente, dobbiamo precisare cosa s'intende per continuità e lipschitzianità di funzioni vettoriali. Per la continuità non c'è problema: una funzione vettoriale è continua se sono continue le sue componenti. Per quanto riguarda la lipschitzianità, chiediamo che valga una disuguaglianza del tipo

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|,$$

formalmente identica a quella che avevamo nel caso scalare: l'unica differenza è che i moduli vanno interpretati come moduli di un vettore. Ricordiamo che se $y = (y_1, \dots, y_n)$, allora $|y| = (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}$.

OSSERVAZIONE: Naturalmente non dimostreremo il teorema di esistenza locale per i sistemi, come non abbiamo dimostrato quello per le equazioni. I più volenterosi possono invece adattare la dimostrazione del teorema di unicità al caso dei sistemi: essa funziona in maniera quasi del tutto identica.

C'è un'unica ma importante differenza nella dimostrazione del Lemma: il teorema di Lagrange è infatti *falso* per le funzioni vettoriali. È vera però una sua versione un po' più debole, che è esattamente quel che ci serve nella dimostrazione del lemma (per il resto identica a quella che abbiamo visto nella scorsa lezione):

Sia $y(t) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ una funzione vettoriale derivabile sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora

$$|y(b) - y(a)| \leq L \cdot (b - a),$$

dove L è il massimo di $|y'(t)|$ sull'intervallo $[a, b]$.⁶

La necessità di estendere il teorema di esistenza e unicità locale al caso dei sistemi non sorge da un peregrino desiderio di generalità, ma da un'effettiva necessità applicativa.

⁶Dimostrazione:

$$|y(b) - y(a)| = \left| \int_a^b y'(t) dt \right| \leq \int_a^b |y'(t)| dt \leq L(b - a).$$

Prima di tutto, molti dei problemi della fisica sono intrinsecamente vettoriali: per determinare la traiettoria di un punto materiale, devo trovare le 3 componenti del vettore posizione in funzione del tempo.

Inoltre, le equazioni di ordine superiore al primo si possono scrivere in maniera equivalente come sistemi di equazioni del primo ordine: si capisce subito l'importanza di questo se si pensa che, in fisica, le equazioni che provengono da problemi di dinamica sono del secondo ordine!

Consideriamo infatti il problema di Cauchy per una generica equazione del secondo ordine:

$$(P) \begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Introducendo l'incognita ausiliaria $v(t)$, il problema si può tradurre nel seguente (per un sistema di 2 equazioni del primo ordine):

$$(P') \begin{cases} y'(t) = v(t) \\ v'(t) = f(t, y(t), v(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

I due problemi di Cauchy sono del tutto equivalenti: saper risolvere il secondo equivale a saper risolvere il primo, e viceversa.

D'altra parte, il teorema di esistenza e unicità locale per i sistemi del primo ordine ci dice che se f è continua, ed è anche lipschitziana nelle ultime due variabili, allora il problema (P) ammette una soluzione definita in un intorno di t_0 , e che tale soluzione è unica.

Siamo ora in grado di cominciare lo studio di una classe importante di equazioni differenziali del II ordine: le equazioni lineari.

La generica equazione differenziale lineare del II ordine ha la seguente forma:

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t),$$

dove a, b, f sono funzioni continue note, definite su un intervallo I .

Evidentemente, a questo tipo di equazione si può applicare il discorso fatto sopra, e si scopre che per il problema di Cauchy associato vale il teorema di esistenza e unicità locale. Anzi, è possibile dimostrare che per le equazioni lineari si ha *esistenza globale*: se fissiamo le condizioni iniziali $y(t_0), y'(t_0)$, esiste un'unica soluzione dell'equazione, ed essa è definita su *tutto* l'intervallo I .

Un'equazione lineare si dice poi *omogenea* se $f(t) = 0$. Le soluzioni di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine hanno una struttura particolarmente semplice:

TEOREMA: Siano $a, b : I \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni continue. Allora l'insieme \mathcal{V} delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$(L) \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

formano uno spazio vettoriale su \mathbf{R} di dimensione 2. In altre parole:

- (i) Se $y_1(t), y_2(t) : I \rightarrow \mathbf{R}$ sono due soluzioni e $c \in \mathbf{R}$, allora anche $y_1(t) + y_2(t)$ e $cy_1(t)$ sono soluzioni (questo è il "principio di sovrapposizione" dei fisici).
- (ii) Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono due soluzioni che non siano multiple l'una dell'altra, esse formano una base di \mathcal{V} . In particolare, ogni altra soluzione dell'equazione sarà della forma

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t),$$

con C_1 e C_2 costanti reali.

DIM.: Il punto (i) si verifica immediatamente sostituendo nell'equazione: è vero perché l'equazione (L) è lineare, e la derivata pure (la derivata della somma è la somma delle derivate...).

Il punto (ii) si ottiene invece come conseguenza del teorema di esistenza e unicità. Sia infatti $t_0 \in I$ e si considerino i seguenti problemi di Cauchy:

$$(P_1) \begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = 1 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 1 \end{cases}$$

Denotiamo $\tilde{y}_1(t)$ l'unica soluzione di (P_1) , $\tilde{y}_2(t)$ l'unica soluzione di (P_2) . Evidentemente, \tilde{y}_1 e \tilde{y}_2 non possono essere multiple l'una dell'altra, perché le condizioni iniziali non lo sono: quindi lo spazio delle soluzioni \mathcal{V} ha almeno dimensione 2.

D'altra parte, affermo che \tilde{y}_1 e \tilde{y}_2 formano una base di \mathcal{V} . Sia infatti $y(t)$ una qualunque altra soluzione di (L), e definiamo $C_1 = y(t_0)$, $C_2 = y'(t_0)$. Evidentemente, $y(t)$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = C_1 \\ y'(t_0) = C_2 \end{cases}$$

D'altra parte, per come sono state definite \tilde{y}_1 e \tilde{y}_2 , si verifica subito che *anche la funzione $C_1\tilde{y}_1(t) + C_2\tilde{y}_2(t)$ è una soluzione dello stesso problema di Cauchy.* Per il teorema di unicità si deve dunque avere

$$y(t) = C_1\tilde{y}_1(t) + C_2\tilde{y}_2(t) \quad \forall t \in I,$$

e siamo riusciti a scrivere $y(t)$ come combinazione lineare degli elementi della base. Q.E.D.

Tra non molto, vedremo che anche l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare non omogenea ha una struttura piuttosto semplice.

Dal punto di vista pratico, il teorema ci dice che per risolvere l'equazione (L) basta saper trovare *due* soluzioni indipendenti della stessa. Non sempre questo è fattibile: è invece molto semplice quando l'equazione è a *coefficienti costanti*, cioè quando a, b sono numeri reali (indipendenti da t).

Vediamo di capire come si può fare: consideriamo un'equazione del tipo

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0,$$

con $a, b \in \mathbf{R}$.

La volta scorsa abbiamo visto che l'insieme delle soluzioni di una *qualunque* equazione lineare omogenea del secondo ordine (anche non a coefficienti costanti) è uno spazio vettoriale di dimensione due: in sostanza, ci basta *indovinare* due soluzioni dell'equazione che non siano multiple l'una dell'altra, e tutte le altre si otterranno come combinazione lineare di queste.

Il problema è trovare queste due soluzioni!

Se proviamo a risolvere un'equazione lineare ed omogenea *del primo ordine* a coefficienti costanti, vediamo che le soluzioni sono multiple di un esponenziale del tipo $y(t) = e^{kt}$. Questo suggerisce di cercare una soluzione dello stesso tipo anche per l'equazione del secondo ordine

$$(A) \quad y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0.$$

Sostituendo si trova che *l'esponenziale $y(t) = e^{kt}$ è soluzione dell'equazione se e solo se k soddisfa l'equazione di secondo grado*

$$(B) \quad k^2 + ak + b = 0,$$

detta equazione caratteristica.

Evidentemente, si possono presentare 3 casi:

1. L'equazione caratteristica (B) ha due radici reali e distinte k_1 e k_2 . In queste condizioni, $e^{k_1 t}$ ed $e^{k_2 t}$ sono due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale (A), per cui il teorema ci assicura che tutte le soluzioni possono essere scritte come

$$y(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

2. L'equazione caratteristica (B) ha due radici reali e coincidenti \bar{k} . In tali condizioni, $y_1(t) = e^{\bar{k}t}$ è una soluzione, ma ce ne serve un'altra! Si osservi che il fatto che \bar{k} sia una radice doppia implica che $a = -2\bar{k}$ e $b = \bar{k}^2$, per cui l'equazione (B) si scrive $y'' - 2\bar{k}y' + \bar{k}^2 y = 0$. Con una sostituzione diretta, si verifica che $y_2(t) = t e^{\bar{k}t}$ è un'altra soluzione (indipendente dalla prima), per cui la soluzione generale dell'equazione differenziale data sarà

$$y(t) = C_1 e^{\bar{k}t} + C_2 t e^{\bar{k}t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

3. L'equazione caratteristica ha due radici complesse e coniugate $\alpha \pm i\beta$. In questo caso, abbiamo due soluzioni formali $\tilde{y}_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}$ e $\tilde{y}_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}$, e non sappiamo bene cosa farcene... Non è il caso di spaventarsi: lo vedremo la prossima volta!

Lezione del 15/12/2006 (2 ore): Nella risoluzione delle equazioni differenziali lineari omogenee del II ordine a coefficienti costanti, ci mancava da analizzare il caso in cui l'equazione caratteristica abbia due radici complesse e coniugate: come possiamo dare un senso alle soluzioni formali $\tilde{y}_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}$ e $\tilde{y}_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}$?

Per fortuna, è possibile dare un senso agli esponenziali complessi, e trasformare queste "inutili" soluzioni formali nella soluzione generale reale dell'equazione: scopriremo che tutte le soluzioni dell'equazione data sono del tipo

$$(*) \quad y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Definiamo l'esponenziale complesso: se $z \in \mathbf{C}$, poniamo

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Con ragionamenti non difficili che siamo costretti ad omettere per motivi di tempo, non è difficile verificare che la serie esponenziale converge per ogni $z \in \mathbf{C}$ (Come è ragionevole, diremo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + iy_n) = \bar{x} + i\bar{y}$ se $x_n \rightarrow \bar{x}$

e $y_n \rightarrow \bar{y}$ come successioni reali. A questo punto, diremo che una serie a valori complessi converge se esiste il limite delle sue somme parziali...). Si può anche far vedere che $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, per cui il nome “esponenziale complesso” è legittimo.

Cosa succede se calcoliamo l’esponenziale complesso di un numero immaginario puro? Usando la definizione e ricordando le serie di Taylor di seno e coseno, non è affatto difficile verificare che vale la *formula di Eulero*

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta.$$

In conclusione, avremo dunque

$$e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha(\cos \beta + i \sin \beta).$$

[*In alternativa, si potrebbe prendere questa formula come definizione, per la verità un po’ misteriosa, di esponenziale complesso. Si verifichi per esercizio che vale la proprietà dell’esponenziale richiamata sopra, cioè che si ha*

$$e^{(\alpha_1+i\beta_1)+(\alpha_2+i\beta_2)} = e^{\alpha_1+i\beta_1} \cdot e^{\alpha_2+i\beta_2}.]$$

A questo punto, non è più così sorprendente che le soluzioni complesse dell’equazione differenziale conducano alle soluzioni reali (*) scritte sopra: verifichiamo questo fatto in dettaglio.

Dunque, abbiamo visto che possiamo scrivere $e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t \pm i \sin \beta t)$. In che senso possiamo dire che queste sono soluzioni dell’equazione differenziale?

Se prendiamo la funzione $e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i \sin(\beta t)$ e la deriviamo (considerando formalmente i come una costante), troviamo

$$(e^{i\beta t})' = i\beta e^{i\beta t},$$

cioè la regola di derivazione per l’esponenziale immaginario coincide formalmente con quella per l’esponenziale reale. Più in generale (derivata del prodotto...), $(e^{(\alpha+i\beta)t})' = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)t}$.

Dunque, le due funzioni $\tilde{y}_1(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$ e $\tilde{y}_2(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t))$ scritte sopra, sono soluzioni dell’equazione differenziale (A). Siccome vogliamo soluzioni *reali*, ci conviene prendere

$$y_1(t) = \frac{\tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t)}{2} = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad y_2(t) = \frac{\tilde{y}_1(t) - \tilde{y}_2(t)}{2i} = e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

La soluzione generale dell’equazione nel caso delle radici complesse coniugate sarà dunque

$$y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)).$$

Passiamo ora a considerare un'equazione lineare *completa*

$$(B) \quad y'' + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t),$$

dove $a(t)$, $b(t)$ e $f(t)$ sono funzioni continue definite su un certo intervallo I . Come è fatto l'insieme delle soluzioni?

Grazie alla linearità dell'equazione, è immediato verificare che la *differenza di due soluzioni* è una soluzione dell'equazione omogenea (ottenuta prendendo $f(t) = 0$ nell'equazione (B)).

In altre parole, se siamo capaci di trovare una soluzione $y_0(t)$ dell'equazione completa (B), tutte le altre si ottengono sommando a $y_0(t)$ le soluzioni dell'equazione omogenea... Il professore di Geometria concluderebbe che l'insieme delle soluzioni dell'equazione (B) forma uno spazio affine su \mathbf{R} di dimensione 2.

Visto che le soluzioni dell'equazione omogenea siamo capaci di trovarle, almeno nel caso delle equazioni a coefficienti costanti, si capisce come sia importante trovare un metodo generale per trovare una *soluzione particolare* dell'equazione (B). Vedremo come fare la prossima volta!

Lezione del 19/12/2006 (2 ore): Vediamo come trovare una soluzione particolare di un'equazione lineare non omogenea. Un metodo che *funziona sempre*, anche se spesso conduce a calcoli piuttosto complicati e antipatici, è il seguente:

TEOREMA (Metodo della variazione delle costanti): Data l'equazione (B), supponiamo di conoscere la soluzione generale $y(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$ dell'equazione OMOGENEA associata. Allora si possono trovare due funzioni derivabili $A(t)$, $B(t)$ soluzioni del sistema

$$(C) \quad \begin{cases} A'(t)y_1(t) + B'(t)y_2(t) = 0, \\ A'(t)y_1'(t) + B'(t)y_2'(t) = f(t). \end{cases}$$

Inoltre, le funzioni $A(t)$, $B(t)$ così trovate hanno la proprietà che

$$(D) \quad y_0(t) = A(t)y_1(t) + B(t)y_2(t)$$

è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (B).

DIM.: Si arriva facilmente al sistema (C) cercando una soluzione dell'equazione completa del tipo (D): $y_0(t) = A(t)y_1(t) + B(t)y_2(t)$. Sostituiamo quest'espressione nell'equazione, imponendo arbitrariamente la condizione aggiuntiva $A'(t)y_1(t) + B'(t)y_2(t) = 0$ (che è la prima equazione del sistema (C)). Si

trova che l'equazione è soddisfatta se e solo se si ha $A'(t)y_1'(t) + B'(t)y_2'(t) = f(t)$, che è poi la seconda equazione del sistema.

Dunque, se riusciamo a trovare due funzioni continue $A'(t)$ e $B'(t)$ che soddisfano il nostro sistema, possiamo poi sceglierne due primitive $A(t)$ e $B(t)$ (la loro esistenza è assicurata dal teorema fondamentale del calcolo integrale), ed abbiamo la soluzione desiderata.

Ci rimane da mostrare che il sistema (C) ammette *sempre* una ed una sola coppia $A'(t)$, $B'(t)$ di funzioni soluzione, e che queste sono continue sull'intervallo I dove sono definite le funzioni $a(t)$, $b(t)$ e $f(t)$ che compaiono nell'equazione differenziale.

Dal corso di geometria sappiamo che il sistema (C) ammette una ed una sola soluzione se sappiamo che la matrice

$$W(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$$

(nota come *matrice wronskiana*) è invertibile per ogni valore del parametro t (cioè se ha sempre determinante non nullo): infatti, il sistema (C) si scrive

$$W(t) \begin{pmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

D'altra parte, una matrice 2×2 è invertibile se e soltanto se le sue colonne *non* sono multiple l'una dell'altra.

Se per assurdo esistessero t_0 e $c \in \mathbf{R}$ tali che $y_1(t_0) = cy_2(t_0)$ e $y_1'(t_0) = cy_2'(t_0)$, il teorema di unicità per il problema di Cauchy ci permetterebbe di concludere che $y_1(t) = cy_2(t)$ per ogni $t \in I$.

Infatti, sia $y_1(t)$ che $cy_2(t)$ sarebbero soluzione di uno stesso problema di Cauchy, vale a dire

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = y_1(t_0) \\ y'(t_0) = y_1'(t_0) \end{cases}$$

e quindi dovrebbero coincidere. Questo è assurdo perchè per ipotesi y_1 e y_2 generano lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea, e devono quindi essere indipendenti.

Rimane da verificare che $A'(t)$ e $B'(t)$ sono continue in I . Abbiamo evidentemente

$$\begin{pmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix} = W^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

e l'inversa della matrice wronskiana si scrive esplicitamente come segue:

$$W^{-1}(t) = \frac{1}{\det W(t)} \begin{pmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{pmatrix}.$$

Gli elementi della matrice $W^{-1}(t)$ sono evidentemente funzioni continue, in quanto $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono funzioni derivabili due volte, e abbiamo verificato sopra che il determinante di $W(t)$ è una funzione (evidentemente continua) che non si annulla mai (perché la matrice ha sempre rango due). Q.E.D

Come esempio di applicazione del metodo della variazione delle costanti arbitrarie, abbiamo considerato l'equazione

$$y'' - y = \frac{1}{1 + e^{2t}},$$

e abbiamo scoperto che una soluzione particolare è data da

$$y_0(t) = -\frac{1}{2} + \frac{e^t}{2} \arctan e^{-t} - \frac{e^{-t}}{2} \arctan e^t,$$

per cui la soluzione generale sarà

$$y(t) = Ae^t + Be^{-t} - \frac{1}{2} + \frac{e^t}{2} \arctan e^{-t} - \frac{e^{-t}}{2} \arctan e^t.$$

Fortunatamente per noi, in alcuni casi si può trovare una soluzione particolare di un'equazione lineare a coefficienti costanti *senza bisogno di usare il metodo della variazione delle costanti*: questo succede quando il termine noto $f(t)$ è il prodotto di un polinomio per un esponenziale (eventualmente complesso), cioè se

$$f(t) = e^{\alpha t} P(t) \quad \text{con } P(t) \text{ polinomio di grado } n,$$

(oppure

$$f(t) = e^{\alpha t} (a \cos \beta t + b \sin \beta t) P(t) \quad \text{con } P(t) \text{ come sopra.})$$

In questo caso è noto a priori che esiste una soluzione particolare di forma speciale e "simile al secondo membro dell'equazione": vedremo la prossima volta come trovarla!

Lezione del 22/12/2006 (2 ore): Vogliamo trovare una soluzione particolare di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti con termine noto del tipo

$$f(t) = e^{\alpha t} P(t) \quad \text{con } P(t) \text{ polinomio di grado } n,$$

(oppure

$$f(t) = e^{\alpha t} (a \cos \beta t + b \sin \beta t) P(t) \quad \text{con } P(t) \text{ come sopra.})$$

In questi casi *sappiamo a priori che esiste una soluzione particolare di forma "simile" a $f(t)$* , e precisamente:

1. Se α ($\alpha + i\beta$ nel secondo caso) non è una soluzione dell'equazione caratteristica, allora si cerca una soluzione del tipo $Q(t)e^{\alpha t}$ (nel secondo caso, $Q(t)e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$, dove Q è un polinomio di grado n).
2. Se α (oppure $\alpha + i\beta$) è una radice dell'equazione caratteristica, le "candidate soluzioni" scritte sopra vanno moltiplicate per t o per t^2 , a seconda che si tratti di una radice semplice o di una radice doppia.

ESEMPIO: Se si considera l'equazione dell'*oscillatore armonico forzato*

$$y'' + k^2 y = C \sin \omega t,$$

troviamo che la soluzione generale dell'omogenea è $y(t) = A \cos kt + B \sin kt$. Il "ricettario" appena visto ci dice che nel caso in cui $\omega \neq \pm k$, troveremo una soluzione del tipo $y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$, mentre nel caso in cui $\omega = \pm k$ (sistema in risonanza), ci sarà una soluzione particolare del tipo $y(t) = t(c_1 \cos kt + c_2 \sin kt)$.

Concludiamo quest'ultima lezione natalizia mostrando come, con la teoria delle equazioni lineari, sia possibile definire la funzione esponenziale e le funzioni goniometriche elementari in modo *assolutamente rigoroso e relativamente semplice*. Si noti infatti che in una delle prime lezioni avevamo dato una definizione rigorosa della funzione esponenziale, ma avevamo omesso la verifica delle sue proprietà fondamentali. Per le funzioni seno e coseno, ci siamo invece limitati ad una definizione non del tutto rigorosa (a causa del fatto che la misura *in radianti* di un angolo richiede una precisa definizione di lunghezza di una curva!). Con le equazioni differenziali, è possibile in un certo senso aggirare queste difficoltà in modo quasi indolore: definiamo le funzioni che ci interessano come soluzioni di certi problemi di Cauchy, e mostriamo che godono di tutte le proprietà che ci servono!

Cominciamo dall'esempio più semplice, quello della funzione esponenziale: *DEFINIZIONE*: Definiamo la funzione $E(t)$ come l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

e il numero di Nepero e come $e := E(1)$.

Mostriamo ora che la funzione $E(t)$ gode di tutte le proprietà che deve avere la funzione esponenziale e^t (e può dunque essere presa come *definizione* di quest'ultima!).

Innanzitutto, la funzione $E(t)$ è ben definita ed esiste per ogni t reale (grazie al teorema di esistenza e unicità per le equazioni lineari). È poi derivabile infinite volte (perché l'equazione stessa ci dice che la derivata ha la stessa regolarità della funzione: visto che la funzione è derivabile, anche la derivata è derivabile...e quindi la funzione è derivabile due volte. E quindi la derivata è derivabile due volte, e così via a cascata!).

Vale poi la proprietà fondamentale delle potenze $E(t_0 + t) = E(t_0)E(t)$: basta osservare che sia il primo che il secondo membro di questa identità soddisfano l'equazione differenziale $x'(t) = x(t)$, e che hanno lo stesso valore per $t = 0$: soddisfano dunque lo stesso problema di Cauchy!

$E(t)$ è poi strettamente crescente, e la sua immagine è $(0, +\infty)$ (abbiamo visto come fare con uno studio qualitativo delle soluzioni dell'equazione differenziale). Possiamo dunque definire come al solito la funzione logaritmo. Questo ci permette di confrontare la "nuova" definizione del numero di Nepero con quella originale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = E\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) = E(1),$$

dove abbiamo calcolato l'ultimo limite con la regola di l'Hôpital.

In maniera analoga, usando però equazioni del secondo ordine, non è difficile definire le funzioni seno e coseno:

DEFINIZIONE: Definiamo le funzioni $C(t)$ e $S(t)$ (rispettivamente il coseno e il seno) come le (uniche) soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x''(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

In questo caso, la verifica del fatto che queste funzioni si comportano esattamente come il coseno ed il seno è più complicata: occorre verificarne le

simmetrie, la periodicità, il fatto che la derivata del seno è il coseno e che quella del coseno è meno il seno.... Tutte queste verifiche si possano fare usando in buona sostanza solo il teorema di esistenza e unicità!