

Un'introduzione allo studio qualitativo delle soluzioni di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

Sisto Baldo

Quello che segue è il testo di una lezione di due ore accademiche, organizzata presso la Facoltà di Scienze M.F.N. nel quadro del progetto di orientamento per gli studenti della Scuola Superiore. La lezione è in programma per il 18 dicembre 2003, ed è destinata a studenti del quinto anno dell'ITIS Marconi di Rovereto.

Si tratta sostanzialmente di una riproposizione del materiale preparato l'anno scorso per un'occasione simile (consultabile in questo sito). Si è però tenuto conto del fatto che gli allievi dell'ITIS Marconi posseggono, in generale, buone nozioni di base sulle equazioni differenziali: per questo motivo ho scelto di tagliare un po' la discussione iniziale, a favore di un maggiore approfondimento di alcuni dei concetti esposti.

La parte di esercizi, da somministrare agli studenti alla fine della lezione, è stata invece sostanzialmente rivista.

In questa lezione, vogliamo mostrare come a volte sia possibile ottenere informazioni molto precise sulle soluzioni di un'equazione differenziale ordinaria senza bisogno di risolverla esplicitamente.

La cosa è interessante perché ci sono moltissime equazioni differenziali per cui una soluzione esplicita è impossibile. È ben vero che è sempre possibile trovare delle soluzioni approssimate al calcolatore, ma non sempre è agevole estrarne delle chiare informazioni qualitative sull'evoluzione temporale di un fenomeno. Per non allontanarci troppo dalla realtà, sarà bene cominciare con un esempio concreto.

Supponiamo di trovarci in un laboratorio di microbiologia, e di avere una capsula di vetro contenente un brodo di coltura (cioè una soluzione di sostanze nutrienti che favoriscano lo sviluppo di una certa specie di microorganismi). Il nostro esperimento consiste nell'introdurre nella soluzione un certo numero iniziale y_0 di batteri (tutti uguali), per poi osservare l'evoluzione della colonia nei tempi successivi. Vogliamo cioè studiare la funzione $y(t)$ che rappresenta il numero di batteri presenti nella capsula all'istante t . Per comodità, decidiamo che l'istante $t = 0$ corrisponde all'inizio dell'esperimento.

I batteri si riproducono per divisione cellulare: a un certo punto, se le condizioni sono favorevoli, la cellula che costituisce il microorganismo si suddivide, dando luogo a due individui identici. Anche se il fenomeno che stiamo

descrivendo è di natura essenzialmente discreta (il numero di batteri è intero!), assumeremo al contrario che la funzione $y(t)$ vari con continuità: in sostanza, è come se stessimo tenendo conto anche di suddivisioni “parziali” di ogni batterio.

Denotiamo con α il “tasso di suddivisione pro capite” della nostra specie di batteri: α rappresenta il *numero (medio) di suddivisioni che un individuo subisce nell’unità di tempo*.

Se consideriamo un breve intervallo temporale, compreso tra gli istanti t_0 e $t_0 + h$, e se scegliamo h tanto piccolo che sia improbabile che un batterio abbia modo di suddividersi più di una volta, vediamo subito che $y(t_0 + h) = (1 + \alpha h)y(t_0)$ ¹, ossia

$$\frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h} = \alpha y(t_0).$$

Se poi facciamo tendere h a 0, otteniamo l’equazione $y'(t_0) = \alpha y(t_0)$, valida qualunque sia t_0 .

Se ne deduce che la funzione $y(t)$ che rappresenta l’evoluzione della nostra colonia (almeno in questa prima, grezza approssimazione), soddisfa le seguenti due condizioni:

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) & \text{(equazione differenziale)} \\ y(0) = y_0 & \text{(condizione iniziale)} \end{cases}$$

Il problema di trovare una funzione $y(t)$ che soddisfa sia l’*equazione differenziale* (che è semplicemente un’equazione che prescrive un legame tra una certa funzione incognita e le sue derivate), che la *condizione iniziale*, è noto come *problema di Cauchy*.

In questo caso non è difficile “indovinarne” la soluzione. Se avessimo $\alpha = 1$, l’equazione differenziale diventerebbe $y'(t) = y(t)$, cioè staremmo cercando una funzione che è *uguale alla sua derivata*. Una funzione siffatta la conosciamo: è la funzione $y(t) = e^t$ (oppure, volendo, un suo multiplo). Se poi $\alpha \neq 1$, facendo un po’ di prove si vede che le funzioni del tipo $y(t) = Ce^{\alpha t}$ sono tutte soluzioni dell’equazione data. Tra queste, quella che soddisfa la condizione iniziale è

$$y(t) = y_0 e^{\alpha t}.$$

¹Infatti, degli $y(t_0)$ batteri presenti all’inizio, una frazione pari a $\alpha h y(t_0)$ giunge a suddividersi, dando luogo ad altrettanti nuovi individui. Se però il singolo batterio avesse il tempo di suddividersi due volte nell’intervallo temporale, l’espressione che abbiamo scritto sottostimerebbe grossolanamente il numero finale di organismi: infatti, ognuno dei *due* individui nati da ogni cellula nella prima suddivisione, si suddividerebbe nuovamente generando *quattro* nuove cellule!

In altre parole, abbiamo scoperto che la nostra colonia di batteri si espande in maniera esponenziale!

È realistico? Non troppo, almeno sui tempi lunghi. Infatti, quando i batteri diventano troppi, le risorse nutritive contenute nel brodo di coltura tenderanno ad impoverirsi, e con ogni probabilità il tasso riproduttivo pro-capite α calerà! In prima approssimazione, possiamo dire che la velocità di riproduzione pro-capite della colonia, data da $y'(t)/y(t)$, calerà in modo direttamente proporzionale al numero di batteri presenti $y(t)$: otteniamo così l'equazione *logistica*

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha - \beta y(t)$$

(con $0 < \beta \ll \alpha$). Questa equazione ci dice anche che se ci sono troppi batteri, il tasso di riproduzione diventa negativo: i nostri microorganismi, invece di riprodursi, cominceranno a morire!

Il problema di Cauchy per l'equazione logistica sarà

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) - \beta y^2(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (P)$$

In questo caso *non è affatto facile indovinare la soluzione!* In realtà, con tecniche non eccessivamente complicate che probabilmente sono alla portata dell'uditorio (separazione delle variabili...), si potrebbe scoprire che

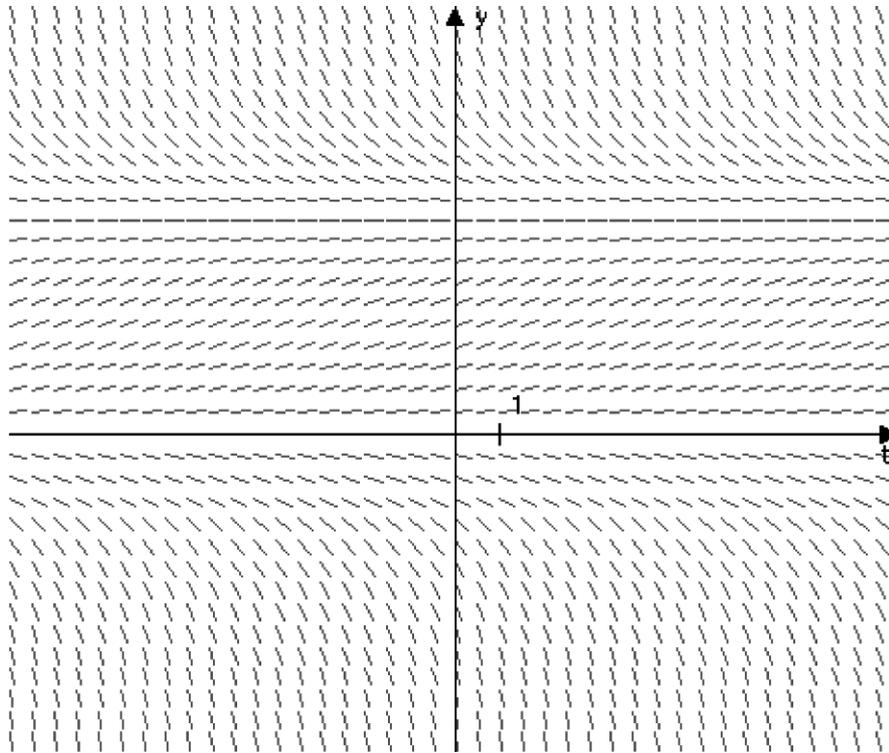
$$y(t) = \frac{\alpha y_0}{\beta y_0 + (\alpha - \beta y_0)e^{-\alpha t}}.$$

Notiamo però che anche possedendo questa *soluzione esplicita*, ci aspetterebbe un po' di lavoro supplementare per estrarne le caratteristiche qualitative che ci interessano!

Che aspetto avranno le soluzioni dell'equazione logistica $y'(t) = \alpha y(t) - \beta y^2(t)$ (per il momento, ignoriamo la condizione iniziale)?

Innanzitutto, cerchiamo di chiarire il significato geometrico dell'equazione stessa. Essa ci dice che se il *grafico di una soluzione* $y(t)$ passa per il punto (\bar{t}, \bar{y}) del piano cartesiano ty (cioè, se $y(\bar{t}) = \bar{y}$), allora in quel punto la *pendenza del grafico stesso*² è uguale a $\alpha \bar{y} - \beta \bar{y}^2$... In altre parole, il secondo membro dell'equazione determina nel piano ty un *campo di direzioni* al quale le *soluzioni dell'equazione devono essere tangenti*.

²Per "pendenza del grafico di $y(t)$ nel punto t , intendiamo il coefficiente angolare della tangente al grafico in quel punto.



In sostanza, la soluzione del nostro problema di Cauchy (P) sarà quell'(unica) funzione $y(t)$ il cui grafico passa per il punto iniziale $(0, y_0)$, ed è tangente al dato campo di direzioni in ogni punto.

A questo punto dovrebbe essere chiaro che, al fine di studiare il comportamento qualitativo della soluzione di (P) al variare del dato iniziale y_0 , sarà utile un'analisi del secondo membro dell'equazione logistica, cioè della funzione di una variabile $f(y) = \alpha y - \beta y^2$. Infatti, $f(\bar{y})$ rappresenta la pendenza del grafico di una qualunque soluzione della nostra equazione differenziale, nei punti in cui essa ha altezza \bar{y} , ossia in tutti i punti del piano ty della forma (t, \bar{y}) . In particolare, vediamo subito che

$$f(y) \begin{cases} < 0 & \text{se } y < 0 \text{ oppure } y > \alpha/\beta, \\ = 0 & \text{se } y = 0 \text{ oppure } y = \alpha/\beta, \\ > 0 & \text{se } 0 < y < \alpha/\beta. \end{cases}$$

Poiché, come ben sappiamo, il segno della derivata permette di stabilire la crescita o decrescenza di una funzione, ne deduciamo che le soluzioni dell'equazione logistica saranno *strettamente crescenti* quando il loro grafico passa nella striscia

$$S_1 = \{(t, y) : 0 < y < \alpha/\beta\},$$

mentre sono *strettamente decrescenti* all'interno dei semipiani

$$S_2 = \{(t, y) : y < 0\}, \quad S_3 = \{(t, y) : y > \alpha/\beta\}.$$

Altrettanto importante, le soluzioni hanno tangente orizzontale sulle rette $y = 0$ e $y = \alpha/\beta$: se ne deduce subito che le funzioni costanti $y(t) = 0$ e $y(t) = \alpha/\beta$ sono soluzioni dell'equazione che stiamo studiando³ (più precisamente, sono le sole soluzioni costanti)!

Per proseguire nel nostro studio qualitativo, è importante conoscere la seguente informazione teorica, che deriva da un importante *Teorema di esistenza e unicità locale* che enunceremo più avanti:

Proprietà fondamentale delle soluzioni dell'equazione logistica: *Per ogni punto del piano ty passa una ed una sola soluzione dell'equazione logistica. In particolare, due soluzioni distinte dell'equazione non possono mai incrociarsi.*

Inoltre, per ogni soluzione dell'equazione si danno due possibilità: o $y(t)$ è definita per ogni t reale, oppure il grafico di $y(t)$ ha un asintoto verticale (cioè $y(t)$ tende a $\pm\infty$ quando t si avvicina a un certo valore \bar{t}).

Ne deriva che le due soluzioni costanti $y(t) = 0$ e $y(t) = \alpha/\beta$ costituiscono una *barriera invalicabile* per tutte le altre soluzioni dell'equazione. In particolare:

- Se $0 < y_0 < \alpha/\beta$, la soluzione rimane confinata nella striscia S_1 , e sarà dunque sempre crescente.
- Se $y_0 < 0$ o $y_0 > \alpha/\beta$, la soluzione rimane confinata rispettivamente nei semipiani S_2 e S_3 , e sarà quindi decrescente.

Visto che y_0 rappresenta il numero iniziale di batteri nella nostra capsula di vetro, ci interessano solo i casi (i) $0 < y_0 < \alpha/\beta$ e (ii) $y_0 > \alpha/\beta$.

- **(i):** $0 < y_0 < \alpha/\beta$ In questo caso il numero $y(t)$ di batteri resta compreso tra 0 e α/β , e cresce sempre perché la derivata è positiva. Evidentemente, asintoti verticali non ce ne possono essere perché la funzione si mantiene limitata.

Quindi, esso tenderà necessariamente ad un certo valore $y_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.

Graficamente, la retta $y = y_\infty$ è un asintoto orizzontale della soluzione $y(t)$.

³Nel quadro del nostro esperimento di biologia, questo significa che se partiamo con 0 batteri rimarremo sempre con 0 batteri, ma anche (cosa meno ovvia!) che se partiamo con α/β batteri, la popolazione rimane costante: α/β rappresenta un livello di equilibrio per la nostra colonia.

Affermo che si ha necessariamente $y_\infty = \alpha/\beta$, cioè la popolazione di batteri tende al livello di equilibrio.

Supponiamo infatti per assurdo che si abbia $y_\infty < \alpha/\beta$. Allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(y(t)) = f(y_\infty) > 0,$$

per cui la derivata della soluzione tenderebbe ad un limite strettamente positivo. D'altra parte, è facile convincersi che se una funzione ha un asintoto orizzontale e la derivata della funzione ammette limite per $t \rightarrow +\infty$, allora necessariamente questo limite è 0. L'unico modo di sfuggire a questo assurdo è supporre $y_\infty = \alpha/\beta$, come volevasi dimostrare.

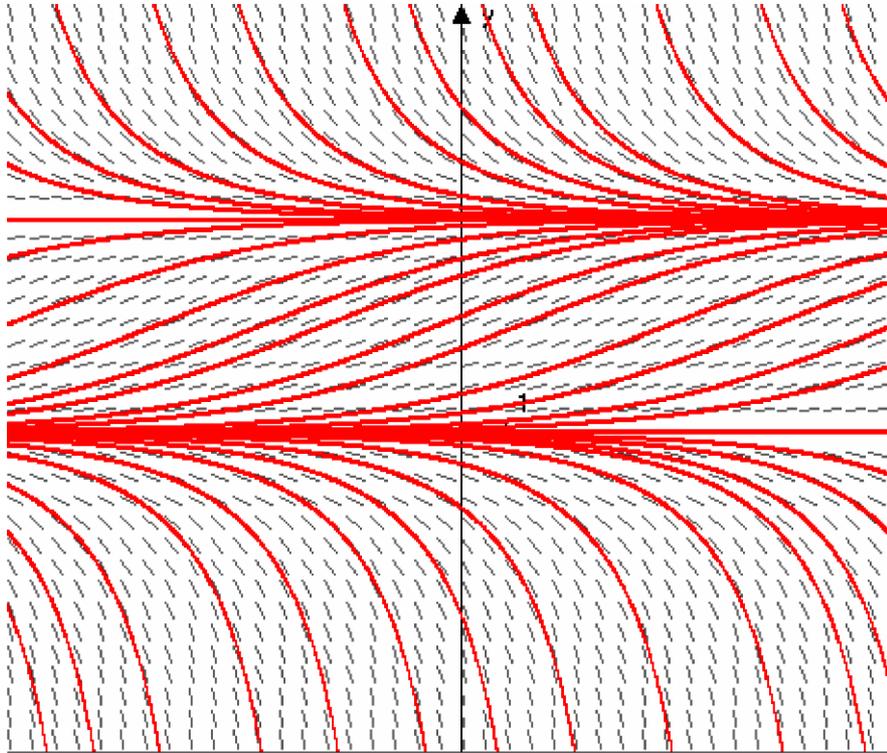
- **(ii):** $y_0 > \alpha/\beta$ In questo caso la soluzione è decrescente, e deve restare sopra il livello di equilibrio α/β . Anche in questo caso, la soluzione rimarrà limitata per tempi positivi⁴. Ragionando esattamente come prima, si deduce che anche in questo caso la colonia tende asintoticamente al livello di equilibrio.

CONCLUSIONE: Studiando il comportamento delle soluzioni del problema (P), abbiamo scoperto una cosa non ovvia: *qualunque sia* il numero iniziale di batteri y_0 immesso nella colonia, essa tende a stabilizzarsi sulla popolazione di equilibrio $y = \alpha/\beta$.

Maggiori informazioni sull'andamento qualitativo delle soluzioni di (P) si possono ottenere per esempio studiando il segno della loro derivata seconda: derivando l'equazione otteniamo $y''(t) = \alpha y'(t) - 2\beta y(t)y'(t) = (\alpha - 2\beta y(t))(\alpha y(t) - \beta y(t)^2)$. Se ne deduce che le soluzioni sono convesse in S_3 , concave in S_2 . Invece, nella striscia S_1 esse cambiano concavità: si ha infatti un flesso nei punti in cui $y = \frac{\alpha}{2\beta}$.

Alcune soluzioni di (P) sono mostrate nella seguente figura:

⁴Invece, non possiamo escludere che la soluzione abbia un asintoto verticale per tempi negativi. In effetti, ce l'ha (anche se non è facile dedurlo da uno studio qualitativo).



Per concludere la nostra chiacchierata, dobbiamo tornare su quella che abbiamo chiamato *Proprietà fondamentale delle soluzioni di (P)*. Essa deriva dal seguente, basilare risultato teorico:

Teorema di esistenza e unicità locale: *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

dove $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione derivabile con derivata continua. Allora, per ogni scelta del punto iniziale (t_0, y_0) esiste un'unica soluzione del problema, e tale soluzione è definita in un certo intervallino centrato in t_0 .

Da questo teorema segue subito la “proprietà fondamentale”: intanto, per qualunque punto iniziale c'è una soluzione, e quindi è possibile trovare una soluzione che passa per *ogni* fissato punto del piano. Se poi per assurdo due soluzioni si incrociassero in un certo punto (\bar{t}, \bar{y}) , il problema di Cauchy con *quel punto iniziale* avrebbe due soluzioni distinte, mentre il nostro teorema afferma che la soluzione è unica!

Inoltre, se la soluzione esiste *solo a sinistra* (o a destra) di un certo tempo \bar{t} , deve tendere a $\pm\infty$ per $t \rightarrow \bar{t}^-$ (rispettivamente $t \rightarrow \bar{t}^+$): in caso contrario, potremmo applicare ancora il teorema di esistenza locale a partire dal

“punto in cui siamo arrivati”, e prolungare la soluzione ancora per un po’!

Osservazione 1: Il teorema richiede la derivabilità della funzione f , anche se nell’enunciato del problema di Cauchy la derivata di f non appare da nessuna parte. Il punto è che se f è soltanto una funzione continua, è *ancora vero* che esiste una soluzione definita in un intorno di t_0 , ma tale soluzione *in generale non è unica*. Ad esempio, nell’esercitazione che seguirà questa lezione vedremo che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ammette *infinite* soluzioni.

Osservazione 2: Il teorema di esistenza e unicità locale *non* dice che l’(unica) soluzione è definita *per ogni* t .

Non lo dice per la semplice ragione che questo è (in generale) falso! Nell’esercitazione vedremo un caso in cui la soluzione effettivamente, **NON** è definita per ogni t , ma solo in un certo intervallo che contiene il punto iniziale.

In realtà, questo succede anche per l’equazione logistica: se prendiamo un dato iniziale $y_0 < 0$, la soluzione del problema (P) è decrescente, e tende a $-\infty$ *in tempo finito*, ossia il suo grafico ha un asintoto verticale (dopo il quale, evidentemente, la soluzione non c’è più).

Si noti che questo comportamento non è deducibile da uno studio puramente qualitativo dell’equazione (anche se può essere dedotto senza risolvere l’equazione, come faremo vedere tra un momento).

Fortunatamente, nei casi di interesse “biologico” siamo stati in grado di dire tutto sulle soluzioni: la nostra fortuna è stata che ci interessavano solo soluzioni *con dato iniziale y_0 positivo*, e per *tempi positivi*⁵.

Può essere istruttivo far vedere come si possa dimostrare che una soluzione con $y_0 < 0$ *non* è definita per ogni t positivo, ma ha un asintoto verticale: ancora una volta, lo mostriamo *senza* risolvere l’equazione.

Cominciamo scrivendo l’equazione nella forma $1 = y'(t)/(\alpha y(t) - \beta y^2(t))$. Se integriamo ambo i membri di questa espressione tra 0 e t , e cambiamo variabile, otteniamo

$$t = \int_0^t \frac{y'(t)dt}{\alpha y(t) - \beta y^2(t)} = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\alpha y - \beta y^2} = \int_y^{y_0} \frac{dy}{\beta y^2 - \alpha y}.$$

Nel secondo passaggio, abbiamo usato la condizione iniziale $y(0) = y_0$.

⁵Anche se prendiamo $y_0 > 0$, la soluzione non è prolungabile all’infinito per tempi negativi: essa tende a $+\infty$ in tempo finito!

Come interpretare questa espressione? Essa ci dice che il tempo $t(y)$ necessario alla soluzione per decrescere dal valore iniziale y_0 ad un generico valore $y < y_0$ è dato dall'ultimo integrale:

$$t(y) = \int_y^{y_0} \frac{dy}{\beta y^2 - \alpha y}.$$

Ora, il calcolo dell'integrale è fattibile, ma non facilissimo (eseguirlo ci consentirebbe tra l'altro di scrivere la soluzione esplicita del problema di Cauchy): notiamo però che $1/(\beta y^2 - \alpha y) < 1/(\beta y^2)$, grazie al fatto che $y < 0$. Dunque

$$t(y) < \int_y^{y_0} \frac{dy}{\beta y^2} = \left[-\frac{1}{y} \right]_y^{y_0} = \frac{1}{\beta y} - \frac{1}{\beta y_0}.$$

Facciamo tendere $y \rightarrow -\infty$ (e indichiamo di conseguenza $t(-\infty)$ il tempo necessario perché la soluzione diverga a $-\infty$): otteniamo subito

$$t(-\infty) \leq -\frac{1}{\beta y_0},$$

cioè alla nostra soluzione *basta un tempo finito per divergere*: essa possiede dunque un asintoto verticale.

In maniera del tutto analoga, si dimostra che le soluzioni con $y_0 > \frac{\alpha}{\beta}$ hanno un asintoto verticale per tempi negativi.

Osservazione 3: Esiste una versione del teorema di esistenza e unicità locale per equazioni un po' più generali, in cui il secondo membro dipende esplicitamente dal tempo t :

Teorema di esistenza e unicità locale: *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

dove $f(t, y)$ è una funzione di due variabili continua (per semplicità, su tutto il piano ty), derivabile parzialmente rispetto a y con derivata continua. Allora, per ogni scelta del punto iniziale (t_0, y_0) esiste un'unica soluzione del problema, e tale soluzione è definita in un certo intervallino centrato in t_0 .