

# Appunti del Corso di Didattica della Matematica I per la SSIS

Docente: Sisto Baldo

*Gli appunti che seguono contengono un breve sunto degli argomenti di cui si è discusso a lezione, con qualche esercizio, suggerimenti e un po' di bibliografia.*

**Lezione del 31/1/2003 (4 ore):** *I numeri reali e l'assioma di completezza di  $\mathbf{R}$ .*

Cominciamo il corso discutendo di un argomento apparentemente innocuo, ma che si rivela fonte di possibili guai nella prassi didattica della scuola superiore: i numeri reali.

Ovviamente, non se ne può fare a meno: anche una cosa “scontata” come la risoluzione delle equazioni di secondo grado non è praticabile se ci restringiamo all'insieme  $\mathbf{Q}$  dei numeri razionali! D'altra parte, l'insegnante si trova a dover scansare due opposti pericoli: da una parte, c'è il rischio di far passare un'idea *sbagliata* dei numeri reali, dall'altra si rischia di dare una *definizione formalmente ineccepibile* che però *non viene capita*.

Infatti, un rapido sondaggio tra i ragazzi delle scuole superiori su cosa siano i numeri reali conduce spesso a risposte del tipo “*I numeri reali sono TUTTI i numeri, cioè i numeri razionali E I NUMERI IRRAZIONALI*”. Per un matematico, questa risposta è composta da due metà ugualmente inaccettabili: per prima cosa, i numeri reali NON sono “tutti i numeri” perchè, se siamo disposti a rinunciare all'ordinamento, possiamo ottenere per esempio il campo  $\mathbf{C}$  dei numeri complessi che ha in più la gradevole proprietà di essere algebricamente chiuso. Non ha neanche troppo senso dire che  $\mathbf{R}$  è l'unione di  $\mathbf{Q}$  e dell'insieme dei numeri irrazionali: i numeri irrazionali vengono infatti definiti *per differenza* come  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ...è evidente la circolarità della “definizione”.

All'estremo opposto, su molti libri di testo delle superiori si trova scritto che un numero reale è *una sezione di  $\mathbf{Q}$* : questa blasonata definizione dell'insieme  $\mathbf{R}$  è perfettamente corretta, ma sono disposto a scommettere che nemmeno Dedekind, quando faceva i conti, pensava al numero  $\sqrt{2}$  come a una sezione di  $\mathbf{Q}$ ...esattamente come noi NON ce lo raffiguriamo come una classe di equivalenza di successioni di Cauchy in  $\mathbf{Q}$ !

Ma allora, qual è l'idea di numero reale che abbiamo in testa? Proviamo a incalzare gli studenti che ci hanno detto che  $\mathbf{R}$  è l'unione dell'insieme dei numeri razionali e di quello dei numeri irrazionali, e chiediamo loro *cosa sono*

*i numeri irrazionali*. In molti casi, ci sentiremo dire che sono “i numeri che non sono frazioni” (e siamo da capo...), ma con un po’ di fortuna qualcuno ci risponderà che si tratta dei “numeri che non sono periodici”. Quest’ultima risposta non è poi tanto male: contiene forse il pregiudizio che la “totalità dei numeri” corrisponda ad un’idea platonica che non richiede ulteriori spiegazioni, ma lascia anche trasparire che lo studente ha in testa un preciso *modello di  $\mathbf{R}$* : i numeri reali non sono altro che i *numeri decimali*, a patto di *ammettere che ci possano essere infinite cifre dopo la virgola!*

Secondo me, è questa l’idea che conviene far passare: i numeri decimali sono un oggetto piuttosto familiare alla maggioranza dei nostri interlocutori. Inoltre, la necessità di prendere infinite cifre dopo la virgola si presenta già in  $\mathbf{Q}$ , quando scopriamo che  $1/3 = 0, \overline{3}$ <sup>1</sup>. Ovviamente, come insegnanti dovremo essere coscienti che i numeri decimali infiniti non sono oggetti tanto semplici:

- (i) stiamo implicitamente definendo un numero reale come limite di una successione monotona di numeri razionali (precisamente, la successione di numeri razionali il cui termine  $n$ -esimo si ottiene troncando il dato numero decimale infinito all’ $n$ -esima cifra dopo la virgola)... Questo però corrisponde all’idea intuitiva che abbiamo: non è difficile convincere gli interlocutori che un numero reale si approssimi *sempre meglio* tenendo conto di un numero *via via crescente* di cifre dopo la virgola!
- (ii) ci sono inevitabili “stranezze” e “non unicità” nella scrittura decimale, che derivano essenzialmente dal fatto che  $0, \overline{9} = 1$ . Anche questo, però, non è difficile da far vedere!
- (iii) non è *per niente facile* estendere le quattro operazioni, cui siamo abituati in  $\mathbf{Q}$ , al “nuovo” insieme dei numeri decimali che possiedono eventualmente infinite cifre dopo la virgola.

Il problema più serio è certamente (iii), perché in effetti la definizione corretta delle operazioni e la verifica che l’oggetto che si ottiene gode delle proprietà di campo ordinato è piuttosto laboriosa... Pochissimi studenti si porranno però il problema (in fondo, la loro calcolatrice tascabile queste operazioni le sa eseguire...e poco importa che essa operi internamente con un numero finito di cifre!). In caso contrario, potremo sempre chiedere loro un atto di fede, oppure (in caso di un’auspicabile quanto rara resistenza) potremo far vedere per esempio come si possano ottenere le prime  $k$  cifre decimali della somma eseguendo il conto con  $k + 1$  cifre, e scartando poi l’ultima.

---

<sup>1</sup>Cioè a) la frazione  $1/3$  non è esprimibile con un numero decimale finito e b) se voglio approssimare per difetto la frazione  $1/3$  con un numero decimale con  $k$  cifre dopo la virgola, il meglio che io possa fare è scrivere  $0, 3333 \dots 3$ , dove le cifre 3 dopo la virgola sono esattamente  $k$ ...

Dopo aver introdotto in questo modo un'ensione di  $\mathbf{Q}$  che ne conserva le proprietà algebriche più gradevoli (cioè che è ancora un campo ordinato), dobbiamo far vedere che il nuovo insieme è abbastanza ampio da consentirci di calcolare la radice quadrata, e magari ci permette anche di definire esponenziale, logaritmo, funzioni trigonometriche... In altre parole, ci troviamo a dover parlare della *completezza di  $\mathbf{R}$* !

Prima di parlare degli aspetti didattici della cosa, può essere un utile ripasso PER NOI elencare alcune delle *formulazioni equivalenti dell'assioma di completezza di  $\mathbf{R}$*  che si trovano sui libri di testo della scuola e dell'università:

- (i) *Sezioni di  $\mathbf{R}$* : Se  $A, B$  sono due sottinsiemi non vuoti di  $\mathbf{R}$  tali che  $A \cup B = \mathbf{R}$  e  $a \leq b$  per ogni  $a \in A$  e per ogni  $b \in B$ , allora esiste un unico *elemento separatore* tra  $A$  e  $B$ , cioè esiste un unico  $\lambda \in \mathbf{R}$  tale che  $a \leq \lambda \leq b$  per ogni  $a \in A$  e per ogni  $b \in B$ .
- (ii) *Versione "indebolita" del precedente*: Se  $A, B$  sono sottinsiemi non vuoti di  $\mathbf{R}$  tali che  $a \leq b$  per ogni  $a \in A$  e per ogni  $b \in B$ , allora esiste un elemento separatore  $\lambda \in \mathbf{R}$  (non necessariamente unico).
- (iii) *Esistenza dell'estremo superiore*: Ogni sottinsieme di  $\mathbf{R}$  non vuoto e superiormente limitato ammette estremo superiore in  $\mathbf{R}$ .
- (iv) *Convergenza delle successioni monotone*: Se  $\{a_n\}$  è una successione crescente e superiormente limitata di numeri reali, allora essa ammette limite in  $\mathbf{R}$ , e tale limite è uguale al suo estremo superiore.
- (v) *Intervalli inscatolati*: Sia  $(a_n, b_n)$  una successione di intervalli in  $\mathbf{R}$  tali che  $(a_{n+1}, b_{n+1}) \subset (a_n, b_n)$  per ogni  $n$ , e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0.$$

Allora esiste uno ed un solo punto  $\lambda \in \mathbf{R}$  comune a tutti gli intervalli.

- (vi) *Convergenza delle successioni di Cauchy*: Una successione di Cauchy  $\{a_n\} \subset \mathbf{R}$  possiede sempre limite reale.

Per mostrare l'equivalenza di tutte queste versioni dell'assioma di completezza, cominciamo con un esercizio di riscaldamento non troppo difficile...

*ESERCIZIO*: Mostrare che  $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v)$

*Mostriamo poi che  $(v) \Rightarrow (i)$* : quest'implicazione è leggermente meno semplice delle altre, ma può darci qualche idea utile per la nostra proposta didattica.

Inoltre, in questo modo avremo dimostrato l'equivalenza delle prime cinque definizioni.

Siano dunque  $A, B$  come in (i). Definiamo  $a_k = \max\{m/10^k \in A : m \in \mathbf{Z}\}$ ,  $b_k = \min\{m/10^k \in B : m \in \mathbf{Z}\}$ <sup>2</sup>

Notiamo che può succedere che per qualche  $\bar{k}$  si abbia  $a_{\bar{k}} = b_{\bar{k}}$  (e allora  $a_{\bar{k}}$  è proprio l'elemento separatore cercato), oppure  $b_k - a_k = 1/10^k$  per ogni  $k$ . In questo secondo caso,  $(a_k, b_k)$  costituisce una successione di intervalli inscatolati, che per (v) hanno un unico punto  $\lambda$  in comune.

Dico che  $\lambda$  è proprio l'elemento separatore cercato: se per assurdo *non* fosse un maggiorante per l'insieme  $A$ , dovrebbe esistere  $a \in A$  con  $a > \lambda$ . Ma allora l'intervallo  $[\lambda, a]$  sarebbe contenuto in  $A$ , e scegliendo  $k$  in modo tale che  $1/10^k < a - \lambda$  potremmo trovare un numero del tipo  $m/10^k$  maggiore di  $\lambda$ , contro la definizione dell'intervallo  $(a_k, b_k)$ . Per ragioni analoghe,  $\lambda$  deve essere un minorante dell'insieme  $B$ .

*ESERCIZIO:* Torniamo per un momento alle nostre considerazioni didattiche... Provate a escogitare una dimostrazione *semplice e proponibile in un'aula scolastica* del fatto che l'insieme dei numeri decimali infiniti soddisfa *una qualunque* delle formulazioni dell'assioma della scelta. (Vi farò vedere la mia proposta di soluzione durante il prossimo incontro...).

Rimane da far vedere l'equivalenza di (vi) e delle altre versioni dell'assioma di completezza. Ho volutamente lasciato per ultima la formulazione con le successioni di Cauchy perché con ogni probabilità non verrà mai introdotta nella didattica della scuola superiore. Comunque, vediamo di dimostrare anche questo (per ragioni di ... completezza!).

*Mostriamo che (iii), (iv)  $\Rightarrow$  (vi):* Sia  $\{a_n\}$  una successione di Cauchy, ossia  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\bar{n} \in \mathbf{N}$  tale che  $|a_n - a_m| < \varepsilon \forall m, n \geq \bar{n}$ .

Innanzitutto, una tale successione è limitata: prendiamo per esempio  $\varepsilon = 1$  nella definizione di successione di Cauchy, e troviamo il corrispondente  $\bar{n}$ . Allora, per ogni  $n \geq \bar{n}$  si avrà

$$a_{\bar{n}} - 1 < a_n < a_{\bar{n}} + 1.$$

Poniamo poi  $b_n = \sup\{a_m : m \geq n\}$ . Questa è una buona definizione grazie a (iii), e la successione  $\{b_n\}$  sarà decrescente perché stiamo facendo il sup di insiemi via via più piccoli. Grazie a (iv), essa ammette allora un limite  $\ell \in \mathbf{R}$ .

---

<sup>2</sup>Il massimo e il minimo esistono grazie alla natura *discreta* degli insiemi in oggetto: essi possono essere messi in bigezione con un sottinsieme di  $\mathbf{N}$ , che è bene ordinato.

Scegliamo  $\varepsilon > 0$ . Troviamo  $\nu \in \mathbf{N}$  tale che, per ogni  $n \geq \nu$ ,  $|b_n - \ell| < \varepsilon/4$ . Ricordando la definizione di  $b_n$  e di estremo superiore, questo significa che è possibile trovare indici  $n \in \mathbf{N}$  *arbitrariamente grandi* tali che

$$(*) \quad \ell - \varepsilon/2 < a_n < \ell + \varepsilon/4.$$

D'altra parte, per la definizione di successione di Cauchy possiamo trovare  $\bar{\nu} \geq \nu$  tale che per ogni  $m, n \geq \bar{\nu}$  si abbia  $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ .

Sia infine  $n > \bar{\nu}$ , e scegliamo  $n' > \bar{\nu}$  tale che valga la (\*). Abbiamo

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - a_{n'}| + |a_{n'} - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

come volevasi dimostrare.

*Mostriamo che (vi)  $\Rightarrow$  (iv):* Sia  $\{a_n\}$  una successione crescente e superiormente limitata. Se per assurdo non fosse di Cauchy, potrei trovare  $\varepsilon_0 > 0$  e per ogni  $n \in \mathbf{N}$  due indici  $n', n'' \geq n$  tali che  $|a_{n'} - a_{n''}| \geq \varepsilon_0$ . Grazie a questo, posso costruirmi una successione crescente di indici  $n_k$  tali che

$$a_{n_{k+1}} - a_{n_k} = |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| \geq \varepsilon_0.$$

Allora per ogni  $k$  si ha  $a_{n_k} = a_{n_0} + (a_{n_1} - a_{n_0}) + (a_{n_2} - a_{n_1}) + \dots + (a_{n_k} - a_{n_{k-1}}) \geq a_{n_0} + k\varepsilon_0$ , e l'ultima espressione tende a  $+\infty$  per  $k \rightarrow +\infty$ , contro l'ipotesi di limitatezza della successione.

Concludo con un paio di suggerimenti bibliografici:

- Una trattazione elementare dei numeri reali, datata ma ancora efficace, si può trovare nel Capitolo 2 di R. Courant e H. Robbins, "Che cos'è la matematica?", Bollati Boringhieri, 2000.
- Altra lettura interessante può essere il Capitolo 1 di G. Prodi, "Analisi Matematica", Boringhieri, 1970.

**Lezione del 7/2/2003 (4 ore):** *Continuità e teorema di esistenza degli zeri*

Per concludere il discorso iniziato nella precedente lezione, vediamo come si possa verificare che l'insieme dei *decimali infiniti* soddisfa l'assioma di completezza.

Tra le varie formulazioni equivalenti viste la volta scorsa, quella che risulta più facile da verificare è probabilmente la (iii): precisamente, mostriamo che ogni insieme inferiormente limitato di numeri decimali infiniti ammette

estremo inferiore, e che questo è caratterizzabile come il numero decimale infinito prodotto da un semplice algoritmo.

Sia dunque  $A$  un insieme non vuoto e inferiormente limitato di decimali infiniti, e supponiamo per semplicità che 0 sia un minorante dell'insieme  $A$  (le lievi modifiche da fare nel caso generale non sono difficili, e vengono lasciate per esercizio).

E' intuibile che se voglio ottenere la parte intera  $a_0$  dell'estremo inferiore di  $A$ , basta prendere il massimo dell'insieme (finito) dei numeri naturali che sono minoranti di  $A$ .

Se voglio poi ottenere le prime  $k$  cifre decimali dell'inf, mi basterà prendere il massimo  $a_k$  dell'insieme (ancora finito!) dei numeri del tipo  $m/10^k$  (con  $m \in \mathbf{N}$ ) che siano ancora minoranti di  $A$ . Evidentemente, per come ho definito questi numeri, se tronco  $a_{k+h}$  alla  $k$ -esima cifra decimale riottengo  $a_k$ .

Ne segue che il mio algoritmo identifica univocamente un numero decimale infinito  $\bar{a}$ , che affermo essere l'estremo inferiore di  $A$ .

Infatti, se per assurdo  $\bar{a}$  non fosse un minorante di  $A$ , dovrebbe superare un elemento  $a \in A$ . Ma allora, per qualche  $k$  si avrebbe che  $\bar{a} - a > 10^{-k}$ , e di conseguenza neanche  $a_k$  potrebbe essere un minorante di  $A$ , il che è assurdo per la costruzione di  $a_k$ . Per ragioni analoghe, non possono esserci minoranti di  $A$  più grandi di  $\bar{a}$  (esercizio!), Q.E.D.

*Esercizio:* Far vedere che un numero decimale infinito è razionale se e soltanto se è periodico. (Per una implicazione, usare l'algoritmo per la divisione e il fatto che i resti possibili sono in numero finito, pari al denominatore. Per l'altra implicazione è sufficiente ricordare la somma della serie geometrica...)

Una delle conseguenze più "spettacolari" dell'assioma di completezza, quella che rende i numeri reali l'oggetto "giusto" quando si vogliono definire, per esempio, le inverse delle funzioni algebriche e trascendenti, è senza dubbio il teorema di esistenza degli zeri:

*TEOREMA (Di esistenza degli zeri):* Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è una funzione continua tale che  $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ , allora esiste  $c \in [a, b]$  tale che  $f(c) = 0$ .

Elenchiamo alcuni aspetti "gradevoli" di questo risultato:

- È geometricamente "evidente": se abbiamo una funzione definita sull'intervallo  $[a, b]$  il cui grafico può essere tracciato "senza mai staccare la matita dal foglio", e se  $f(a)$  e  $f(b)$  hanno segno discorde, il grafico di  $f$  dovrà tagliare almeno una volta l'asse delle  $x$  tra  $a$  e  $b$ .

- *Permette di dimostrare l'esistenza delle inverse delle funzioni elementari (opportunamente ristrette ad un intervallo massimale su cui sono strettamente monotone):* una conseguenza immediata del teorema di esistenza degli zeri è la proprietà dei valori intermedi di una funzione continua definita su un intervallo. In altre parole, una funzione continua definita sull'intervallo  $[a, b]$  deve assumere tutti i valori compresi tra  $f(a)$  e  $f(b)$ .

Allora, è chiaro che una funzione continua e strettamente crescente su  $[a, b]$  sarà invertibile, e la funzione inversa sarà definita sull'intervallo  $[f(a), f(b)]$ : infatti,  $f$  è iniettiva perché strettamente monotona, ed è surgettiva per la proprietà dei valori intermedi.

Questo risultato è utilissimo: grazie ad esso, otteniamo senza colpo ferire l'esistenza di radici  $n$ -esime, logaritmi, funzioni trigonometriche inverse...

- *Permette di dimostrare che l'inversa di una funzione continua e strettamente monotona definita su un intervallo, è anch'essa continua:* questo fatto è geometricamente chiaro, ma se si tenta di dimostrarlo a partire dalla definizione di limite ci si trova presto nei guai! Sorprendentemente, una dimostrazione semplice si può ottenere grazie alla proprietà dei valori intermedi, e deriva dalla constatazione che una funzione monotona possiede limite destro e sinistro in ogni punto (Perché?). Ne deriva che una funzione monotona definita su un intervallo è *continua se e soltanto se la sua immagine è un intervallo*. Ora, sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua e strettamente crescente: dal punto precedente sappiamo che la sua inversa sarà una funzione definita su  $[f(a), f(b)]$  con immagine  $[a, b]$ , ed anch'essa sarà evidentemente una funzione crescente. Dunque, l'inversa è una funzione monotona definita su un intervallo la cui immagine è un intervallo, per cui è continua.

- *Fornisce un metodo "universale" per risolvere le disequazioni:* le disequazioni sono da sempre lo spauracchio degli studenti della scuola secondaria. Questo avviene perché, per la loro risoluzione, i malcapitati scorrono un lungo "ricettario" mandato a memoria, che prescrive regole diverse e spesso complicate per ogni particolare tipologia di problema.

Se poi un insegnante innamorato della matematica rifiuta (giustamente!) di fornire una versione troppo dettagliata del ricettario, lo studente si trova costretto a compiere ragionamenti più o meno complicati, che ahimè non sempre hanno esito felice...

Il teorema di esistenza degli zeri può servire a ridurre drasticamente il

numero di ricette necessarie: supponiamo infatti di voler determinare le soluzioni della disequazione  $f(x) \geq 0$ , dove  $f$  è una data funzione reale di variabile reale. Supponiamo di sapere che il dominio di  $f$  è un'unione finita di intervalli (anche semirette), e che  $f$  è continua tranne che in un numero finito di punti, e si annulla parimenti in un numero finito di punti. Il teorema di esistenza degli zeri ci garantisce che  $f$  deve avere segno costante in ogni *intervallo contenuto nel dominio, che non contenga al suo interno né zeri né punti di discontinuità di  $f$* . Poiché di intervalli (massimali) siffatti ne abbiamo un numero finito, la risoluzione della disequazione si riduce a testare il segno di  $f$  in un punto arbitrario di ciascuno di essi! Questo test è piuttosto tedioso, ma può essere reso quasi indolore con semplici accorgimenti (ne abbiamo visto uno a lezione per le funzioni razionali...).

In questo modo, la difficoltà di risolvere la disequazione  $f(x) \geq 0$  è pari a quella di trovare il dominio di  $f$ , i suoi eventuali punti di discontinuità, e risolvere poi l'equazione  $f(x) = 0$ .

A questo punto, ci si pone un problema naturale: in che momento, durante il quinquennio della scuola secondaria, è utile e non eccessivamente traumatico enunciare per la prima volta il teorema di esistenza degli zeri, per poterne trarre qualcuna delle belle conclusioni scritte sopra?

La versione “geometrica” dell’enunciato (cioè quella per cui “funzione continua” = “funzione il cui grafico si può disegnare senza staccare la penna dal foglio”), può essere compresa perfettamente da uno studente di biennio che abbia familiarità con il piano cartesiano.

Se però vogliamo usare il teorema per gli scopi elencati, cioè per “dimostrare” che esiste la radice quadrata o il logaritmo di un numero positivo, o per risolvere disequazioni razionali e/o irrazionali, occorre che sia “chiaro” agli studenti che le funzioni coinvolte, cioè la funzione  $f(x) = x^2$ , l'esponenziale, le funzioni razionali (lontano dai poli!),... sono continue negli intervalli che ci interessano.

Paradossalmente, se volessimo scrivere delle dimostrazioni con tutti i crismi, sarebbe assai più facile verificare che una funzione razionale è continua in tutti i punti in cui non si annulla il denominatore, piuttosto che far vedere che la funzione esponenziale è continua... Invece, i nostri studenti saranno dispostissimi a credere alla continuità della funzione esponenziale (perché ne avranno visto il grafico, ed esso possiede “visibilmente” la proprietà voluta!), mentre dovremo durare qualche fatica con le funzioni razionali (essi non possiedono ancora gli strumenti per disegnarne un grafico “credibile”).



Per convincere gli allievi della continuità delle funzioni elementari, è utile esprimere questo concetto in una forma più quantitativa di quella “geometrica” che abbiamo appena visto. È cioè opportuno “avvicinarsi” in qualche modo, senza un deleterio eccesso di formalizzazione, alla “vera” definizione di continuità con gli  $\epsilon$  e  $\delta$ .

Per esempio, si potrebbe tentare con formulazioni variabili tra qualcosa di abbastanza impreciso, come “Una funzione  $f$  è continua in  $x_0$  se, prendendo  $x$  vicino a  $x_0$ ,  $f(x)$  è vicina a  $f(x_0)$ ”, fino a raggiungere una vera e propria parafrasi della definizione di continuità, come “Una funzione  $f$  è continua in  $x_0$  se, prendendo  $x$  sufficientemente vicino a  $x_0$ ,  $f(x)$  diventa arbitrariamente vicino a  $f(x_0)$ ”.<sup>3</sup>

Qualunque approssimazione della definizione precisa si sia scelta, molti dei più elementari risultati sulle funzioni continue saranno del tutto plausibili e pronti per essere mangiati:

- La *funzione identica*  $f(x) = x$  è continua, come lo è la funzione costante  $f(x) = k$ . Se rileggiamo una delle “definizioni” sopra in questi casi particolari, otteniamo delle tautologie!
- Sommando o facendo il prodotto di due funzioni continue si ottiene una funzione continua, e il rapporto di due funzioni continue è continuo in tutti i punti in cui il denominatore non si annulla. Tutte queste affermazioni sono plausibili: per esempio, la somma di due numeri “cambierà di poco” se “cambiano di poco” gli addendi! Volendo dare delle “dimostrazioni” ancora più convincenti, potremo semplicemente adattare gli argomenti scritti sui testi di analisi a partire dalla definizione formalizzata di continuità. A lezione, vi ho mostrato come questo non sia affatto difficile...

Si noti come questi risultati “algebrici” sulle funzioni continue ci dicano, per esempio, che le funzioni razionali sono continue tranne che nei punti in cui si annulla il denominatore!

- *Teorema dei carabinieri*: Se  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  per ogni  $x$ ,  $f$  e  $h$  sono continue in  $x_0$ , e se  $f(x_0) = h(x_0)$ , allora anche  $g$  è continua in  $x_0$  con  $g(x_0) = f(x_0)$ . Per rendere plausibile questo fatto sarà sufficiente un disegno!

Usando il teorema dei carabinieri, abbiamo visto come sia facilissimo provare la continuità delle funzioni trigonometriche!

---

<sup>3</sup>È però il caso di evitare frasi che facciano pensare indebitamente ad una monotonia della convergenza, come ad esempio *f è continua in  $x_0$  se quanto più  $x$  si avvicina a  $x_0$ , tanto più  $f(x)$  si avvicina a  $f(x_0)$* ...

- *Composizione di funzioni continue*: facendo la composizione di due funzioni continue  $f, g$  (supponiamole per semplicità definite su tutto  $\mathbf{R}$ ) si ottiene una funzione continua.

Anche questo si ottiene a partire da un corretto “spelling” della “definizione” di continuità per  $f$  in  $x_0$ , e per  $g$  in  $f(x_0)$ ...<sup>4</sup>

*ESERCIZIO*: Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione derivabile ma non necessariamente di classe  $C^1$ . Mostrare che la derivata gode della proprietà dei valori intermedi: essa assume tutti i valori compresi tra  $f'(a)$  e  $f'(b)$ . (Suggerimento: mostrare per prima cosa l’analogo del teorema di esistenza degli zeri per la derivata...).

**Lezione del 14/2/2003 (4 ore):** *Ancora sul teorema di esistenza degli zeri e sulla continuità.*

La volta scorsa abbiamo ottenuto la continuità di una vasta gamma di funzioni (polinomi, funzioni razionali, radici, funzioni trigonometriche e trigonometriche inverse, funzioni ottenibili dalle precedenti con operazioni algebriche e di composizione...).

Spicca tuttora l’assenza di una coppia di funzioni estremamente importanti, anche nella vita di tutti i giorni del pastore lucano e della casalinga di Treviso: esponenziale e logaritmo. Decisamente, non possiamo farne a meno!

Cominciamo con un rapido ripasso sulle potenze: se  $a \in \mathbf{R}$  ( $a \neq 0$ ) e  $n \in \mathbf{N}$ , è chiaro a tutti cosa significa  $a^n$ : se  $n > 0$ , prendiamo  $a$  e “lo moltiplichiamo per se stesso  $n$  volte”<sup>5</sup>. Non è neanche difficile convincersi che valgono le ben note “proprietà delle potenze”: per ogni  $n, m \in \mathbf{N}$  si ha  $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$  e  $(a^n)^m = a^{nm}$ ... (Questo fatto, in realtà, dovrebbe essere dimostrato per induzione...Ma mi guarderei bene dal farlo nel biennio della scuola superiore: molto meglio dare una dimostrazione che preveda un uso accorto dei puntini di sospensione!)

Siccome vogliamo che la prima di queste identità sia vera per ogni coppia di esponenti naturali, ne segue l’assoluta necessità della “strana” scelta di imporre che  $a^0 = 1$ . Analogamente, quando vogliamo estendere la nostra definizione di potenza ad esponenti in  $\mathbf{Z}$  o in  $\mathbf{Q}$  (in questo secondo caso, a patto che  $a > 0$ ), se vogliamo che continuino a valere le due proprietà

---

<sup>4</sup>Questo fatto ha un’implicazione un po’ sorprendente: sembra più facile dare una definizione informale di continuità che una definizione informale di limite! In effetti, l’analogo risultato sul limite di una composizione è *falso* se non si mettono delle ipotesi ulteriori come la continuità di  $g$ , l’iniettività di  $f$ , o qualcosa del genere...

<sup>5</sup>Se volessimo una definizione rigorosa, dovremmo darla in modo ricorsivo:  $a^0 := 1$ ,  $a^{n+1} := a \cdot a^n$  per  $n \geq 1$ .

sopra evidenziate siamo *costretti* a imporre che sia  $a^{-n} = 1/a^n$  per  $n \in \mathbf{N}$ , e  $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$  se  $m \in \mathbf{Z}$  e  $n \in \mathbf{N}$  ( $n \neq 0$ )...

A questo punto, ci chiediamo che significato vogliamo dare alla scrittura  $3^{\sqrt{2}}$  (per esempio).... La risposta è piuttosto naturale: siccome abbiamo *già* definito  $3^1, 3^{1,4}, 3^{1,41}, 3^{1,41421356}, \dots$ , ci viene del tutto naturale definire

$$3^{\sqrt{2}} = \sup\{3^q : q \in \mathbf{Q}, q \leq \sqrt{2}\}.$$

Più in generale, se  $a > 1$  e  $x \in \mathbf{R}$ , definiamo

$$a^x = \sup\{a^q : q \in \mathbf{Q}, q \leq x\}.$$

(Se  $0 < a < 1$ , diamo l'analoga definizione con l'estremo inferiore!)

Non è affatto difficile verificare che questa definizione coincide con la vecchia se l'esponente è razionale, e che le proprietà delle potenze continuano a valere. Inoltre, anche questa definizione è "necessaria": il punto è che la funzione su  $\mathbf{Q}$  data da  $q \mapsto a^q$  è una funzione continua, e quello sopra è l'unico modo di estenderla ad una funzione continua definita su tutto  $\mathbf{R}$ !

*La dimostrazione della continuità della funzione esponenziale sui razionali è elementare ma non completamente banale! Assumiamo che sia  $a > 1$ . Siccome  $a^q = a^q \cdot a^{q-\bar{q}}$ , è sufficiente dimostrare la continuità della funzione esponenziale in 0. Giocando con la definizione di limite (e ricordando che la funzione esponenziale è crescente), vediamo che sarà sufficiente far vedere che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{1/n} = 1$ .*

*Poniamo  $a^{1/n} = 1 + b_n$ , con  $b_n > 0$ : abbiamo  $a = (1 + b_n)^n$ , e grazie alla disuguaglianza di Bernoulli  $a \geq 1 + nb_n$ , da cui  $0 < b_n < (a-1)/n$  e  $b_n \rightarrow 0$ , come volevasi.*

In conclusione, questo lungo discorso ci ha permesso di estendere via via la definizione di esponenziale, data inizialmente solo per esponenti naturali, ad una funzione continua definita su tutta la retta reale, che soddisfa ancora le proprietà delle potenze!

A questo punto, grazie al fatto che la funzione esponenziale è strettamente crescente,  $a^x \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow -\infty$  e  $a^x \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$  (nel caso  $a > 1$ ), il teorema di esistenza degli zeri ci assicura che la funzione esponenziale è invertibile, con inversa continua, da  $\mathbf{R}$  in  $(0, +\infty)$ . Ci guadagnamo, sostanzialmente gratis, anche l'esistenza e la continuità della funzione logaritmo!

Ritorniamo per un momento al teorema di esistenza degli zeri: se davvero decidiamo di introdurlo in un biennio come suggerito nella lezione precedente, dobbiamo basarci sul *solo* aspetto grafico, o possiamo azzardarci a dimostrarlo? E in caso affermativo, quale dimostrazione scegliere?

Secondo me, l'aspetto grafico è largamente sufficiente, ma tutto sommato una dimostrazione come quella “per bisezione” può essere proposta senza causare una sollevazione dell'uditorio. Essa ha anche la gradevole proprietà di suggerire un *algoritmo* per trovare uno zero della funzione con un'approssimazione prefissata.

Ricordo brevemente che la dimostrazione funziona in questo modo: se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è continua con  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ , dividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in due parti uguali e osserviamo che (se  $f$  non si annulla nel punto di mezzo, fatto del quale saremmo piuttosto felici...) in uno dei due “mezzi intervalli” si deve riproporre la situazione di partenza ( $f < 0$  nell'estremo sinistro,  $f > 0$  nell'altro). Dividiamo in due *questo* nuovo intervallo, e iteriamo il procedimento: costruiamo in questo modo una successione di intervalli inscatolati le cui lunghezze vanno a zero. Nel loro unico punto comune,  $f$  si deve annullare (se non lo facesse, siccome  $f$  è continua essa dovrebbe avere segno costante in un intorno del punto: ma tale intorno deve necessariamente contenere qualcuno degli intervallini costruiti sopra, ed otteniamo un assurdo).

Non sfuggirà il ruolo dell'assioma di completezza nella dimostrazione: abbiamo usato la versione con gli “intervalli inscatolati”, ma avremmo anche potuto osservare che gli estremi sinistri degli intervalli via via costruiti costituiscono una successione crescente...

La dimostrazione è aggiustabile anche se avessimo scelto di dire che i reali sono i decimali infiniti, senza fare troppi discorsi sull'assioma di completezza. Osserviamo infatti una cosa simpatica: prendiamo per semplicità  $[a, b] = [0, 1]$ , e guardiamo alla successione degli estremi sinistri degli intervalli inscatolati costruiti nella nostra dimostrazione: se li scriviamo in base 2, otteniamo una successione di “decimali binari” finiti, ciascuno dei quali differisce dal precedente per l'aggiunta di una cifra in... Abbiamo quindi dato una ricetta per identificare uno zero della funzione  $f$  come numero reale scritto come “decimale binario”. È evidente che l'algoritmo può essere convertito in base 10: al primo passo, invece di dividere  $[a, b]$  in 2 parti uguali, lo dividiamo in tutti i possibili segmentini i cui estremi interni all'intervallo siano del tipo  $m/10$  (con  $m \in \mathbf{Z}$ )...

La lezione è proseguita con una carrellata di funzioni “malamente discontinue”: lo scopo non era quello di dare esempi direttamente proponibili in aula (alcune delle funzioni viste sono decisamente troppo complicate), ma piuttosto di consolidare l'intuizione degli specializzandi.

Abbiamo quindi visto che una funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  può

- essere discontinua in tutti i punti: si prenda per esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbf{Q} \end{cases}$$

- essere continua esattamente in un punto. Per esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ x^2 & \text{se } x \in \mathbf{Q} \end{cases}$$

è continua e derivabile solo per  $x = 0$ , mentre è discontinua in tutti gli altri punti.

- essere continua in tutti i punti irrazionali, e discontinua in tutti i punti razionali, come la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q} \text{ con } p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}, (p, q) = 1 \end{cases}$$

Abbiamo osservato, a titolo di curiosità, che il contrario non è possibile: non può esistere una funzione continua esattamente su  $\mathbf{Q}$ , e discontinua in  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ <sup>6</sup>.

- essere ovunque continua, ma mai derivabile: ad esempio, c'è una celebre funzione costruita da Weierstrass con un'idea della quale abbiamo dato qualche cenno, senza scendere nei dettagli...

La lezione si è conclusa con una discussione del metodo delle tangenti di Newton per trovare gli zeri di una funzione. Data un'approssimazione  $x_n$  di un punto in cui  $f(x)$  si annulla, il metodo suggerisce che un'approssimazione migliore può essere sperabilmente ottenuta andando a vedere dove si annulla la retta tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(x_n, f(x_n))$ , e cioè ponendo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Abbiamo osservato che questo algoritmo converge, ad esempio, se  $f$  è convessa, derivabile e strettamente crescente su  $[a, b]$  con  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ , e si parte da una qualunque approssimazione per eccesso dell'unico zero di  $f$ ...

---

<sup>6</sup>La ragione di questo fatto è piuttosto profonda, e dipende dalla natura "topologica" dell'insieme dei punti di continuità di una funzione (sono esprimibili come intersezione numerabile di aperti), e dal teorema di Baire.

Nel caso particolare della funzione  $f(x) = x^2 - a$  ( $a > 0$ ), la legge ricorsiva diventa

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

e questo è un algoritmo estremamente efficiente per calcolare la radice quadrata di  $a$ ... Abbiamo osservato che questo algoritmo può essere “giustificato” in modo euristico, osservando che ad ogni passo stiamo facendo la media tra un’ approssimazione per eccesso ed una per difetto di  $\sqrt{a}$ .

**Lezione del 21/2/2003 (4 ore):** *Introduzione alle cardinalità infinite.*

Su istigazione di una parte degli specializzandi, ho deciso di dedicare questa lezione ad un’ introduzione elementare ai cardinali infiniti: durante uno degli incontri precedenti, alcune delle persone presenti hanno manifestato grande stupore quando una loro collega ha affermato (correttamente) che i numeri razionali sono molti meno degli irrazionali. Vedremo quindi di precisare in che senso questo è vero!

D’altra parte, il discorso che intendo proporre è abbastanza elementare, e può tranquillamente essere proposto a studenti di scuola superiore che siano dotati di curiosità ed interesse. In particolare, ho scelto di evitare ogni accenno alla teoria degli ordinali infiniti, mentre l’assioma della scelta, se e quando sarà necessario, verrà usato con grande nonchalance...

L’idea fondamentale di Georg Cantor nell’introdurre il concetto di cardinalità anche per insiemi infiniti, è la seguente: se  $A$  e  $B$  sono due insiemi finiti, essi hanno lo stesso numero di elementi se e solo se possono essere messi in corrispondenza biunivoca: in altre parole,  $\#(A) = \#(B)$  se e solo se esiste una funzione  $f : A \rightarrow B$  che sia iniettiva e surgettiva.

L’esistenza di una funzione invertibile ha evidentemente senso anche se i due insiemi coinvolti sono infiniti: da questo Cantor prende l’idea di dire che due insiemi hanno la stessa cardinalità o sono equipotenti se possono essere messi in corrispondenza tramite una funzione invertibile. L’equipotenza gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva: è dunque una relazione di equivalenza<sup>7</sup>

Quando però applichiamo questa definizione a insiemi infiniti, dobbiamo imparare a convivere con il “paradosso” che un insieme può essere equipotente ad una sua parte propria: per esempio, l’insieme  $\mathbf{N}$  dei numeri naturali ha la stessa cardinalità dell’insieme dei soli numeri pari (possono essere messi in bigezione tramite la funzione  $n \mapsto 2n$ ). A sua volta,  $\mathbf{N}$  è equipotente a  $\mathbf{Z}$ ,

---

<sup>7</sup>Almeno se fissiamo un “insieme universo” in cui tutti gli oggetti che ci servono siano contenuti... Il problema viene dal fatto, piuttosto seccante, che non può esistere l’ “insieme di tutti gli insiemi”: a rigore, l’equipotenza non è nemmeno una relazione!

e anche all'insieme  $\mathbf{Z}^2$  dei punti del piano con entrambe le coordinate intere (la bigezione può essere ottenuta tramite un opportuno “percorso a spirale”)!

Ancora più sorprendentemente,  $\mathbf{N}$  può essere messo in bigezione con  $\mathbf{Q}$ : infatti, i razionali possono essere identificati con il sottinsieme di  $\mathbf{Z}^2$  composto dalle coppie  $(m, n)$  con  $m$  e  $n$  primi tra loro e  $n > 0$ : basta quindi “saltare tutti i punti che non servono” nella spirale che permette di enumerare tutti i punti di  $\mathbf{Z}^2$ !

Un insieme che ha la stessa cardinalità di  $\mathbf{N}$  si dice *numerabile* e la sua cardinalità (ossia, a rigore, la classe di equivalenza di tutti gli insiemi numerabili) si indica con  $\aleph_0$ .

È molto naturale anche la seguente

*DEFINIZIONE:* Diciamo che  $\#(A) \leq \#(B)$  (la cardinalità di  $A$  è minore o uguale alla cardinalità di  $B$ ) se esiste una funzione *iniettiva*  $f : A \rightarrow B$ .

In particolare, un sottinsieme di  $A$  avrà certamente cardinalità minore o uguale ad  $A$ .

Questa relazione di “minore o uguale” per le cardinalità è evidentemente riflessiva e transitiva. Il fatto che valga anche la proprietà antisimmetrica (e quindi essa sia una vera relazione d'ordine) è vero ed estremamente utile, ma non ovvio:

*TEOREMA (di Bernstein-Schroeder):* Se  $\#(A) \leq \#(B)$  e  $\#(B) \leq \#(A)$ , allora  $\#(A) = \#(B)$ .

*DIM.:* L'ipotesi ci fornisce due funzioni iniettive  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow A$ , usando le quali vogliamo costruire una funzione invertibile  $\tilde{f} : A \rightarrow B$ <sup>8</sup>.

Se  $a \in A$ , diremo che  $b \in B$  è un *genitore* di  $a$  se  $g(b) = a$ . Analogamente, se  $b \in B$  diremo che  $a \in A$  è genitore di  $b$  se  $f(a) = b$ . Si noti che ogni elemento ha al più un genitore, e che ci possono essere elementi orfani.

Con questa definizione, possiamo percorrere a ritroso, di genitore in genitore, la progenie di ogni elemento di  $A$  o di  $B$ . Si danno tre possibilità:

- finiamo col trovare un elemento senza genitori in  $A$  (il “progenitore” dell'elemento da cui siamo partiti);
- finiamo in modo analogo col trovare un progenitore orfano in  $B$ ;
- la stirpe non ha inizio: ogni elemento possiede un genitore e possiamo proseguire all'infinito.

---

<sup>8</sup>La difficoltà viene dal fatto che può succedere che né  $f$  né  $g$  sia una funzione surgettiva. Per esempio, sia  $A = \mathbf{N}$ ,  $B$  l'insieme dei naturali pari,  $f : n \mapsto 4n$ ,  $g : n \mapsto n$ .

Usiamo queste osservazioni per partizionare ciascuno dei due insiemi  $A$  e  $B$  in tre parti disgiunte: precisamente poniamo

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a \in A : a \text{ possiede un progenitore orfano in } A\} \\ A_2 &= \{a \in A : a \text{ possiede un progenitore orfano in } B\} \\ A_3 &= \{a \in A : a \text{ possiede una stirpe infinita di progenitori}\} \\ B_1 &= \{b \in B : b \text{ possiede un progenitore orfano in } A\} \\ B_2 &= \{b \in B : b \text{ possiede un progenitore orfano in } B\} \\ B_3 &= \{b \in B : b \text{ possiede una stirpe infinita di progenitori}\} \end{aligned}$$

Fatto questo, si vede facilmente che la restrizione di  $f$  ad  $A_1$  è una bigezione di  $A_1$  in  $B_1$ . Analogamente, la restrizione di  $f$  ad  $A_3$  è una bigezione di  $A_3$  in  $B_3$ . Invece, la restrizione di  $g$  a  $B_2$  è una bigezione di  $B_2$  in  $A_2$ .

Per ottenere una bigezione  $\tilde{f} : A \rightarrow B$  basta quindi definire

$$\tilde{f}(a) = \begin{cases} f(a) & \text{se } a \in A_1 \cup A_3 \\ g^{-1}(a) & \text{se } a \in A_2 \end{cases}$$

Q.E.D.

Vediamo subito un'applicazione del teorema di Bernstein che ne mostra la potenza.

Innanzitutto, è facile vedere che  $\mathbf{R}$  è equipotente a qualunque intervallo aperto  $(a, b)$ : una funzione invertibile tra  $(-\pi/2, \pi/2)$  e  $\mathbf{R}$  è data per esempio da  $x \mapsto \tan x$ , e il caso generale segue componendo con un opportuno “cambio di variabile” affine. Molto più difficile è invece costruire una funzione invertibile tra un intervallo *chiuso*  $[a, b]$  e  $\mathbf{R}$  (provateci un po'...).

Il teorema di Bernstein ci dice però che essa esiste: infatti, una funzione iniettiva di  $[-\pi, \pi]$  in  $\mathbf{R}$  è data dall'inclusione, mentre una funzione iniettiva di  $\mathbf{R}$  in  $[-\pi, \pi]$  è per esempio  $x \mapsto \arctan x$ .

In conclusione, la retta reale  $\mathbf{R}$  è equipotente a qualunque intervallo o semiretta (perché?). Analogamente, il piano cartesiano  $\mathbf{R}^2$  è equipotente al quadrato  $(0, 1) \times (0, 1)$ ...e il quadrato è equipotente al segmento  $(0, 1)$ ! Infatti, è evidente che  $\#((0, 1)) \leq \#((0, 1) \times (0, 1))$ , basta prendere la mappa iniettiva  $x \mapsto (x, 1/2)$ . Viceversa, una mappa iniettiva dal quadrato nel segmento può essere ottenuta nel modo seguente: se  $(x, y)$  è un punto del quadrato, possiamo scrivere  $x$  e  $y$  in modo unico come numeri decimali infiniti (se conveniamo di evitare code di tutti 9):  $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ ,  $y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ . Per ottenere la nostra mappa iniettiva, mandiamo  $(x, y)$  nel numero decimale  $0, a_1 b_2 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$  ottenuto alternando le cifre di  $x$  e  $y$ .



Sorge a questo punto il dubbio che  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{R}$  siano equipotenti! Questo però non è vero: la cardinalità di  $\mathbf{R}$  (che si chiama “cardinalità del continuo”) è *strettamente maggiore* del numerabile. Vediamo la dimostrazione data da Cantor di questo fatto: se per assurdo  $\mathbf{R}$  fosse numerabile, potremmo costruire una funzione surgettiva da  $\mathbf{N}$  in  $(0, 1)$ . In altre parole, potremmo costruire un “elenco” (infinito) di tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1: in notazione decimale, e con la solita convenzione per evitare ambiguità:

$$\begin{aligned} &0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots \\ &0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots \\ &0, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \dots \\ &0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Facciamo vedere che c'è almeno un numero reale compreso tra 0 e 1 che *non fa parte* della lista, che quindi non era completa: prendiamo un numero  $0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$  tale che

- $\alpha_1$  è diversa da  $a_1$  (prima cifra del primo numero dell'elenco) e da 9;
- $\alpha_2$  è diversa da  $a_2$  (seconda cifra del secondo numero dell'elenco) e da 9;
- ...;
- $\alpha_k$  è diversa dalla  $k$ -esima cifra del  $k$ -esimo numero dell'elenco e da 9.

Questo numero, ottenuto col cosiddetto “procedimento diagonale di Cantor”, differisce da *tutti* i numeri dell'elenco: precisamente, differisce dal numero dell'elenco di posto  $k$  per la  $k$ -esima cifra!

La geniale idea del procedimento diagonale di Cantor può essere utilizzata, in modo leggermente più astratto, per dimostrare che non esiste un insieme di “cardinalità massima”:

*TEOREMA:* se  $\mathcal{P}(A)$  denota l'insieme delle parti di  $A$ , cioè l'insieme i cui elementi sono i sottinsiemi di  $A$  (compresi  $A$  e  $\emptyset$ ), si ha  $\#(\mathcal{P}(A)) > \#(A)$ .

DIM.: È evidente che  $\#(\mathcal{P}(A)) \geq \#(A)$ : un'applicazione iniettiva di  $A$  in  $\mathcal{P}(A)$  è data da  $a \mapsto \{a\}$ .

Dimostriamo che i due insiemi *non* possono essere equipotenti: prendiamo una funzione  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ , e mostriamo che non è surgettiva. Prendiamo

infatti l'insieme  $B = \{a \in A : a \notin f(a)\}$ . Chiaramente, questo insieme differisce da ciascuno degli insiemi  $f(a)$ , al variare di  $a \in A$ . Q.E.D.

*ESERCIZIO:* Se  $A$  è un insieme finito, far vedere che  $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^n$ .

Grazie al teorema precedente, possiamo costruire una catena infinita di insiemi infiniti di cardinalità sempre più grande, prendendo  $\mathbf{N}$ ,  $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ ,  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}))$ ,...

*OSSERVAZIONE:* Si ha  $\#(\mathcal{P}(\mathbf{N})) = \#(\mathbf{R})$ . Basta far vedere che l'intervallo  $[0, 1]$  è equipotente all'insieme delle parti di  $\mathbf{N}$ . Una funzione iniettiva può essere ottenuta nel modo seguente. Ogni numero reale  $x \in (0, 1)$  può essere scritto come *decimale binario*:  $x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$  (in base 2), dove quindi le cifre  $a_i$  possono essere solo 0 o 1 (e, per evitare ambiguità, evitiamo le scritture in cui le cifre terminano con una coda infinita di tutti 1). Al nostro numero, facciamo corrispondere *quel sottinsieme di  $\mathbf{N}$  che contiene tutti e soli i numeri che corrispondono agli indici di cifre uguali a 1*.

Questa funzione non è surgettiva, ma ci si convince facilmente che i sottinsiemi di  $\mathbf{N}$  mancanti sono solo un'infinità numerabile (quali sono, precisamente?), per cui i due insiemi hanno la stessa cardinalità.

Ci si può chiedere ora se *esistono cardinalità intermedie tra quella di  $\mathbf{N}$  e quella di  $\mathbf{R}$* : l'*ipotesi del continuo* afferma che non ce ne sono, e si è tentato per lungo tempo di dimostrare o confutare questa affermazione.

Nel 1964, Paul Cohen provò un risultato a dir poco spettacolare: l'ipotesi del continuo è *indipendente* dagli usuali assiomi della teoria degli insiemi<sup>9</sup>: possiamo cioè aggiungere agli altri assiomi l'ipotesi del continuo *o il suo contrario*, e il nostro sistema assiomatico rimarrà coerente.

Concludiamo questi cenni sulla teoria delle cardinalità infinite con una dimostrazione alternativa del fatto che  $\#(\mathbf{R}) > \#(\mathbf{N})$ , di sapore un po' più "analitico" di quella col procedimento diagonale di Cantor<sup>10</sup>.

Supponiamo dunque per assurdo di avere una *successione*  $\{x_n\}$  che esaurisce tutti i numeri reali (cioè, il che è la stessa cosa, supponiamo di avere una funzione surgettiva di  $\mathbf{N}$  in  $\mathbf{R}$ ). Consideriamo la seguente unione di intervalli aperti:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (x_i - 10^{-i}, x_i + 10^{-i}).$$

<sup>9</sup>Quelli del sistema assiomatico Z.F.C.

<sup>10</sup>Essa ha però uno svantaggio: occorre essere disposti a credere che  $\mathbf{R}$  non può essere ricoperto con un'unione numerabile di intervallini di lunghezza totale minore di 1... Questo fatto può essere formalizzato e dimostrato solo nel quadro della moderna teoria della misura.

Evidentemente, questa unione ricopre  $\mathbf{R}$  (perché abbiamo supposto che i centri degli intervallini esauriscano tutto  $\mathbf{R}$ ). D'altra parte, sommando le lunghezze di tutti gli intervallini che abbiamo usato (basta ricordare la formula per la somma della serie geometrica) si ottiene  $2/9$ : un po' troppo poco per ricoprire l'intera retta reale!

Si noti che, visto che  $\mathbf{Q}$  è numerabile, questo stesso procedimento ci dice che i punti razionali della retta possono essere ricoperti da un'unione numerabile di intervallini di lunghezza totale minore di  $2/9$ . O anche meno: se come raggio dell' $i$ -esimo intervallino prendiamo  $\delta/10^i$ , la lunghezza totale diventa  $2\delta/9$ , per cui i razionali possono essere ricoperti da intervallini la cui lunghezza totale è *piccola quanto si vuole*. In teoria della misura, si esprime questo fatto dicendo che l'insieme  $\mathbf{Q}$  (o qualunque altro sottinsieme numerabile di  $\mathbf{R}$ ) ha *misura nulla*.

*ESERCIZIO:* Come applicazione delle cardinalità, a lezione ci siamo divertiti a mostrare che una funzione monotona  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  possiede al più un insieme numerabile di punti di discontinuità. Far vedere che questa stima è ottimale, esibendo una funzione crescente  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  che ha *esattamente* una quantità numerabile di punti di discontinuità!

**Lezione del 28/2/2003 (4 ore):** *Derivate ed equazioni differenziali ordinarie.*

In questa lezione, vogliamo fare qualche considerazione sull'introduzione, e sull'utilizzo, del concetto di derivata nella scuola superiore.

Solitamente, la definizione di derivata viene data soltanto dopo una discussione formale dei limiti, per cui al calcolo differenziale possono essere dedicati solo gli ultimi mesi dell'ultimo anno. E' veramente indispensabile fare in questo modo?

Posso far notare, un po' provocatoriamente, che l'uso della derivata nella pratica matematica ha preceduto di almeno 150 anni la formalizzazione del concetto di limite, e che lo spettacolare sviluppo della fisica settecentesca non avrebbe potuto esistere senza il calcolo differenziale, ancora privo di una solida fondazione teorica! Del resto, abbiamo già fatto osservazioni di questo tipo quando parlavamo della continuità.

Al fine di un'introduzione *precoce* del concetto di derivata, osservo che lavorare in una regione montuosa come il Trentino può esserci di grande aiuto: possiamo star certi che i nostri studenti avranno notato più di una volta il segnale di pericolo che avvisa della forte pendenza di una strada. Non avremo quindi difficoltà a spiegare loro cosa significa che una strada ha una pendenza del 15%, e non sarà neppure un grosso sforzo "vendere" loro una retta disegnata sul piano cartesiano come il "profilo di una strada"!

In questa maniera, avremo agio di introdurre (o di consolidare, se gli studenti avessero già visto l'equazione della retta nel piano cartesiano) il concetto di pendenza di una retta...o di coefficiente angolare, se decideremo di attenerci alla denominazione codificata in Gazzetta Ufficiale!

A questo punto, prendiamo una funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  di cui a priori non sappiamo come è fatto il grafico. È evidente che ci sarebbe di grandissimo aiuto saper isolare i tratti “in salita” da quelli “in discesa”, in modo da trovare i punti di massimo e minimo relativo e poter azzardare un plausibile disegno del grafico di  $f$ !

Ora, i tratti in “salita” saranno quelli in cui la pendenza del grafico della funzione è positiva... Un momento! Cosa sarà mai la pendenza di un grafico “curvo”, in un suo dato punto  $x_0$ ? Ebbene, se prendiamo un secondo punto  $x_1$  *non troppo lontano da*  $x_0$ , e calcoliamo il rapporto  $(f(x_1) - f(x_0))/(x_1 - x_0)$  (la pendenza della retta passante per  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$ ), tale rapporto sarà una ragionevole approssimazione della pendenza “corretta” della strada in  $x_0$ ... L'approssimazione sarà tanto migliore quanto più  $x_1$  sarà vicino a  $x_0$ !

Questo ci fornisce una semplice ricetta per calcolare la pendenza: poniamo  $x_1 = x_0 + h$  (in modo che  $h$  rappresenti la distanza, con segno, tra i due punti) e scriviamo la “pendenza media” tra  $x_0$  e  $x_0 + h$ , cioè il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Se per caso riusciamo a far vedere che questo rapporto “si avvicina ad un valore preciso” quando  $h$  diventa sempre più piccolo, quel valore sarà l'effettiva pendenza della strada (e lo potremo indicare con  $f'(x_0)$ , chiamare derivata,...).

La forma indeterminata nel limite del rapporto incrementale non ci deve necessariamente spaventare: per esempio, se  $f$  è un polinomio assistiamo a gradevoli semplificazioni che eliminano il problema! A titolo di esempio, a lezione abbiamo visto come sia semplice studiare il grafico di una cubica anche senza conoscere le regole di derivazione e la definizione precisa di limite.

È chiaro che una proposta didattica come quella appena fatta mi espone ad un'obiezione assai ragionevole, che infatti *mi è stata puntualmente rivolta dagli specializzandi*: anche se abbiamo visto che *non è impossibile* introdurre la derivata nei primi anni di scuola superiore, *perché mai dovremmo farlo?*

La mia personale risposta è che il calcolo differenziale ci regala un metodo potentissimo per risolvere problemi di massimo e di minimo, e che non è affatto difficile inventarsene alcuni che siano al contempo semplici e di sapore

applicativo... Un altro grosso vantaggio lo avremo nel corso di fisica, quando dovremo introdurre concetti fondamentali come la velocità e l'accelerazione!

A questo punto ci siamo convinti (forse!) che è possibile introdurre il calcolo differenziale in modo non troppo traumatico, basandoci fortemente sull'intuizione geometrica.

A volte, però, l'intuizione può anche ingannare: per questa ragione, è importante che l'insegnante abbia in testa un buon bagaglio di controesempi. Non necessariamente per proporli in aula (alcuni degli esempi che indicherò causerebbero infatti uno scompiglio assolutamente controproducente!), quanto per evitare se possibile di fare affermazioni non veritiere...(cosa che, purtroppo, può capitare a tutti!).

- *Una funzione può essere derivabile anche solo in un punto, e non essere neppure continua in tutti gli altri.* Abbiamo già visto un esempio di questo: basta prendere la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

- *Supponiamo di avere una funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ovunque derivabile, e di sapere che  $f'(x_0) > 0$ . È lecito concludere che  $f$  è crescente (anche non strettamente) in un intorno di  $x_0$ ?*

Viene voglia di rispondere affermativamente, anche perché il rapporto incrementale sarà positivo in un intorno di  $x_0$  (permanenza del segno). Questo, però, consente di confrontare il valore di  $f(x)$  in un intorno di  $x_0$  solo con  $f(x_0)$ , e non di confrontare i valori di  $f$  in due punti distinti dell'intorno stesso.

La risposta alla domanda è infatti negativa: si prenda ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Essa ha derivata 1 in 0, ma è facile vedere che essa non è crescente in nessun intorno di 0 (ci sono infiniti intervallini in cui essa è strettamente decrescente, che si accumulano verso l'origine).

Se però aggiungiamo l'ipotesi che  $f'$  sia continua in  $x_0$ , il risultato diventa vero: in tal caso,  $f$  ha derivata strettamente positiva in un intorno di  $x_0$ .

- Se  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  è derivabile e  $x_0$  è un punto di minimo relativo per  $f$ , è vero che  $f$  è decrescente in un intorno sinistro di  $x_0$ , e crescente in un intorno destro?

Anche in questo caso la risposta è negativa: basta prendere la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

che ha minimo assoluto nell'origine, ma non ha affatto la proprietà enunciata.

In questo caso, il fenomeno non è neanche causato dalla scarsa regolarità di  $f$ : la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin^2(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ha la stessa proprietà, ed è anche infinitamente derivabile in 0...

Si noti che questi esempi *non impediscono* di dire che un buon modo di studiare una funzione è studiare il segno della derivata: questo ci permette pur sempre di identificare gli intervalli di crescita e di decrescenza! Se poi, come in questi due casi, essi si accumulano vicino a qualche punto, capiremo di essere nei guai ed escogiteremo una soluzione più astuta!

- Quali tipi di discontinuità sono possibili per la funzione  $f'$ , se  $f$  è una funzione ovunque derivabile in  $\mathbf{R}$ ?

Sappiamo che in un punto può non esistere il limite della funzione derivata, anche se la funzione è derivabile ovunque (un esempio è la funzione  $x^2 \sin(1/x)$ ). In realtà, questo è anche l'*unico* tipo possibile di discontinuità della funzione derivata, se essa esiste in tutto un intorno del punto (e nel punto stesso!).

Per rendersene conto, torna comodo il seguente risultato (che è anche utile in un sacco di altre occasioni!):

*PROPOSIZIONE:* Sia  $f$  una funzione derivabile in un intorno destro di  $x_0$  (tranne eventualmente  $x_0$ ), continua a destra in  $x_0$ . Supponiamo anche che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell.$$

Allora, se  $\ell \in \mathbf{R}$  la funzione ammette derivata destra in  $x_0$  e  $f'_+(x_0) = \ell$ . Se invece  $\ell = \pm\infty$ , il limite destro del rapporto incrementale è comunque uguale a  $\ell$ .

La dimostrazione è una semplice conseguenza del teorema di L'Hôpital o del teorema di Lagrange. Un enunciato del tutto analogo vale anche per la derivata sinistra.

Di solito, si usa questo teorema (a volte senza neanche rendersene conto!) per calcolare il valore della derivata in un punto “dubbio” (per esempio, in un punto di “raccordo” per una funzione definita “a pezzi”). Comunque, esso ci permette di escludere tutte le altre possibilità per i punti di discontinuità in  $x_0$  della funzione derivata:

1. Non ci può essere salto per la derivata, altrimenti la derivata destra sarebbe diversa dalla derivata sinistra (per il risultato sopra), e la funzione non sarebbe derivabile in  $x_0$ ;
2. Il valore della derivata non può essere diverso dal valore del limite in  $x_0$  di  $f'$ , sempre per il risultato sopra;
3.  $f'(x)$  non può divergere per  $x \rightarrow x_0$ : in tal caso, il grafico di  $f$  dovrebbe avere tangente verticale e la funzione non sarebbe derivabile.

La lezione si è conclusa con l'esposizione di una proposta didattica sulle equazioni differenziali ordinarie che ho preparato nel quadro dell'attività di Orientamento di Ateneo per gli allievi degli ultimi anni delle scuole superiori: si veda la dispensina “Un'introduzione allo studio qualitativo delle soluzioni di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine”<sup>11</sup>.

**Lezione del 7/3/2003 (4 ore):** *Ancora sulle equazioni differenziali ordinarie.*

Durante la prima parte della lezione, abbiamo ripreso la discussione della mia proposta didattica sulle equazioni ordinarie (vedi lezione precedente). Dopo aver esposto il materiale didattico ed i contenuti della proposta (vedi dispensa)), siamo passati ad analizzare in dettaglio il foglio di esercizi<sup>12</sup> che è stato proposto agli studenti al termine della lezione, ed ho raccontato le reazioni (per lo più positive) degli studenti.

Tutto questo ci ha portati a discutere del teorema di esistenza e unicità delle soluzioni del problema di Cauchy per le equazioni differenziali del primo ordine: tutti noi ne abbiamo vista almeno una dimostrazione, di solito

---

<sup>11</sup> <http://degiorgi.science.unitn.it/~baldo/aa2002/equadiff.pdf>

<sup>12</sup> [http://degiorgi.science.unitn.it/~baldo/aa2002/esercizi\\_equadiff.pdf](http://degiorgi.science.unitn.it/~baldo/aa2002/esercizi_equadiff.pdf)

basata sul teorema delle contrazioni (nello spazio delle funzioni continue con la metrica della convergenza uniforme).

Osservo che, nel quadro di una proposta didattica elementare, la parte “più interessante” della tesi di questo teorema è probabilmente l’unicità: l’esistenza è tutto sommato qualcosa di atteso (specie se interpretiamo geometricamente il secondo membro dell’equazione  $y'(t) = f(t, y(t))$  come un “campo di direzioni” cui una soluzione  $y(t)$  deve essere tangente...). Inoltre, ci sono ampie classi di equazioni per cui esiste una facile ricetta per trovare la soluzione: per esempio, le equazioni lineari del primo ordine, oppure le equazioni a variabili separabili! Oppure, si può abbracciare (turandosi bene il naso) l’atteggiamento spregiudicato di molti fisici, che dicono che se l’equazione differenziale modella un processo reale, ci deve essere per forza una soluzione perché il sistema fisico dovrà pur evolvere in qualche modo...

L’unicità, invece (che verrà interpretata dai nostri amici fisici come “determinismo”, o “ripetibilità dell’esperimento”), può essere provata in modo elementare anche in modo indipendente dall’esistenza:

*LEMMA:* Sia  $y : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione derivabile tale che  $y(a) = 0$  e  $|y'(t)| \leq A|y(t)|$  per ogni  $t \in [a, b]$ , per qualche costante  $A > 0$ . Allora  $y(t) = 0$  per ogni  $t \in [a, b]$ .

DIM.: Sia  $0 < \delta < b - a$ , e denotiamo  $M = \sup\{|y(t)| : t \in [a, a + \delta]\}$ ,  $N = \sup\{|y'(t)| : t \in [a, a + \delta]\}$ . Per ogni  $t \in [a, a + \delta]$  avremo allora, grazie al teorema di Lagrange:

$$|y(t)| = |y(t) - y(a)| = |y'(c)| \cdot |t - a| \leq N |t - a| \leq M A \delta,$$

da cui  $M \leq M A \delta$ , ossia  $(1 - A\delta)M \leq 0$ . Se avremo avuto cura di scegliere  $\delta < 1/A$ , quest’ultima disuguaglianza implica  $M = 0$ , da cui  $y(t) = 0$  in  $[a, a + \delta]$ . Iterando questo procedimento per un numero finito di volte, scopriamo dunque che  $y(t) = 0$  in  $[a, b]$ . Q.E.D.

Consideriamo ora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

dove  $f(t, y)$  è una funzione continua in un intorno di  $(t_0, y_0)$  tale che

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

per ogni  $(t, y_1), (t, y_2)$  in tale intorno (condizione di Lipschitz).

Supponiamo di avere due soluzioni  $y_1(t), y_2(t)$  del problema di Cauchy, definite in uno stesso intorno di  $t_0$ . Applicando il Lemma alla differenza



delle due soluzioni, vediamo che deve essere  $y_1(t) = y_2(t)$  per ogni  $t$ : in altre parole, la soluzione del problema di Cauchy è unica.

Questa dimostrazione dell'unicità è esportabile, senza grandi modifiche, ai *sistemi di equazioni del primo ordine*, e quindi al *problema di Cauchy per equazioni di ordine superiore*.

Per concludere la lezione, ho ricordato che c'è un risultato di *sola esistenza locale*, noto come Teorema di Peano, per il problema di Cauchy scritto sopra quando la funzione  $f$  è *soltanto continua* in un intorno di  $(t_0, y_0)$ : in questo caso, l'unicità in generale non c'è (come si può vedere con semplici controesempi). Ho anche fatto vedere qual è l'idea di una delle tante dimostrazioni possibili: si costruiscono le spezzate di Eulero relative al problema, con passo di discretizzazione sempre più piccolo. Con un ragionamento di compattezza (Teorema di Ascoli-Arzelà), si mostra poi che un'opportuna sottosuccessione converge ad una soluzione del problema di Cauchy.

Per i dettagli di questa dimostrazione del Teorema di Peano (e del teorema di Cauchy-Lipschitz), si veda la dispensa "Teorema di esistenza e unicità per le equazioni differenziali del primo ordine"<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup><http://degiorgi.science.unitn.it/~baldo/vecchicorsi/aa2001/esistenza.pdf>