

# Diario del Corso di Analisi - I Unità Didattica

**Corsi di Laurea:** Matematica, Fisica, Fisica Applicata

**Docente:** Sisto Baldo

*ATTENZIONE: Il presente Diario del Corso vuole essere un riassunto abbastanza dettagliato di quello che è stato detto in aula, e come tale può essere un utile sussidio per chi voglia sistemare i propri appunti, o per chi sia stato assente e voglia ricostruire i contenuti di una lezione. D'altra parte, queste brevi paginette NON possono sostituire completamente un libro di testo, la lezione in aula o un'interazione diretta con il docente o l'esercitatrice: siete quindi invitati a servirvi ANCHE di queste altre opportunità per approfondire le vostre conoscenze!*

**Lezione del 21/9/2004 (2 ore):** Presentazione del corso: orario, esercitazioni, ricevimento studenti, sito web, tempi e modalità delle prove di valutazione (provetta in itinere, prova finale, recuperi). Argomento del corso: calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale.

Visto che nel corso ci occuperemo di funzioni reali di variabile reale, sarà bene capire esattamente cosa sono i numeri reali!

Consideriamo la seguente catena di insiemi numerici, sempre più grandi:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Ogni volta che passiamo da un insieme al successivo, *guadagnamo qualcosa...* Nell'insieme  $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  dei numeri naturali non è possibile trovare l'elemento inverso di un numero rispetto alla somma (l'opposto): perché questo si possa fare dobbiamo allargarci all'insieme  $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  dei numeri interi. Analogamente, in  $\mathbf{Z}$  non è possibile definire l'operazione inversa del prodotto: per questo, si introduce l'insieme  $\mathbf{Q}$  dei numeri razionali ( $\mathbf{Q} = \{m/n : m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$ ).

Con l'insieme dei numeri razionali potremmo dirci soddisfatti, almeno dal punto di vista delle quattro operazioni! E allora, perché sentiamo il bisogno di allargare ulteriormente l'insieme dei "numeri"?

Questa necessità divenne evidente già agli albori della matematica greca (anche se i greci avevano una visione più "geometrica" che "algebrica" della matematica): i pitagorici si accorsero che *la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 non è un numero razionale*. In termini moderni (e grazie al teorema di Pitagora), questo equivale a dire che  $\sqrt{2}$  non è un numero razionale.

Dimostriamolo per assurdo: supponiamo che esista un numero razionale  $q = m/n$  tale che  $q > 0$  e  $q^2 = 2$ . Riducendo la frazione ai minimi termini, non è restrittivo supporre che i numeri naturali  $m$  e  $n$  non abbiano fattori primi in comune.

Ora, la nostra supposizione equivale a  $m^2 = 2n^2$ , da cui segue che  $m^2$  è un numero pari. Poiché ogni fattore primo di  $m^2$  deve essere presente anche in  $m$ , ne deriva che  $m$  è pari.

Dunque,  $m = 2r$  per qualche numero naturale  $r$ , e la nostra identità diventa  $4r^2 = 2n^2$ , da cui  $2r^2 = n^2$ . Ripetendo esattamente il ragionamento appena fatto, questo mostra che  $n$  è pari. Assurdo perché abbiamo supposto che  $m$  e  $n$  non abbiano fattori in comune, e quindi essi non possono essere entrambi pari!

Per i pitagorici, la scoperta dell'irrazionalità di  $\sqrt{2}$  ebbe sconvolgenti conseguenze filosofiche...per noi, significa solo che dobbiamo trovare un insieme *più ampio* di numeri, in modo che almeno uno di essi abbia quadrato uguale a 2 (e in cui magari sia possibile risolvere altri interessanti problemi!).

Una buona risposta a queste necessità è l'insieme  $\mathbf{R}$  dei numeri reali, che noi ben conosciamo. Vero?

Cosa sono i numeri reali di cui abbiamo parlato (e che abbiamo usato) per buona parte della nostra carriera scolastica?

Una possibile risposta: sono tutti i numeri decimali, eventualmente con infinite cifre dopo la virgola. Questo è un buon modello dei numeri reali, che presenta però un piccolo problema: se *definiamo* i reali come numeri decimali infiniti, non è poi facilissimo definire le operazioni e la relazione d'ordine, e mostrare poi che esse godono di tutte le proprietà che ci aspettiamo... Comunque, questo è possibile senza eccessive difficoltà.

Un approccio alternativo (adottato da molti testi di analisi matematica) è quello assiomatico: i numeri reali sono *per definizione* un *campo ordinato e completo*.

Questo significa che i numeri reali sono un *insieme* su cui sono definite due *operazioni* (la somma e il prodotto), entrambe associative e commutative. Inoltre, entrambe le operazioni hanno un elemento neutro (0 e 1 rispettivamente) e sono "invertibili" (cioè per ogni  $x \in \mathbf{R}$  esiste un altro elemento che denotiamo  $(-x)$  tale che  $x + (-x) = 0$ ; per ogni  $x \in \mathbf{R}$ ,  $x \neq 0$  esiste un altro elemento  $x^{-1}$  tale che  $x \cdot x^{-1} = 1$ ). Vale inoltre la proprietà distributiva, che lega la somma al prodotto. Un insieme con due operazioni che godono di queste proprietà è detto *campo*.

C'è poi una *relazione d'ordine*, che dati due numeri reali ci consente di dire qual è il più grande. Questa relazione d'ordine è compatibile con le operazioni (nel senso che possiamo manipolare le disuguaglianze nel modo in cui siamo abituati: sommando uno stesso numero reale ad ambo i membri

di una disuguaglianza essa rimane vera, così come se moltiplichiamo ambo i membri per uno stesso numero reale positivo). Un campo che gode di queste proprietà è un *campo ordinato*: ma anche  $\mathbf{Q}$  è un campo ordinato!

Quel che distingue  $\mathbf{R}$  da  $\mathbf{Q}$  è l'*assioma di completezza*. Ne diamo due formulazioni equivalenti:

*ASSIOMA DI COMPLETEZZA, I FORMULAZIONE (Dedekind):* Se  $A$  e  $B$  sono sottinsiemi di  $\mathbf{R}$ , entrambi non vuoti e tali che  $a \leq b \forall a \in A, \forall b \in B$ , allora esiste un numero reale  $c$  tale che

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Un tale numero  $c$  si dice *elemento separatore* di  $A$  e  $B$ .

In soldoni, se abbiamo due sottinsiemi non vuoti  $A$  e  $B$  della retta reale tali che  $A$  sta tutto a sinistra di  $B$ , possiamo trovare un numero reale che sta sia a destra di  $A$  che a sinistra di  $B$ .

*ASSIOMA DI COMPLETEZZA, II FORMULAZIONE (Esistenza dell'estremo superiore):* Ogni sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato di  $\mathbf{R}$  ammette estremo superiore in  $\mathbf{R}$ .

Per comprendere questa seconda formulazione dell'assioma di completezza, dobbiamo dare alcune definizioni: questo verrà fatto nella prossima lezione, durante la quale verificheremo anche l'equivalenza delle due formulazioni dell'assioma di completezza.

### **Lezione del 23/9/2004 (2 ore):**

Per capire la formulazione dell'assioma di completezza che si rifà al concetto di estremo superiore, abbiamo bisogno di alcune definizioni:

*DEFINIZIONI:* Se  $A \subset \mathbf{R}$ , un *maggiorante* di  $A$  è un numero reale  $M$  tale che  $M \geq a$  per ogni  $a \in A$ .

Un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$  si dice *superiormente limitato* se ammette almeno un maggiorante.

L'*estremo superiore* di un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbf{R}$  è il *minimo* dei maggioranti di  $A$ , se questo minimo esiste.

Cerchiamo di comprendere il significato di questa definizione di estremo superiore (che per inciso si indica col simbolo  $\sup A$ ...).

Se l'insieme  $A$  ammette massimo, allora l'estremo superiore coincide col massimo. Infatti il massimo dell'insieme è un maggiorante per definizione, e inoltre nessun numero più piccolo del massimo può essere un maggiorante (perché è superato dal massimo stesso, che è un elemento dell'insieme).

D'altra parte, un insieme infinito non è detto che possieda massimo anche se è superiormente limitato: per esempio, la semiretta  $A = \{x \in \mathbf{R} : x < 2\} = (-\infty, 2)$  non possiede un elemento massimo. Infatti, dato un qualunque elemento  $a \in A$ , il numero  $\frac{a+2}{2}$  è ancora minore di 2, ed è maggiore di  $a$ : *a non può essere dunque l'elemento massimo della semiretta*. Invece, è immediato verificare che  $\sup A = 2$ ... L'estremo superiore è la *naturale generalizzazione del concetto di massimo* agli insiemi superiormente limitati che non hanno massimo!

L'assioma di completezza nella sua seconda formulazione dice una cosa non ovvia: *qualunque* sottinsieme non vuoto e superiormente limitato  $A \subset \mathbf{R}$  ammette il sup. La cosa *non* è immediata perché il sup è definito come minimo di un insieme *infinito* (l'insieme dei maggioranti di  $A$ ), e non sempre un insieme infinito ammette minimo!

*Mostriamo ora l'equivalenza delle due formulazioni dell'assioma di completezza.*

Cominciamo col mostrare che se vale l'assioma di Dedekind, allora ogni sottinsieme non vuoto e superiormente limitato di  $\mathbf{R}$  ammette estremo superiore.

Sia infatti  $A \subset \mathbf{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $A$  superiormente limitato. Definiamo

$$B = \{b \in \mathbf{R} : b \text{ è un maggiorante di } A\}.$$

La coppia di insiemi  $A$  e  $B$  soddisfa le richieste dell'assioma di Dedekind ( $B$  è non vuoto perché  $A$  è superiormente limitato, e giace a destra di  $A$  perché contiene solo maggioranti di  $A$ ), quindi esiste un elemento separatore  $c \in \mathbf{R}$  tale che  $a \leq c \leq b$  per ogni  $a \in A$  e per ogni  $b \in B$ . La disuguaglianza di sinistra dice che  $c$  è un maggiorante di  $A$ , mentre quella di destra assicura che è più piccolo di ogni altro maggiorante: in conclusione,  $c = \sup A$ .

Mostriamo che la seconda formulazione dell'assioma di completezza implica la prima.

Siano  $A, B$  due sottinsiemi come nell'assioma di Dedekind (cioè sono non vuoti e  $A$  giace tutto a sinistra di  $B$ ). Poniamo  $c = \sup A$  (esiste per ipotesi, visto che  $A$  è non vuoto, ed è anche superiormente limitato perché  $B$  è non vuoto ed è tutto fatto di maggioranti di  $A$ ).

Dico che  $c$  è un elemento separatore tra  $A$  e  $B$ : infatti,  $c$  è un maggiorante di  $A$  per definizione di sup. Inoltre, è minore o uguale di *ogni* elemento di  $B$  perché è il minimo dei maggioranti di  $A$ , e  $B$  è costituito interamente da maggioranti di  $A$ . Q.E.D.

Evidentemente, l'assioma di completezza (in una qualunque delle sue formulazioni equivalenti) *non è vero* nel campo dei razionali: per esempio, l'in-

sieme  $A = \{q \in \mathbf{Q} : q \geq 0, q^2 \leq 2\}$  è un sottinsieme di  $\mathbf{Q}$  non vuoto e superiormente limitato (per esempio, 2 è un maggiorante), ma esso non ha estremo superiore in  $\mathbf{Q}$ : il problema è che possiamo trovare maggioranti razionali *arbitrariamente vicini* a  $\sqrt{2}$ , che però non appartiene ai razionali. Ovviamente, se vediamo questo insieme come *sottinsieme di  $\mathbf{R}$* , l'estremo superiore c'è ed è uguale a  $\sqrt{2}$ .

In matematica, oltre all'estremo superiore si usa spesso l'estremo inferiore che è l'oggetto simmetrico:

*DEFINIZIONE:* Un minorante di un insieme  $A \subset \mathbf{R}$  è un numero reale  $c$  tale che  $c \leq a$  per ogni  $a \in A$ .  $A$  si dice inferiormente limitato se possiede un minorante. L'estremo inferiore di  $A$  (se esiste) è il massimo dei minoranti di  $A$ , e si indica con  $\inf A$ .

Ovviamente, l'estremo inferiore coincide con il minimo di  $A$  quando questo esiste.

Inoltre, un'ulteriore formulazione equivalente dell'assioma di completezza consiste nel chiedere che ogni insieme inferiormente limitato ammette estremo inferiore (esercizio)!

Per comodità, vale anche la pena di introdurre una notazione per indicare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di insiemi illimitati, e dell'insieme vuoto:

*DEFINIZIONE:* Il fatto che un insieme  $A$  non sia superiormente limitato si esprime con la scrittura  $\sup A = +\infty$ . Analogamente, per un insieme illimitato inferiormente scriveremo  $\inf A = -\infty$ . Poniamo poi  $\sup \emptyset = -\infty$ ,  $\inf \emptyset = +\infty$ .

La definizione assiomatica di  $\mathbf{R}$  è comoda (è sostanzialmente un menù delle proprietà che possiamo utilizzare quando manipoliamo i numeri reali), ma rimane il problema di mostrare che *esiste almeno un insieme, dotato di operazioni e relazione d'ordine, che soddisfa tutti gli assiomi*: abbiamo bisogno di un *modello* dei numeri reali.

Come accennavamo ieri, un tale modello è costituito dai *numeri decimali infiniti*. Non è difficile convincersi che con tale modello si possono definire le operazioni e la relazione d'ordine, e che esse godono di tutte le proprietà che ci servono...

Cerchiamo però di mostrare che in questo modello vale l'assioma di completezza: precisamente, supponiamo di avere un insieme  $A \subset \mathbf{R}$  (cioè  $A$  è una collezione di decimali infiniti) non vuoto e inferiormente limitato, e mostriamo come sia possibile identificarne l'estremo inferiore *come decimale infinito*.

Evidentemente, non è restrittivo supporre che 0 sia un minorante di  $A$  (basta compiere una traslazione, cioè aggiungere a tutti gli elementi di  $A$  uno stesso numero, per esempio l'opposto di un minorante: anche l'estremo inferiore risulterà modificato nello stesso modo...).

Ci troviamo nella seguente situazione: abbiamo un sottinsieme della retta reale che giace tutto a destra di 0, e ci chiediamo come calcolare *le cifre decimali* del massimo dei suoi minoranti.

Evidentemente, per trovare l'estremo inferiore a meno di un'unità, ci basta prendere il *massimo dei numeri naturali che sono minoranti di  $A$* , per trovarlo a meno di un decimo ci basta prendere *il massimo dei numeri decimali finiti con una cifra dopo la virgola che sono minoranti di  $A$* , per trovarlo a meno di un centesimo troveremo *il massimo dei numeri decimali finiti con due cifre dopo la virgola che sono minoranti di  $A$* , e così via... Ogni volta, dobbiamo trovare il massimo di un insieme finito. Inoltre, ogni volta che raffiniamo la suddivisione è evidente che *le cifre che avevamo già trovato in precedenza non cambiano*.

Proseguendo indefinitamente, abbiamo una ricetta per trovare tutte le cifre che vogliamo di un numero decimale infinito  $c$ , che gode di questa proprietà: se arrestiamo  $c$  alla  $k$ -esima cifra dopo la virgola e chiamiamo  $c_k$  il numero decimale finito così ottenuto<sup>1</sup>,  $c_k$  è un minorante di  $A$  ed esiste un elemento di  $A$  che dista meno di  $1/10^k$  da  $c_k$  (altrimenti avrei potuto aumentare di almeno un'unità la  $k$ -esima cifra decimale di  $c$ ). Siccome  $k$  può essere preso arbitrariamente grande, questo ci dice che *esistono punti di  $A$  arbitrariamente vicini a  $c$* .

In conclusione,  $c$  è per costruzione un minorante di  $A$ , ed è il massimo perché l'insieme  $A$  possiede punti arbitrariamente vicini a  $c$ , per cui un qualunque numero più grande di  $c$  non può essere più un minorante di  $A$ .

L'esistenza della radice quadrata di un numero reale positivo può essere recuperata usando l'estremo superiore: se  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$ , definiamo  $\sqrt{a} = \sup\{x \in \mathbf{R} : x^2 \leq a\}$ . Questo definisce un numero reale positivo, il cui quadrato si può dimostrare che è uguale ad  $a$ .

Non dimostriamo questo fatto, perché esso è una conseguenza immediata del teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue, che verrà enunciato e dimostrato a metà di questo corso... Durante questo breve periodo, faremo un atto di fede e "confideremo" nell'esistenza delle radici  $n$ -esime, della funzione logaritmo, etc...

## Lezione del 28/9/2004 (2 ore):

---

<sup>1</sup> $c_k$  non è altro che il numero decimale ottenuto al  $k$ -passo del nostro algoritmo

Cominciamo questa lezione con un breve ripasso sulle potenze: potenze ad esponente naturale, intero, razionale (la definizione è “obbligata” se vogliamo che valgano le proprietà delle potenze!).

Potenze ed esponente reale: se  $a > 1$  e  $x \in \mathbf{R}$ , definiamo

$$a^x = \sup\{a^q : q \in \mathbf{Q}, q \leq x\}.$$

Si può dimostrare che questo oggetto ha tutte le proprietà della funzione esponenziale che ben conosciamo.

Le dimostrazioni sono semplici, ma piuttosto noiose: preferiamo invece usare questa lezione per introdurre, dapprima in modo assolutamente informale, le nozioni di limite di una funzione reale di variabile reale e di funzione continua.

Cominciamo con un brevissimo ripasso sul concetto di funzione e su quello di grafico di una funzione: una funzione  $f : A \rightarrow B$ , dove  $A, B$  sono insiemi ( $A$  si chiama dominio,  $B$  codominio) può essere pensata come una “scatola nera” o una “regola” che ad ogni elemento  $a \in A$  associa uno ed un solo elemento  $f(a) \in B$ . Qualche esempio di funzioni che “esistono in natura”: la temperatura nella nostra aula o il valore di una certa azione alla Borsa di Milano (entrambe in funzione del tempo), la forza elastica esercitata da una molla in funzione dell’elongazione, il segnale acustico raccolto da un microfono in funzione del tempo, la funzione che associa ad ogni sedia presente in quest’aula il nome di chi la occupa...

Caso particolarmente importante per noi: le funzioni reali di variabile reale, cioè quelle per cui  $A \subset \mathbf{R}$  e  $B \subset \mathbf{R}$ . Grafico di una funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ : è il sottinsieme del piano cartesiano

$$G_f = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y = f(x)\}.$$

Tra i sottinsiemi del piano cartesiano, come distinguere quelli che sono grafici di una funzione reale di variabile reale? Sono i sottinsiemi  $G$  tali che per ogni  $x \in \mathbf{R}$  troviamo una ed una sola  $y \in \mathbf{R}$  tale che  $(x, y) \in G$ .

Nel caso generale in cui  $A$  e  $B$  sono insiemi qualunque, si introduce il prodotto cartesiano  $A \times B$  di due insiemi  $A$  e  $B$  come l’insieme delle *coppie ordinate*  $(a, b)$  in cui  $a \in A$  e  $b \in B$ :  $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ . Il grafico di una funzione  $f : A \rightarrow B$  è allora il sottinsieme di  $A \times B$  definito esattamente come sopra:

$$G_f = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\}.$$

Identifichiamo i sottinsiemi di  $A \times B$  che sono grafici di una funzione  $f : A \rightarrow B$ : otteniamo una “ricetta”, simile a quella sopra, che può essere adottata come definizione rigorosa di funzione tra due insiemi.

Cerchiamo ora di affrontare un “esercizio” piuttosto difficile: vogliamo capire come è fatto il grafico della funzione  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , funzione reale definita su  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ . Osserviamo che questa è una funzione pari (cioè  $f(-x) = f(x)$ ) e che per  $x > 0$  ha lo stesso segno della funzione seno ed è compresa tra le funzioni  $-1/x$  e  $1/x$ . Quello che non è per niente chiaro a priori, è come si comporta la funzione per *valori piccoli della  $x$* ...

Attraverso semplici considerazioni geometriche, scopriamo che per  $0 < x < \pi/2$  valgono le disuguaglianze  $x \leq \tan x$  e  $\sin x < x$ . Vedremo come mettere a frutto queste due disuguaglianze la prossima volta!

### Lezione del 1/10/2004 (2 ore):

La volta scorsa stavamo tentando di capire come si comporta la funzione  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  per valori piccoli di  $x$ . Abbiamo scoperto che, per  $x \in (0, \pi/2)$ , valgono le disuguaglianze  $\sin x < x < \tan x$ , da cui

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{se } 0 < x < \pi/2.$$

Si noti che le disuguaglianze rimangono valide anche per  $-\pi/2 < x < 0$  perché tutte le funzioni coinvolte sono pari.

Geometricamente, questo dice che il grafico della funzione  $f(x)$ , per angoli piccoli, è compreso tra i grafici della funzione  $\cos x$  e della funzione costante 1: possiamo quindi concludere che quando  $x$  si avvicina a 0, il valore della funzione  $f(x)$  deve necessariamente avvicinarsi ad 1. Esprimiamo questo fatto scrivendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

*DEFINIZIONE INFORMALE: la scrittura*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

*esprime il fatto che, se si avvicina sufficientemente la  $x$  a  $x_0$  (con  $x \neq x_0$ ), il valore di  $f(x)$  diventa arbitrariamente vicino al numero  $\ell$ .*

Osserviamo che non è affatto necessario che la funzione  $f$  sia definita in  $x_0$  (e, se lo fosse, conveniamo comunque di *non tenerne conto quando andiamo a verificare la relazione di limite*). Quel che serve, è solo che la funzione  $f$  sia definita in punti *arbitrariamente vicini ad  $x_0$*  (in matematica,  $x_0$  deve essere un punto di accumulazione del dominio di  $f$ ).

Per il momento, non diamo una definizione precisa di limite: essa arriverà inesorabilmente tra non molto.

Piuttosto, avendo a disposizione il concetto di limite si può introdurre quello di funzione continua:

*DEFINIZIONE:* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione reale di variabile reale definita su un intervallo. Se  $x_0 \in [a, b]$ , diciamo che  $f$  è continua in  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se  $f$  è continua in ogni punto del suo dominio  $[a, b]$ , diciamo semplicemente che essa è continua.

Ci si convince facilmente che l'idea geometrica dietro al concetto di continuità è piuttosto semplice: il grafico di una funzione continua è una “curva continua”, cioè può essere disegnato “senza staccare la penna dal foglio”. Infatti, se rileggiamo la definizione di continuità alla luce della nostra pseudo-definizione di limite, vediamo che una funzione è continua in  $x_0$  quando  $f(x)$  diventa *arbitrariamente vicino* a  $f(x_0)$  a patto di prendere  $x$  *sufficientemente vicino* a  $x_0$ . In maniera ancora più informale possiamo dire che una funzione continua  $f(x)$  ha la proprietà di “cambiare di poco” il suo valore quando si “cambia di poco” la variabile indipendente  $x$ .

A questo punto, viene naturale chiedersi se già conosciamo delle funzioni continue... La risposta è affermativa: si pensi alla funzione *costante*  $f(x) = k$ , o alla funzione *identica*  $f(x) = x$ . In questi due casi, le (pseudo)-definizioni date sopra diventano delle tautologie!

Val la pena, a questo punto, di enunciare alcuni fatti utili che riguardano le funzioni continue: li dimostreremo tra poco, quando avremo a disposizione la definizione di limite. Per il momento, ci accontentiamo di osservare che tutte queste affermazioni suonano plausibili e piuttosto naturali:

- La *funzione identica*  $f(x) = x$  è continua, come lo è la funzione costante  $f(x) = k$ . Se rileggiamo una delle “definizioni” scritte sopra in questi casi particolari, otteniamo delle tautologie!
- Sommando o facendo il prodotto di due funzioni continue si ottiene una funzione continua, e il rapporto di due funzioni continue è continuo in tutti i punti in cui il denominatore non si annulla. Tutte queste affermazioni sono plausibili: per esempio, la somma di due numeri “cambierà di poco” se “cambiano di poco” gli addendi! Possiamo convincerene in modo più quantitativo con alcuni semplici conti.

Supponiamo per esempio che  $f, g$  siano continue in  $x_0$  e cerchiamo di mostrare che  $f + g$  e  $f \cdot g$  sono continue nello stesso punto. Questo equivale a far vedere che  $f(x) + g(x)$  e  $f(x) \cdot g(x)$  sono *arbitrariamente vicine* a  $f(x_0) + g(x_0)$  e a  $f(x_0) \cdot g(x_0)$  rispettivamente, a patto di prendere  $x$  *sufficientemente vicino* a  $x_0$ .

Evidentemente, basta far vedere che le quantità

$$|(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))|, \quad |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)|$$

diventano arbitrariamente piccole se  $x$  è sufficientemente vicino a  $x_0$ .

Per quanto riguarda la somma, abbiamo

$$|(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|,$$

e gli addendi dell'espressione a destra possono essere resi arbitrariamente piccoli per ipotesi (perché  $f$  e  $g$  sono continue).

Analogamente, per il prodotto possiamo scrivere

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \leq |f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)| \leq |f(x)||g(x) - g(x_0)| + |f(x) - f(x_0)||g(x_0)|.$$

Le differenze  $|g(x) - g(x_0)|$  e  $|f(x) - f(x_0)|$  possono essere rese arbitrariamente piccole, mentre i fattori moltiplicativi  $|f(x)|$  e  $|g(x_0)|$  sono limitati (il secondo è costante, il primo è "vicino" a  $|f(x_0)|$ ...

Si noti come questi risultati "algebrici" sulle funzioni continue ci dicano, per esempio, che le funzioni razionali (rapporti di polinomi) sono continue tranne che nei punti in cui si annulla il denominatore!

- *Teorema dei carabinieri:* Se  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  per ogni  $x$ ,  $f$  e  $h$  sono continue in  $x_0$ , e se  $f(x_0) = h(x_0)$ , allora anche  $g$  è continua in  $x_0$  con  $g(x_0) = f(x_0)$ .
- *Composizione di funzioni continue:* facendo la composizione di due funzioni continue  $f, g$  (supponiamole per semplicità definite su tutto  $\mathbf{R}$ ) si ottiene una funzione continua.

Anche questo si ottiene a partire da un corretto "spelling" della "definizione" di continuità per  $f$  in  $x_0$ , e per  $g$  in  $f(x_0)$ ...

- *Continuità della funzione inversa:* se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è una funzione continua e strettamente crescente (oppure strettamente decrescente), allora esiste la funzione inversa  $g : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ , (rispettivamente  $g : [f(b), f(a)] \rightarrow [a, b]$ ), anch'essa continua. Questo risultato è "geometricamente evidente", ed una sua dimostrazione rigorosa sarà dedotta facilmente dal teorema di esistenza degli zeri e da una notevole proprietà delle funzioni crescenti o decrescenti.

Per il momento, basti dire che questo implica ad esempio la continuità della funzione radice quadrata...

Abbiamo sostanzialmente usato il “teorema dei carabinieri” per far vedere che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ... anche se a rigore avremmo avuto bisogno di mostrare che la funzione  $\cos x$  è continua in 0: abbiamo dato per scontato che “ $\cos x$  si avvicina a 1 quando  $x$  si avvicina a 0”. Questo, fortunatamente, può essere dedotto dalle considerazioni appena fatte.

Anzitutto, abbiamo visto che per angoli acuti si ha  $0 < \sin x \leq x$  (mentre per ragioni di simmetria avremo  $x \leq \sin x < 0$  per  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ ): grazie al teorema dei carabinieri deduciamo che  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ .

In altre parole, la funzione seno è continua in 0. Sempre per angoli acuti,  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ , per cui  $\cos x$  è continua in 0 (perchè la radice quadrata è una funzione continua, la funzione seno è continua in 0 e valgono i risultati enunciati sopra sulla continuità di somme e composizioni...).

**Lezione del 5/10/2004 (2 ore):** La volta scorsa abbiamo visto che la funzione seno e la funzione coseno sono continue in 0. Verifichiamo che in realtà sono continue ovunque: se  $x_0 \in \mathbf{R}$  possiamo scrivere

$$\sin x = \sin(x_0 + (x - x_0)) = \sin x_0 \cos(x - x_0) + \cos x_0 \sin(x - x_0)$$

da cui si deduce facilmente che  $\sin x$  è continua in  $x_0$ . In maniera analoga, la funzione  $\cos x$  è continua in tutti i punti.

Torniamo al concetto di limite: risultati analoghi a quelli enunciati sopra per le funzioni continue valgono anche per i limiti (vale il teorema dei carabinieri, il limite di somma e prodotto è rispettivamente la somma e il prodotto dei limiti...). Occorre solo un po' di cautela per quanto riguarda il limite della funzione composta: vedremo in seguito!

Purtroppo, il limite non sempre c'è. Ad esempio non esiste  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  (questa funzione compie *infinite* oscillazioni tra  $-1$  e  $1$  in *ogni* intorno comunque piccolo di 0).

Introduciamo alcune variazioni sul tema: limiti destro e sinistro, limiti all'infinito e limiti infiniti (e mostriamo qualche esempio di ciascuno).

Osserviamo che il calcolo del limite di rapporti, prodotti e somme diventa complicato in alcuni casi particolarmente delicati, detti *forme indeterminate*.

Infatti non è difficile convincersi che se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq 0$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = 0$ . Invece, se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , (*forma indeterminata 0/0*) non è così chiaro cosa succeda al limite del rapporto!

Questo per un buon motivo: il limite del rapporto di due funzioni che tendono entrambe a 0 può combinare *qualunque cosa*. Può essere un qualunque numero reale, essere infinito o non esistere. Per vederlo prendiamo

$x_0 = 0$  e (i)  $f(x) = g(x) = x$ : in questo caso il limite del rapporto è 1; (ii)  $f(x) = x, g(x) = x^3$ : in questo caso il limite è  $+\infty$ ; (iii)  $f(x) = x \sin(1/x), g(x) = x$ : in questo caso il limite non esiste.

Altre forme indeterminate (cioè situazioni come quella appena vista, in cui la sola conoscenza del limite delle funzioni  $f$  e  $g$  non permette di stabilire quanto fa il limite di  $f/g, f \cdot g, f + g$  oppure  $f^g$ ) sono  $\infty/\infty, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0 \dots$

A titolo di esempio, ripetiamo l'esercizio sopra per la forma indeterminata  $0 \cdot \infty$  (prodotto di una funzione che tende a 0 e di una che tende all'infinito), mostrando che anche in questo caso il limite del prodotto può essere finito, infinito o non esistere.

Dopo questi discorsi informali, è ormai ora di arrivare ad una definizione rigorosa del concetto di limite. Avevamo detto che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  se succede che, avvicinando *sufficientemente*  $x$  a  $x_0$  (con  $x \neq x_0$ ),  $f(x)$  diventa *arbitrariamente vicina* a  $\ell$ . Possiamo tradurre questa frase nella seguente

*DEFINIZIONE:* Sia  $f$  una funzione definita in un intorno di  $x_0$ . Diciamo che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  se e soltanto se, comunque scegliamo un intervallo  $I_\ell$  centrato in  $\ell$ , piccolo quanto vogliamo, è possibile trovare un intervallo  $J_{x_0}$  centrato in  $x_0$  tale che  $f(x) \in I_\ell$  per ogni  $x \in J_{x_0}, x \neq x_0$ .

Se scriviamo  $I_\ell = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$  e  $J_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , la definizione si può tradurre nella seguente (che è assolutamente equivalente a quella sopra, ed è quella che ha sempre riscosso il maggior successo di pubblico e di critica):

*DEFINIZIONE:* Sia  $f$  una funzione definita in un intorno di  $x_0$ . Diciamo che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  se e soltanto se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , è possibile trovare  $\delta > 0$  tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \quad (P)$$

Verifichiamo che con la definizione di limite appena vista, valgono le proprietà dei limiti e delle funzioni continue che abbiamo elencato nella scorsa lezione.

- *Continuità delle costanti e della funzione identica:* Per mostrare che  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$  basta prendere  $\delta = \varepsilon$  nella definizione di limite. Dimostrare che il limite di una costante è la costante stessa è altrettanto facile!
- *TEOREMA (dei carabinieri):* Se  $f, g, h$  sono tre funzioni definite in un intorno di  $x_0$ ,  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  in tale intorno e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ , allora esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell.$$

*DIM.:* sia  $\varepsilon > 0$ , e scegliamo  $\delta > 0$  tale che  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ ,  $|g(x) - \ell| < \varepsilon$  ogni qual volta  $0 < |x - x_0| < \delta$  (a priori, la definizione di limite potrebbe darci due valori diversi di  $\delta$  per  $f$  e per  $g$ : perché sia vero quanto appena scritto, basta prendere il più piccolo dei due).

Le due disuguaglianze per  $f$  e per  $g$  possono anche essere scritte:  $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ ,  $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$ . Usando l'ipotesi  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  otteniamo allora (per ogni  $x$  tale che  $0 < |x - x_0| < \delta$ ):

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < \ell + \varepsilon,$$

cioè  $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ , Q.E.D.

### Lezione del 7/10/2004 (2 ore):

Continuamo con la dimostrazione delle principali proprietà di limiti e funzioni continue:

- *Algebra dei limiti:* Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell_1} \quad \text{se } \ell_1 \neq 0.$$

La dimostrazione di queste affermazioni può essere ottenuta facilmente seguendo la falsariga delineata nella scorsa lezione. Per esempio, mostriamo l'ultima delle proprietà elencate: fissiamo  $\bar{\varepsilon} > 0$  e osserviamo che

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell_1} \right| = \frac{|f(x) - \ell_1|}{|f(x)||\ell_1|}.$$

Usando la definizione di limite con  $\varepsilon = |\ell_1|/2$ , possiamo trovare  $\delta_1$  tale che  $|f(x) - \ell_1| \geq |\ell_1|/2$  quando  $|x - x_0| < \delta_1$ ,  $x \neq x_0$ . A questo punto, basta riapplicare la definizione di limite con  $\varepsilon = \bar{\varepsilon} \cdot |\ell_1|^2/2$  per trovare un  $\delta < \delta_1$  tale che

$$\frac{|f(x) - \ell_1|}{|f(x)||\ell_1|} < \frac{2\varepsilon}{|\ell_1|^2} = \bar{\varepsilon}$$

ogni qual volta  $|x - x_0| < \delta$ ,  $x \neq x_0$ .

- *Limite di funzione composta:* rispetto all'analogo enunciato per le funzioni continue, occorre una certa cautela dovuta al fatto che nella definizione di limite non vogliamo tener conto del comportamento della funzione *nel punto in cui si calcola il limite*. Diamo un enunciato preciso:

*TEOREMA:* Sia  $f$  definita in un intorno di  $x_0$  tale che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ , e tale che  $f(x) \neq y_0$  in un intorno di  $x_0$ . Sia poi  $g$  definita in un intorno di  $y_0$  tale che  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \ell$ . Allora si ha anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell.$$

*DIM.:* Dato  $\varepsilon > 0$ , troviamo  $\eta > 0$  tale che  $|g(y) - \ell| < \varepsilon$  se  $0 < |y - y_0| < \eta$ .

Troviamo poi  $\delta$  tale che, se  $0 < |x - x_0| < \delta$ , allora  $|f(x) - y_0| < \eta$  (e questa quantità è positiva per ipotesi, a patto di prendere  $\eta$  abbastanza piccolo!). Usando dunque la disuguaglianza valida per  $g$ , otteniamo

$$|g(f(x)) - \ell| < \varepsilon \quad \text{se } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

Q.E.D.

- Un altro utile fatto da osservare è il seguente: se  $f(x)$  è *limitata* (sia superiormente che inferiormente) in un intorno di  $x_0$ , e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ . Infatti, se  $|f(x)| \leq M$  in un opportuno intorno di  $x_0$ , avremo  $-Mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ , e il risultato voluto segue dal teorema dei carabinieri.
- Il risultato sulla continuità dell'inversa di una funzione continua verrà dimostrato tra non molto, quando avremo a disposizione il teorema di esistenza degli zeri.

La traduzione di tutti questi risultati per le funzioni continue è immediata, e fornisce esattamente gli enunciati della volta scorsa.

Osserviamo, per finire, che la definizione di limite ha senso anche se  $f$  è definita su un insieme qualunque  $A$ , di cui  $x_0$  sia un punto di accumulazione. Ovviamente, in tal caso la disuguaglianza nella definizione di limite andrà verificata solo per gli  $x \in A$ . Ricordo che  $x_0$  si dice *punto di accumulazione* di  $A$ , se esistono punti di  $A$  vicini quanto si vuole ad  $x_0$ .

Concludiamo la nostra sistemazione rigorosa del concetto di limite definendo i limiti infiniti e i limiti all'infinito. Diremo che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  se

per ogni  $M > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $0 < |x - x_0| < \delta$  implica  $f(x) > M$  (e c'è una definizione analoga per il limite  $-\infty$ ).

Limiti all'infinito: diciamo che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N > 0$  tale che  $x > N$  implica  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ . Analogamente, si definisce il limite a  $-\infty$ , e anche i limiti infiniti all'infinito...

Si noti che per parlare di limite a  $+\infty$  di una funzione  $f$ , basta che il dominio di  $f$  sia un insieme *illimitato superiormente*: in particolare, data una funzione  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ , ha senso chiedersi se esiste il  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$ .

Una funzione definita su  $\mathbf{N}$  si chiama *successione*. Di solito, per le successioni si adotta una notazione differente da quella usata per le funzioni: piuttosto che scrivere  $f(n)$ , si usa una scrittura del tipo  $\{a_n\}$ , dove il simbolo  $a_n$  rappresenta il valore della successione in  $n \in \mathbf{N}$ .

Facendo l'opportuna traduzione della definizione di limite in questo particolare caso, scopriamo che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{n} \in \mathbf{N}$  tale che per  $n \geq \bar{n}$  si abbia  $|a_n - \ell| < \varepsilon$ .

### Lezione del 14/10/2004 (2 ore):

Abbiamo già visto che il limite di una funzione in un punto non necessariamente esiste, così come non necessariamente esiste il limite di una successione per  $n \rightarrow +\infty$ : per esempio, la successione  $a_n = (-1)^n$  non ha limite.

Ci piacerebbe avere un risultato che dica almeno che le successioni *fatte in un certo modo* hanno limite. Ancora una volta, ci viene in aiuto la completezza di  $\mathbf{R}$ :

**TEOREMA:** Sia  $\{a_n\}$  una successione *crescente* (cioè  $a_{n+1} \geq a_n$  per ogni  $n$ ). Allora  $\{a_n\}$  ammette limite per  $n \rightarrow +\infty$ , e si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}.$$

*Dimostrazione:* Sia  $S = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ . Supponiamo che  $S \in \mathbf{R}$ : il caso  $S = +\infty$  è lasciato per esercizio.

Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Siccome  $S$  è un maggiorante dei valori assunti dalla successione, abbiamo che  $a_n \leq S < S + \varepsilon$  per ogni  $n$ . D'altra parte,  $S - \varepsilon$  non è più un maggiorante (per definizione di sup), per cui esiste un elemento della successione, chiamiamolo  $a_{\bar{n}}$ , tale che  $a_{\bar{n}} > S - \varepsilon$ . Siccome la successione è crescente, se  $n \geq \bar{n}$  si ha  $a_n \geq a_{\bar{n}} > S - \varepsilon$ .

Mettendo insieme le due disuguaglianze ottenute sopra, abbiamo che per  $n > \bar{n}$  si ha  $|a_n - S| < \varepsilon$ . Q.E.D.

In maniera del tutto analoga, si mostra che una funzione crescente ammette limite a  $+\infty$ , e che questo limite è uguale al sup. Ancora, una funzione crescente  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ammette limite destro e sinistro in ogni punto:

precisamente,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x > x_0\}.$$

Usiamo ora il teorema sui limiti delle successioni monotone per *definire il numero di Nepero e (la base dei logaritmi naturali)*: poniamo per definizione

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Naturalmente, occorre far vedere che questo limite *esiste ed è finito!*

L'idea della dimostrazione non è difficile: mostriamo dapprima che la successione  $a_n = (1 + 1/n)^n$  è crescente (e quindi il limite esiste!). Questo può essere dimostrato usando la disuguaglianza di Bernoulli<sup>2</sup>: dobbiamo far vedere che  $a_n \geq a_{n-1}$  per ogni numero naturale  $n \geq 1$ . Ora, manipolando un po' la disuguaglianza da dimostrare si vede che questa equivale a  $(\frac{n^2-1}{n^2})^n \geq (\frac{n-1}{n})$ , cioè a  $(1 - \frac{1}{n^2})^n \geq (1 - \frac{1}{n})$ : ma questo è esattamente quel che ci dice la disuguaglianza di Bernoulli! (In realtà, potremmo anche far vedere che la successione  $a_n$  è strettamente crescente...)

Per mostrare poi che il limite è finito, occorre mostrare che la successione è superiormente limitata. Per far questo prendiamo la successione  $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ , e mostriamo che questa è *decrescente* (con un procedimento analogo a quello usato per mostrare la crescita di  $a_n$ ). Si ha allora  $2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4$ , e possiamo essere certi che  $e$  è un numero reale compreso tra 2 e 4.

Mostriamo poi come da questa definizione segua il seguente *limite fondamentale* (di funzione reale!):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = e.$$

La cosa può essere dimostrata senza troppa difficoltà giocando con le parti intere: ricordo che il simbolo  $[x]$  indica *il più grande numero intero minore o uguale a  $x$* , da cui si ha evidentemente  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]} = e$  grazie alla definizione del numero  $e$ . Inoltre, per  $x > 0$  valgono le ovvie disuguaglianze

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

---

<sup>2</sup>La disuguaglianza di Bernoulli afferma che  $(1+a)^n \geq 1+na$  se  $a > -1$  e  $n \in \mathbf{N}$ . Essa può essere dimostrata facilmente utilizzando il *principio di induzione*, come avete visto a esercitazioni...

Ora, è immediato verificare che la funzione a sinistra e quella a destra tendono entrambe ad  $e$  (grazie all'osservazione fatta sopra), e il risultato voluto segue dal teorema dei carabinieri.

Usando il limite fondamentale dimostrato sopra, e la continuità della funzione esponenziale e della funzione logaritmo (che verificheremo, finalmente, la prossima volta!), possiamo dimostrare senza eccessiva difficoltà che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Per dimostrare il primo limite, possiamo cominciare a far vedere che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$  (questo è un semplice esercizio), da cui  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$  (basta “cambiare variabile” ponendo  $y = 1/x$ ... è anche opportuno distinguere il limite destro e il limite sinistro). Il limite voluto segue allora prendendo il logaritmo in base  $e$  (ricordando anche il teorema sul limite di funzione composta: prendiamo per buona la continuità della funzione logaritmo!). Il secondo dei due limiti fondamentali segue invece dal primo con il “cambio di variabile”  $y = e^x - 1$  (anche in questo caso, ci serve la continuità della funzione esponenziale per dire che  $y \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow 0$ ).

**Lezione del 19/10/2004 (2 ore):** Verifichiamo finalmente che le funzioni esponenziali  $f(x) = a^x$  (con  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) sono continue. Grazie alle proprietà delle potenze, è sufficiente verificarne la continuità in  $x_0 = 0$ : ci basta far vedere che  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ .

Supponiamo per fissare le idee che sia  $a > 1$  (la generalizzazione al caso  $0 < a < 1$  è lasciata per esercizio). Cominciamo col mostrare che vale il limite di successione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Definiamo  $b_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$ : questa è una successione positiva, ed il nostro limite sarà provato se facciamo vedere che  $b_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Ora, si vede subito che  $a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$  (dove per l'ultimo passaggio usiamo la disuguaglianza di Bernoulli), da cui  $0 < b_n \leq \frac{a-1}{n}$ . Il limite segue allora dal teorema dei carabinieri. Sia ora  $\varepsilon > 0$ . Troviamo  $\bar{n} \in \mathbf{N}$  tale che  $a^{1/\bar{n}} < 1 + \varepsilon$ . Siccome la funzione esponenziale è crescente, se ne deduce che  $1 < a^x < 1 + \varepsilon$  se  $0 < x < \frac{1}{\bar{n}}$ , per cui  $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 1$ . Per mostrare che anche il limite sinistro ha lo stesso valore, basta osservare che  $a^{-x} = \frac{1}{a^x} \dots$

Cosa dire della continuità di logaritmi, radici, funzioni trigonometriche inverse? Essa segue da un fatto generale: mostreremo tra breve che *l'inversa* di una funzione continua e strettamente crescente definita su un intervallo, è anche lei continua!

Uno dei risultati fondamentali sulle funzioni continue, è il  
*TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI*: Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua tale che  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ . Allora esiste un punto  $c \in (a, b)$  tale che  $f(c) = 0$ .

Questo teorema dall'aria innoqua si rivela in realtà assai utile. Per esempio, consideriamo la funzione continua  $f(x) = x^2 - a$  (con  $a > 0$ ) sull'intervallo  $[0, a+1]$ . Si vede subito che  $f(0) = -a < 0$ , mentre  $f(a+1) = a^2 + a + 1 > 0$ . Il teorema ci assicura che esiste un punto  $c$  dell'intervallo tale che  $c^2 - a = 0$ : abbiamo così dimostrato che esiste la radice quadrata di  $a$ . Essa è poi unica perché la funzione considerata è strettamente crescente sulla semiretta dei reali positivi (e quindi non si può annullare due volte).

In maniera analoga possiamo dimostrare l'esistenza del logaritmo, delle funzioni trigonometriche inverse, delle radici di ogni ordine....Non sarà nemmeno difficile verificare che tutte queste funzioni sono continue.

Propongo due diverse dimostrazioni del teorema di esistenza degli zeri (in aula abbiamo visto la seconda!).

*PRIMA DIMOSTRAZIONE (lunghezza ma istruttiva...)*: Usiamo il cosiddetto *metodo di bisezione*. Sia  $d = (b - a)/2$  il punto medio dell'intervallo  $[a, b]$ : se  $f(d) = 0$  siamo felicissimi perché abbiamo trovato il punto voluto, in caso contrario avremo  $f(d) < 0$  oppure  $f(d) > 0$ . In ogni caso, in uno dei due "mezzi intervalli"  $[a, d]$  oppure  $[d, b]$  si ripropone la situazione di partenza:  $f$  è negativa nell'estremo sinistro dell'intervallo, positiva nell'estremo destro. Chiamiamo  $[a_1, b_1]$  il semiintervallo che gode di questa proprietà.

Ripetiamo poi la stessa costruzione: prendiamo il punto di mezzo dell'intervallo  $[a_1, b_1]$  e osserviamo che se la funzione non si annulla nel punto di mezzo (ma se così fosse avremmo finito), in uno dei due mezzi intervalli che chiameremo  $[a_2, b_2]$  si ripropone la situazione di partenza:  $f(a_2) < 0$  e  $f(b_2) > 0$ .

Iteriamo questa costruzione: se il processo non si arresta perché troviamo un punto in cui la funzione si annulla, avremmo individuato una successione infinita di intervalli  $[a_n, b_n]$ , ciascuno contenuto nel precedente e tali che  $f(a_n) < 0$ ,  $f(b_n) > 0$ . Per costruzione abbiamo che la successione degli estremi sinistri  $a_n$  è crescente, la successione degli estremi destri  $b_n$  è decrescente e inoltre  $b_n - a_n = (b - a)/2^n$ . Siccome una successione crescente e limita-

ta ammette limite finito, esisterà il limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = c$ , ed evidentemente  $c \in [a, b]$ .

È evidente che si ha anche  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = c$  per quanto osservato sopra sulla differenza tra  $a_n$  e  $b_n$ . Grazie alla continuità di  $f$ , si ha poi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(c) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c).$$

D'altra parte, il primo limite deve essere necessariamente  $\leq 0$  in quanto limite di una successione di numeri negativi, mentre il secondo deve essere  $\geq 0$  in quanto limite di una successione di numeri positivi: siccome i due limiti sono entrambi uguali a  $f(c)$ , ne deriva che  $f(c) = 0$ . Q.E.D.

*DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA:* Vogliamo proporre un'altra dimostrazione del teorema, leggermente più rapida.

Poniamo  $c = \sup A$ , dove  $A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$ . Questo è evidentemente un numero reale compreso tra  $a$  e  $b$ . Dico che  $f(c) = 0$ .

Infatti, se per assurdo avessimo  $f(c) > 0$ , per definizione di limite avremmo  $f(x) > 0$  anche per tutti gli  $x$  in un certo intorno sinistro  $[c - \delta, c]$  di  $c^3$ . Quindi  $c - \delta$  sarebbe un maggiorante di  $A$  più piccolo di  $c$ , contro la definizione di estremo superiore.

Se poi fosse  $f(c) < 0$ , dovrebbe essere  $c < b$  (perché  $f(b) > 0$ ). Per lo stesso motivo di prima, troveremmo  $\delta > 0$  tale che  $f(x) < 0$  per  $x \in [c, c + \delta]$ , e  $c$  non sarebbe più un maggiorante di  $A$ . Q.E.D.

Un immediato corollario del teorema di esistenza degli zeri è il seguente

*TEOREMA (dei valori intermedi):* Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è una funzione continua, essa assume tutti i valori compresi tra  $f(a)$  e  $f(b)$ .

*Dimostrazione:* Sia  $y_0$  un valore compreso tra  $f(a)$  e  $f(b)$ . Basta applicare il Teorema di esistenza degli zeri alla funzione  $g(x) = f(x) - y_0 \dots$

Q.E.D.

Da questo teorema segue che se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è una funzione continua e strettamente crescente (che è evidentemente iniettiva!), essa è *surriettiva* sull'intervallo  $[f(a), f(b)]$ : in altre parole, essa è *invertibile*. Questo ci assicura l'esistenza di radici, logaritmi, funzioni inverse delle funzioni trigonometriche...

Sarebbe però piacevole sapere che queste funzioni inverse sono continue! La risposta si può facilmente desumere dal seguente

---

<sup>3</sup>Questo semplice fatto è noto come *teorema della permanenza del segno*: se una funzione ha limite positivo in  $x_0$ , allora è positiva in un intorno di  $x_0$  (con la possibile esclusione di  $x_0$ ).

**TEOREMA (Continuità delle funzioni monotone):** Una funzione crescente  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è continua se e solo se

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

Un risultato analogo vale per le funzioni decrescenti.

*DIM.:* Se  $f$  è continua, la tesi è una conseguenza immediata del Teorema dei valori intermedi. Viceversa, supponiamo che  $f$  non sia continua, e sia  $x_0$  un suo punto di discontinuità (supponiamo per semplicità  $x_0 \in (a, b)$ : le semplici modifiche necessarie nei casi  $x_0 = a$  o  $x_0 = b$  sono lasciate per esercizio).

Abbiamo visto che le funzioni crescenti ammettono sempre limite destro e sinistro, che evidentemente devono essere diversi in  $x_0$ :

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : a \leq x < x_0\} < \\ \ell_2 &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x_0 < x \leq b\}. \end{aligned}$$

Per la crescita di  $f$ , segue subito che  $f([a, b])$  non può contenere nessun punto dell'intervallo  $(\ell_1, \ell_2)$ , e  $f$  non può essere suriettiva.

Q.E.D.

Da quest'ultimo teorema segue che *la funzione inversa di una funzione continua e strettamente crescente definita su un intervallo  $[a, b]$ , è anch'essa continua.* Infatti, la funzione inversa è strettamente crescente e suriettiva da  $[f(a), f(b)]$  in  $[a, b]$ .

Sono in particolare continue le radici, i logaritmi, le funzioni trigonometriche inverse...

**Lezione del 21/10/2004 (2 ore):** Un altro, importante risultato sulle funzioni continue è il

**TEOREMA (di Weierstrass):** Una funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  ammette massimo e minimo. (Attenzione: è importante che il dominio della funzione sia un *intervallo chiuso e limitato*, e che la funzione sia continua. Abbiamo visto con qualche esempio che senza queste ipotesi la tesi può anche essere falsa!).

*Dimostrazione:* Sia  $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ . Dobbiamo mostrare che  $M$  è il massimo di  $f$ , cioè che esiste  $x_0 \in [a, b]$  tale che  $f(x_0) = M$ .

Dimostriamo questo teorema con un procedimento di bisezione: dividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in due intervalli uguali tramite il suo punto medio  $c = (a + b)/2$ . Su almeno uno dei due semiintervalli  $[a, c]$  o  $[c, b]$ , l'estremo

superiore di  $f$  sarà ancora  $M$ . Questo nuovo intervallo potrà poi essere ancora suddiviso in due, e su una delle due metà il sup sarà necessariamente  $M$ ...

Proseguendo con questo procedimento, possiamo costruire una successione di intervalli  $[a_n, b_n]$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) tali che

1.  $[a_0, b_0] = [a, b]$ ,  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  per  $n = 1, 2, \dots$ ,
2.  $\sup\{f(x) : x \in [a_n, b_n]\} = M$ ,
3.  $b_n - a_n = (b - a)/2^n$ .

Ci accorgiamo che la successione  $a_n$  è crescente, per cui esiste  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0 \in [a, b]$ , e che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = x_0$  (a causa di 3.).

Dico che  $f(x_0) = M$ . Infatti,  $f(x_0) \leq M$  per definizione di sup. Sia poi  $\varepsilon > 0$ : per la continuità di  $f$ , esiste un intorno  $I$  di  $x_0$  tale che, per ogni  $x \in I$ , si abbia

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Siccome per  $n$  abbastanza grande avremo  $[a_n, b_n] \subset I$ , è chiaro che l'estremo superiore di  $f$  su  $I$  dovrà essere  $M$ : passando al sup nella relazione precedente otteniamo allora

$$f(x_0) - \varepsilon \leq M \leq f(x_0) + \varepsilon,$$

da cui  $f(x_0) \geq M - \varepsilon$ . Dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$  segue che  $f(x_0) = M$ .  
Q.E.D.

*Concluso il nostro studio delle funzioni continue, è giunto il momento di avvicinarci al calcolo differenziale. Cominciamo dunque a introdurre il fondamentale concetto di derivata di una funzione.*

Supponiamo di avere una funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , e di voler capire come è fatto il suo grafico: questo può avere un notevole interesse applicativo, per esempio se vogliamo massimizzare o minimizzare una quantità fisica rappresentata da  $f$ .

Se guardiamo il grafico di una funzione “a caso” (che sia però abbastanza regolare: supponiamo che il grafico sia una linea continua e senza spigoli vivi), ci accorgiamo che ci sarebbe estremamente utile saper identificare i tratti “in salita” e i tratti “in discesa” del grafico della funzione! Per far questo, abbiamo bisogno di una definizione di *pendenza del nostro grafico in un punto*.

Se la funzione è un polinomio di primo grado, cioè se  $f(x) = mx + q$ , il grafico è una retta e la risposta è facilissima: la pendenza del grafico (in senso “stradale”: rapporto tra quanto si sale e quanto ci si sposta in orizzontale!)

è data *dal coefficiente angolare*  $m$ . In sostanza, per chi si sposta da sinistra verso destra, se  $m > 0$  il grafico è in “salita”, se  $m = 0$  è “piano” e se  $m < 0$  è in “discesa”!

Se prendiamo però una funzione il cui grafico non sia una retta, la pendenza non sarà più costante, ma potrà cambiare da punto a punto. Se però prendiamo due punti *abbastanza vicini* sulla retta reale,  $x_0$  e  $x_0 + h$ , è ragionevole pensare che la “pendenza” del grafico di  $f$  in  $x_0$  (qualunque cosa questo significhi!), sia vicina alla pendenza della retta che passa per i due punti corrispondenti sul grafico,  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_0 + h, f(x_0) + h)$ . Tale pendenza è data dall’espressione

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

detta “rapporto incrementale”.

E’ ragionevole supporre che prendendo  $h$  sempre più piccolo (e quindi i due punti sempre più vicini), avremo un’approssimazione sempre migliore della pendenza del grafico di  $f$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$ . Diamo dunque la seguente

*DEFINIZIONE:* La pendenza del grafico di  $f$  per  $x = x_0$  si chiama derivata di  $f$  in  $x_0$  e si indica con  $f'(x_0)$ . Essa si definisce ponendo

$$f'(x_0) =_{def} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

*purché il limite esista finito.*

*Se il limite non esiste o è infinito, non è definita la pendenza e diciamo che la funzione non è derivabile in  $x_0$ .*

In particolare, se  $f'(x_0)$  esiste, la *retta tangente* al grafico di  $f$  per  $x = x_0$  sarà la retta passante per  $(x_0, f(x_0))$  la cui pendenza coincide con quella del grafico stesso: essa avrà dunque equazione  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

Passiamo ad un esempio che mostra la potenza della nozione di derivata. Consideriamo la funzione  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ : si tratta di un polinomio di terzo grado, un oggetto non tanto complicato il cui grafico non è comunque facile da indovinare!

Calcoliamo il rapporto incrementale di  $f$  (pendenza media del grafico) tra  $x_0$  e  $x_0 + h$ : troviamo

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 6x_0^2 + 6x_0h + 2h^2 - 6x_0 - 3h,$$

e il limite di questo oggetto per  $h \rightarrow 0$  è  $f'(x_0) = 6x_0^2 - 6x_0$ . Studiando il segno di questa espressione, scopriamo che il grafico di  $f$  “è in salita” per  $x_0 < 0$ , in “discesa” tra 0 e 1, e di nuovo “in salita” per  $x_0 > 1$ ... Se calcoliamo  $f$  in 1 e in 0, e osserviamo che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  possiamo tracciare un grafico ragionevolmente preciso di  $f$ !

**Lezione del 26/10/2004 (2 ore):** Diamo altre possibili interpretazioni del rapporto incrementale e della derivata: velocità media e velocità istantanea di un corpo che si muove di moto rettilineo, velocità media e istantanea di una reazione chimica, tasso di interesse (o tasso di aumento dell'inflazione...).

Un risultato assai semplice ma importante è il seguente

*TEOREMA:* Se  $f$  è una funzione definita in un intorno di  $x_0$  derivabile in  $x_0$ , allora  $f$  è anche continua in  $x_0$ .

*Dimostrazione:* Si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h = 0.$$

Infatti, nell'ultima espressione la frazione tende a  $f'(x_0)$ , mentre il fattore  $h$  tende a 0.

Q.E.D.

Osserviamo che il viceversa non è vero: una funzione può essere continua ma non derivabile in un punto, come ad esempio la funzione  $f(x) = |x|$  in 0.

Come abbiamo fatto con i limiti, possiamo chiederci cosa sia la derivata della somma, del prodotto o del rapporto di due funzioni:

*TEOREMA (Algebra delle derivate):* Siano  $f(x)$ ,  $g(x)$  due funzioni definite in un intorno di  $x_0$ , derivabili in  $x_0$ .

- (i) La somma di  $f$  e  $g$  è derivabile in  $x_0$ , e  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ ;
- (ii) Il prodotto di  $f$  e  $g$  è derivabile in  $x_0$ , e  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ ;
- (iii) se  $g(x_0) \neq 0$ , allora  $f/g$  è derivabile in  $x_0$  e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

*Dimostrazione:* Dimostriamo per esempio la (ii): le altre due formule sono lasciate per esercizio.

Abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\ & \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0 + h) + f(x_0)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\ & \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} g(x_0 + h) + f(x_0) \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \end{aligned}$$

e passando al limite per  $h \rightarrow 0$  (tenendo conto anche della continuità delle funzioni derivabili) si ottiene (ii).

Q.E.D.

Usando queste semplici regole, e la stessa definizione di derivata, verifichiamo senza difficoltà che  $(x^n)' = nx^{n-1}$  per  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$ ,  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$ ,  $(e^x)' = e^x$  (e analogamente  $(a^x)' = a^x \log a$ ),  $(\log x)' = \frac{1}{x}$ .

Vediamo ora come si deriva una funzione composta:

*TEOREMA (Chain Rule):* Sia  $f$  una funzione definita in un intorno di  $x_0$ , derivabile in  $x_0$ , e sia  $g$  una funzione definita in un intorno di  $y_0 = f(x_0)$ , derivabile in  $y_0$ . Allora la funzione composta  $g \circ f(x) = g(f(x))$  è derivabile in  $x_0$  e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

*Dimostrazione:* Introduciamo la seguente funzione ausiliaria, definita in un intorno di 0:

$$A(k) = \begin{cases} \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} & \text{se } k \neq 0, \\ g'(y_0) & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Evidentemente, questa funzione è *continua in 0*, per definizione di derivata.

Costruiamo ora il rapporto incrementale della funzione  $g \circ f$ , e passiamo al limite per  $h \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} &= \\ A(f(x_0 + h) - f(x_0)) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &\rightarrow g'(f(x_0))f'(x_0). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Usando questa formula possiamo calcolarci altre derivate. Per esempio, se  $x > 0$  e  $a \in \mathbf{R}$  abbiamo:  $(x^a)' = (e^{a \log x})' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$ .

Analogamente

$$(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \log f(x)})' = \dots$$

Ci poniamo ora la questione della derivabilità dell'inversa di una funzione derivabile(ed invertibile).

*TEOREMA (Derivata della funzione inversa):* Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua e strettamente crescente,  $g : (c, d) \rightarrow (a, b)$  la sua inversa (con  $c = f(a)$ ,  $d = f(b)$ ). Se  $f$  è derivabile in  $x_0 \in (a, b)$  e  $f'(x_0) \neq 0$ , allora  $g$  è derivabile in  $y_0 = f(x_0)$ , e  $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$ . In altre parole,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

*Dimostrazione:* Osserviamo che se *sapessimo già* che la funzione inversa  $g$  è derivabile in  $y_0$ , la formula per la derivata di  $g$  sarebbe facilissima da trovare. Infatti  $g(f(x)) = x$ , e derivando ambo i membri si ha  $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1$ , da cui la formula voluta.

Siccome però non sappiamo che  $g$  è derivabile in  $y_0$ , dobbiamo proprio trovare il limite del rapporto incrementale  $(g(y_0 + h) - g(y_0))/h$  per  $h \rightarrow 0$ .

Se poniamo  $y_0 + h = f(x_0 + k)$ , applicando la  $g$  ad ambo i membri troviamo  $g(y_0 + h) = x_0 + k = g(y_0) + k$ , da cui  $g(y_0 + h) - g(y_0) = k$ . Siccome sappiamo che con le nostre ipotesi la funzione inversa  $g$  è continua, vediamo che quando  $h \rightarrow 0$  anche  $k \rightarrow 0$ . Dunque

$$g'(y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{f(x_0 + k) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Q.E.D.

**Lezione del 29/10/2004 (2 ore):** Utilizziamo il teorema di derivazione della funzione composta per trovare la derivata di  $\arcsin y$ :

$$\begin{aligned} (\arcsin y)' &= \frac{1}{(\sin)'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos \arcsin y} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}. \end{aligned}$$

In maniera del tutto analoga troviamo che  $(\arccos y)' = -1/\sqrt{1 - y^2}$ , e che  $(\arctan y)' = 1/(1 + y^2)$  (per quest'ultima formula, si ricordi l'identità  $\cos^2 \alpha = 1/(1 + \tan^2 \alpha)$ ).

Ora abbiamo a disposizione un arsenale di risultati sufficiente a calcolare le derivate di tutte le funzioni esprimibili in termini di funzioni elementari tramite operazioni algebriche e di composizione. Quindi, in linea di principio, siamo in grado di studiare l'andamento di un gran numero di funzioni studiando il segno delle loro derivate.

Per determinare in modo più accurato l'andamento del grafico di una funzione, è utile saper trovare gli intervalli di concavità e di convessità del grafico stesso: bisogna cioè saper determinare se, in un certo intervallo, la funzione "fa la pancia" verso il basso o verso l'alto....

Cominciamo con una definizione rigorosa di convessità *per una funzione derivabile*: in realtà, si può dare una definizione più generale, valida anche per funzioni non derivabili.

*Definizione:* Diciamo che una funzione derivabile  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è *convessa sull'intervallo*  $[a, b]$  se il grafico di  $f$  giace tutto al di sopra di ogni retta

tangente al grafico stesso, condotta per un punto qualunque di  $[a, b]$ . Con linguaggio simbolico, vogliamo che per ogni  $x_0 \in [a, b]$  e per ogni  $x \in [a, b]$  valga

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Se vale sempre la disuguaglianza opposta, diremo che la funzione è *concava*.

Se disegniamo il grafico di una funzione convessa, osserviamo come la pendenza delle rette tangenti cresca man mano che il punto di tangenza si sposta verso destra: in effetti, questa è una caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili:

*TEOREMA:* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione derivabile. Allora  $f$  è convessa se e solo se la funzione derivata  $f'$  è *crescente* sull'intervallo  $[a, b]$ .

*Dimostrazione:* Supponiamo che  $f$  sia convessa, e prendiamo  $x_1, x_2$  in  $[a, b]$ . Per la disuguaglianza di convessità abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1), \\ f(x) &\geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2), \end{aligned}$$

disuguaglianze valide per ogni  $x \in [a, b]$ . In particolare, prendiamo  $x = x_2$  nella prima disuguaglianza,  $x = x_1$  nella seconda, e sommiamo: si ottiene

$$(f'(x_1) - f'(x_2)) \cdot (x_2 - x_1) \leq 0,$$

che è proprio la crescita della funzione derivata.

Viceversa, supponiamo che la funzione  $f'$  sia crescente e prendiamo  $x_0 \in [a, b]$ . Consideriamo la funzione derivabile  $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$ . Si ha  $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ , per cui  $g'$  è una funzione crescente che è negativa per  $x < x_0$ , mentre è positiva per  $x > x_0$ . Ne deduciamo che la funzione  $g$  ha un minimo assoluto per  $x = x_0$ . Poichè  $g(x_0) \geq 0$ , abbiamo  $g(x) \geq 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ : questa è proprio la disuguaglianza di convessità!

Q.E.D.

Grazie a questo teorema, abbiamo un comodo criterio di convessità per funzioni la cui derivata sia ancora derivabile (ossia per funzioni derivabili due volte): una funzione  $f$  derivabile due volte in un intervallo sarà *convessa* se  $f''(x) \geq 0$  per ogni  $x$  nell'intervallo, sarà invece *concava* se  $f''(x) \leq 0$  in ogni punto  $x$  dell'intervallo.

Proseguiamo la lezione dimostrando due “limiti fondamentali” di cui finora ci siamo fidati senza una deduzione rigorosa: affermiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0$$

per ogni  $a > 1$  e per ogni  $b > 0$ .

Cominciamo con l'osservare che, grazie alla disuguaglianza di Bernoulli,  $a^n/\sqrt{n} = (1+(a-1))^n/\sqrt{n} \geq (1+n(a-1))/\sqrt{n} = 1/\sqrt{n} + \sqrt{n}(a-1) \rightarrow +\infty$ , e quindi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n}} = +\infty$ .

Si ha poi, per  $x > 0$ ,

$$\frac{a^x}{\sqrt{x}} \geq \frac{a^{[x]}}{\sqrt{[x]+1}} = \frac{a^{[x]+1}}{a\sqrt{[x]+1}}.$$

La quantità a destra, per  $x \rightarrow +\infty$  tende a  $+\infty$  grazie al limite di successione appena visto. Ne consegue che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{\sqrt{x}} = +\infty$ . Da questo segue facilmente il primo dei due limiti fondamentali scritti sopra, in quanto

$$\frac{a^x}{x^b} = \left( \frac{a^{x/(2b)}}{\sqrt{x}} \right)^{2b} \dots$$

Per verificare il secondo "limite fondamentale", è sufficiente cambiare variabile ponendo  $y = \log x$ .

**Lezione del 2/11/2004 (2 ore):** Concludiamo il corso con un ultimo argomento, che sarà un piccolo approfondimento sulle successioni. *Preciso che questo argomento, pur essendo assai importante dal punto di vista culturale, non farà comunque parte del programma richiesto per l'esame.*

L'argomento che stiamo per introdurre chiuderà il corso in maniera "circolare": daremo infatti un'ulteriore formulazione equivalente dell'assioma di completezza dei numeri reali. Questa formulazione può essere poco più che una curiosità in  $\mathbf{R}$ , ma è gravida di importanti generalizzazioni, in quanto consente di estendere il concetto di completezza ad un contesto molto più ampio.

Comunque, nella nostra discussione avremo anche occasione di dimostrare un teorema che ci tornerà utile nel futuro: il teorema di Bolzano-Weierstrass.

**DEFINIZIONE:** Data una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ , una sua *sottosuccessione* è una nuova successione del tipo  $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbf{N}}$ , dove  $n_k$  è a sua volta una *successione strettamente crescente di numeri naturali*.

Per esempio, da una data successione si può estrarre la sottosuccessione dei termini di indice pari, dei termini di indice dispari, di quelli il cui indice è divisibile per 54...

Evidentemente, se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$ , a maggior ragione si avrà  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \ell$  per ogni sottosuccessione della prima. È però interessante notare che anche

da una successione che *non ha limite* si può estrarre una sottosuccessione che ce l'ha:

**TEOREMA (di Bolzano-Weierstrass):** Da una successione *limitata*  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  è sempre possibile estrarre una sottosuccessione  $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbf{N}}$  che ammette limite finito.

*DIM.:* Dimostriamo il teorema usando il buon vecchio metodo di bisezione. Per ipotesi, la nostra successione è limitata, cioè esiste un intervallo  $[\alpha, \beta]$  tale che  $a_n \in [\alpha, \beta]$  per ogni  $n \in \mathbf{N}$ .

Se dividiamo l'intervallo  $[\alpha, \beta]$  in due metà uguali, ce ne dovrà essere almeno una (che chiameremo  $[\alpha_1, \beta_1]$ ) tale che  $a_n \in [\alpha_1, \beta_1]$  per *infiniti* indici  $n$ . Analogamente, se dividiamo  $[\alpha_1, \beta_1]$  in due metà uguali, ce ne sarà una che chiameremo  $[\alpha_2, \beta_2]$  tale che  $a_n \in [\alpha_2, \beta_2]$  per infiniti indici  $n$ .

Proseguendo in questo modo, costruiamo una successione infinita di intervalli  $[\alpha_k, \beta_k]$ , ciascuno dei quali è una delle due metà del precedente, con la proprietà che la successione  $\{a_n\}$  cade entro  $[\alpha_k, \beta_k]$  per infiniti indici  $n$ .

Evidentemente,  $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbf{N}}$  è una successione crescente per cui esisterà

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = \ell \in [\alpha, \beta].$$

Inoltre, avremo anche  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k = \ell$  poiché  $\beta_k - \alpha_k = (\beta - \alpha)/2^k$ .

Costruiamo una sottosuccessione  $\{a_{n_k}\}$  di  $\{a_n\}$  nel modo seguente: come  $n_1$  prendiamo il più piccolo indice  $n$  per cui  $a_n$  appartiene a  $[\alpha_1, \beta_1]$ , come  $n_2$  il più piccolo indice  $n > n_1$  per cui  $a_n \in [\alpha_2, \beta_2]$  (esisterà certamente: di indici siffatti ce ne sono infiniti per costruzione di  $[\alpha_2, \beta_2]$ )... Proseguiamo allo stesso modo:  $n_k$  sarà il più piccolo indice  $n > n_{k-1}$  per cui  $a_n \in [\alpha_k, \beta_k]$ .

In questo modo, avremo individuato una sottosuccessione  $\{a_{n_k}\}$  di  $\{a_n\}$  tale che  $\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$  per ogni  $k$ . Grazie al teorema dei carabinieri, si avrà quindi  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \ell$ . Q.E.D.

Ci poniamo ora il seguente problema: data una generica successione  $\{a_n\}$ , come possiamo riconoscere se essa possiede o meno un limite finito?

Usare la definizione di limite di una successione non sempre è facile: il problema è che dobbiamo *conoscere il valore  $\ell$  del limite*. Che fare se non riusciamo a calcolarlo? Inoltre, per mostrare che una successione *non* ammette limite, dovremmo far vedere che la definizione di limite non è verificata per *nessun candidato limite  $\ell \in \mathbf{R}$* .

C'è però un semplice "test di convergenza" che ci permette di dire se una successione possiede un limite finito: precisamente, il limite finito c'è se e soltanto se la successione è di Cauchy.

**DEFINIZIONE:** Una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  si dice *di Cauchy* se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un indice  $\bar{n} \in \mathbf{N}$  tale che

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}, \forall m \geq \bar{n}.$$

**TEOREMA:** Una successione  $\{a_n\}$  ammette limite finito se e soltanto se essa è di Cauchy.

**DIM.:** Mostriamo la prima implicazione: supponiamo che esista  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in \mathbf{R}$ , e mostriamo che la nostra successione è di Cauchy.

Per definizione di limite, esiste  $\bar{n} \in \mathbf{N}$  tale che  $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Se ora  $m, n \geq \bar{n}$ , grazie alla disuguaglianza triangolare avremo

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

e la nostra successione è di Cauchy.

Il viceversa è decisamente più complicato da dimostrare: facciamo vedere che se  $\{a_n\}$  è una successione di Cauchy, allora essa ammette un limite finito  $\ell$ .

Cominciamo con l'osservare che una successione di Cauchy è *limitata*: usiamo la definizione di successione di Cauchy con  $\varepsilon = 1$ . Allora, per  $m$  e  $n$  maggiori o uguali a un certo indice  $\nu$  avremo  $|a_m - a_n| < 1$ . In particolare, se prendiamo  $m = \nu$  otteniamo

$$a_\nu - 1 < a_n < a_\nu + 1 \quad \forall n \geq \nu,$$

e la nostra successione è limitata (a rigore, dalla nostra disuguaglianza rimangono fuori i termini della successione di indice minore di  $\nu$ , ma essi sono in numero finito e non possono certo renderla illimitata!).

Dunque,  $\{a_n\}$  è limitata e possiamo applicare il teorema di Bolzano-Weierstrass: esiste una sottosuccessione  $\{a_{n_k}\}$  tale che  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \ell \in \mathbf{R}$ .

Dico che in realtà *tutta la successione*  $a_n$ , e non solo la sua sottosuccessione  $a_{n_k}$ , tende a  $\ell$ . Prendiamo  $\varepsilon > 0$ . Per definizione di successione di Cauchy, troviamo  $\bar{n}$  tale che per  $m, n \geq \bar{n}$  si abbia  $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ . D'altra parte, per definizione di limite troviamo  $\bar{k}$  tale che  $|a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$  per ogni  $k \geq \bar{k}$ .

Evidentemente, non è restrittivo supporre che  $\bar{k}$  sia tanto grande che  $n_{\bar{k}}$  sia maggiore o uguale a  $\bar{n}$  (se così non fosse, basterà sostituire  $\bar{k}$  con un valore opportunamente più grande). Allora, se  $n > n_{\bar{k}}$  avremo

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - a_{n_{\bar{k}}}| + |a_{n_{\bar{k}}} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Q.E.D.

*OSSERVAZIONE:* Il teorema appena dimostrato può essere preso come *formulazione equivalente dell'assioma di completezza*.

Ci si convince subito che in  $\mathbf{Q}$  esistono delle successioni di Cauchy che non convergono ad alcun numero razionale (perché esse, se le si guarda come successioni reali, convergono ad un numero irrazionale!). Si noti che l'altra metà del teorema è invece vera anche in  $\mathbf{Q}$ : ogni successione convergente è di Cauchy.

Nel dimostrare che ogni successione di Cauchy in  $\mathbf{R}$  converge ad un limite finito, abbiamo fatto uso dell'assioma di completezza di  $\mathbf{R}$  (dove?). Viceversa, se assumiamo *come assioma* che ogni successione di Cauchy converge, possiamo mostrare che vale l'assioma di completezza in qualche altra sua formulazione: per esempio, possiamo mostrare che ogni insieme non vuoto ed inferiormente limitato ammette estremo inferiore in  $\mathbf{R}$  (Questo è relativamente facile. Nella seconda lezione del corso (quella del 23 settembre), abbiamo escogitato un algoritmo per identificare l'inf come numero decimale infinito: non è difficile verificare che la successione di decimali finiti trovata con quell'algoritmo è una successione di Cauchy!).

La formulazione dell'assioma di completezza tramite le successioni di Cauchy, non è particolarmente "conveniente" per quanto riguarda i numeri reali (anche se ci tornerà utile sapere che le successioni di Cauchy convergono).

Essa si presta però particolarmente bene ad essere generalizzata a situazioni più complicate. Il vantaggio principale è che nella definizione di successione di Cauchy non c'è bisogno di sapere che  $\{a_n\}$  vive *in un insieme ordinato*. Per questo motivo, l'assioma di completezza viene formulato in questo modo negli spazi funzionali, o negli spazi metrici in genere.