Diario del Corso di Analisi - II Unità Didattica

Corsi di Laurea: Matematica, Fisica, Fisica Applicata
Docente: Sisto Baldo

ATTENZIONE: Il presente Diario del Corso vuole essere un riassunto abbastanza dettagliato di quello che è stato detto in aula, e come tale può essere un utile sussidio per chi voglia sistemare i propri appunti, o per chi sia stato assente e voglia ricostruire i contenuti di una lezione. D'altra parte, queste brevi paginette NON possono sostituire completamente un libro di testo, la lezione in aula o un'interazione diretta con il docente o l'esercitatrice: siete quindi invitati a servirvi ANCHE di queste altre opportunità per approfondire le vostre conoscenze!

Lezione del 19/2/2003 (2 ore): Nella prima unità didattica, abbiamo usato con qualche disinvoltura una proprietà della derivata che non abbiamo dimostrato. Infatti, abbiamo osservato che siccome la derivata corrisponde geometricamente alla "pendenza del grafico", se una funzione ha derivata positiva in un intervallo, essa sarà ivi crescente.

Questo fatto è intuitivamente vero, perché non si vede come una funzione possa avere il grafico "in salita" in tutti i punti di un intervallo senza essere anche crescente! D'altra parte, non ne abbiamo vista alcuna dimostrazione rigorosa: tale dimostrazione è lo scopo di questa prima lezione.

Cominciamo col ricordare la seguente definizione:

DEFINIZIONE: Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. Un punto $x_0 \in [a, b]$ si dice di *massimo relativo* (risp., di minimo relativo) per f se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)$ (risp., $f(x) \geq f(x_0)$) per ogni $x \in I_{x_0} \cap [a, b]$.

Veniamo ad un primo, semplice risultato: se una funzione è derivabile in un punto di *massimo o minimo relativo interno* all'intervallo di definizione, in quel punto la derivata si deve annullare:

TEOREMA: Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $x_0 \in (a, b)$ *un punto di massimo o minimo relativo per* f*. Se* f *è derivabile in* x_0*, allora* $f'(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo per fissare le idee che x_0 sia di minimo relativo.

Consideriamo il rapporto incrementale per f in x_0:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Se prendiamo h abbastanza piccolo, in modo che x_0+h appartenga all'intorno I_{x_0} nella definizione di minimo relativo, vediamo subito che il numeratore è maggiore o uguale a 0. Ne consegue che il rapporto incrementale sarà positivo (o nullo) per $h > 0$ abbastanza piccolo, e negativo (o nullo) per $h < 0$ abbastanza piccolo in modulo. Ne segue che

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

e contemporaneamente

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Dunque, $f'(x_0) = 0$, Q.E.D.

Si noti che questo teorema può essere falso per punti di massimo o minimo relativo che siano *agli estremi* dell'intervallo su cui f è definita. Per esempio, si consideri la funzione $f(x) = x$ sull'intervallo $[0, 1]$...

Due conseguenze di questo principio sono i teoremi di Rolle e di Lagrange, che sono tra i risultati più importanti del calcolo differenziale per funzioni di una variabile:

TEOREMA (di Rolle): Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua, derivabile nell'intervallo (a, b). Se $f(a) = f(b)$, allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

DIMOSTRAZIONE: Grazie al teorema di Weierstrass, la funzione possiede un punto di massimo assoluto x_M, e uno di minimo assoluto x_m.

Se uno di questi punti appartiene all'interno dell'intervallo, esso è anche di massimo o minimo relativo, e per il principio di Fermat la derivata si deve annullare in quel punto (che sarà dunque il punto c cercato).

In caso contrario, x_m e x_M coincidono con gli estremi a e b dell'intervallo. Allora, per ogni $x \in [a, b]$ si ha

$$f(a) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(b) = f(a),$$

per cui il massimo e il minimo di f coincidono. Ne segue che f è costante, e la sua derivata si annulla in *tutti* i punti dell'intervallo.

TEOREMA (di Lagrange): Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua, derivabile nell'intervallo (a, b). Esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Questa è una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Inoltre $g(a) = f(a) = g(b)$, per cui possimo applicare il teorema di Rolle e ottenere un punto $c \in (a, b)$ tale che $g'(c) = 0$. Questo è proprio il punto cercato. Q.E.D.

A lezione, abbiamo visto che le ipotesi di questi due teoremi non possono essere in generale indebolite, e abbiamo discusso il significato geometrico di questi risultati.

Quel che è più importante, è comunque la seguente conseguenza del teorema di Lagrange:

COROLLARIO: Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, allora f è crescente in $[a, b]$.

Se f' è invece minore o uguale a 0, la funzione è decresente in $[a, b]$. Infine, se $f' = 0$ in tutto l'intervallo, la funzione è costante.

DIMOSTRAZIONE: Facciamo vedere per esempio che vale la prima delle nostre affermazioni: supponiamo che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Siano poi x_1 e x_2 due punti di $[a, b]$, con $x_1 < x_2$. Applichiamo il teorema di Lagrange a f sull'intervallo $[x_1, x_2]$: troviamo $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c).$$

Per l'ipotesi sulla derivata, il membro di destra è maggiore o uguale a zero. Q.E.D.

Come conseguenza del teorema di Lagrange, abbiamo anche ottenuto un risultato semplice e utile: sia f una funzione derivabile in un intorno I_{x_0} di x_0, tranne eventualmente in x_0. Se f è continua in x_0, e se esiste $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell$, allora f è derivabile anche in x_0 e $f'(x_0) = \ell$.

Per ottenere questo risultato è sufficiente applicare il teorema di Lagrange (o il teorema di l'Hôpital) al rapporto incrementale di f in x_0...

Lezione del 20/2/2003 (2 ore): Oggi ci occuperemo del problema di approssimare una funzione regolare, in un intorno di un punto, mediante polinomi.

Supponiamo di avere una funzione f derivabile in x_0: se ci chiedessero qual è la retta che meglio approssima il grafico di f vicino a x_0, probabilmente risponderemmo tutti che è la retta tangente $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$: la cosa è ancora più plausibile se facciamo un disegno!

Vediamo però di precisare meglio (in maniera quantitativa) in che senso la retta tangente è quella che approssima meglio f in un intorno di x_0: se $g(x) = ax + b$ è un polinomio di primo grado che approssima f, possiamo scrivere che $f(x) = g(x) + R(x)$, dove $R(x)$ è un "resto" che vogliamo sia il più piccolo possibile quando x si avvicina a x_0.

Siccome $R(x) = f(x) - a(x - x_0) - b$, notiamo subito che

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = 0 \iff b = f(x_0).$$

In questo senso, tutte le rette che passano per il punto $(x_0, f(x_0)$ "approssimano f", nel senso che il resto tende a zero quando x si avvicina a x_0! Perché, dunque, la retta tangente è meglio delle altre?

Perché è l'unica per cui *il resto tende a zero più rapidamente di* $x - x_0$, cioè è l'unica per cui si abbia

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)} = 0.$$

Infatti, siccome abbiamo già osservato che deve essere $b = f(x_0)$, la quantità di cui dobbiamo fare il limite diventa:

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \to f'(x_0) - a.$$

Dunque, il limite è zero se $a = f'(x_0)$, mentre è non nullo in tutti gli altri casi.

Concludiamo dunque che la retta tangente è la retta di migliore approssimazione intorno a x_0, nel senso che è quella per cui *il resto tende a* 0 *più rapidamente quando* $x \to x_0$!

Nel tentativo di generalizzare quanto appena scoperto, diventa naturale chiedersi qual è il polinomio di grado n che meglio approssima una certa funzione f (che supporremo derivabile quante volte si vuole) in un intorno di x_0. Ci viene il sospetto che sia un polinomio simile alla retta tangente, nel senso che le sue derivate fino alla $n-esima$ nel punto x_0 dovranno coincidere con quelle di f...

Per semplificarci la vita, supponiamo che sia $x_0 = 0$: ci si può sempre ridurre a questa situazione con una traslazione lungo l'asse delle x.

Il *polinomio di Taylor di grado* n *per* f *centrato in* 0 è definito da

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

(Si noti che, ironia della sorte, il polinomio di Taylor "di grado n" ha in realtà grado *minore o uguale a* n...)

LEMMA 1: Sia f *una funzione derivabile* n *volte in* x_0. *Tra tutti i polinomi* $P(x)$ *di grado minore o uguale a* n, *il polinomio di Taylor* $P_n(x)$ *è l'unico tale che* $P(0) = f(x)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$, ..., $P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$.

DIM.: Il generico polinomio di grado minore o uguale a n sarà della forma $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

Ora, derivando h volte il monomio x^k si ottiene $\frac{k!}{(k-h)!} x^{k-h}$ se $h \leq k$, mentre si ottiene 0 per $h > k$. Tale funzione è sempre nulla in 0, tranne che nell'unico caso in cui $h = k$, quando vale $k!$.

Dunque, sostituendo nelle relazioni che abbiamo si ottiene $P(0) = a_0 = f(0)$, $P'(0) = a_1 = f'(0)$, $P''(0) = 2a_2 = f''(0)$, e in generale (per $k \leq n$) $P^{(k)}(0) = k! a_k = f^{(k)}(0)$. Di conseguenza, i coefficienti del polinomio devono essere proprio quelli che abbiamo attribuito al polinomio di Taylor di grado n. Q.E.D.

LEMMA 2: Sia $g(x)$ una funzione derivabile n volte in un intorno di 0, con derivate fino all'n-esima continue in tale intorno. Se $g(0) = g'(0) = g''(0) = \ldots = g^{(n)}(0) = 0$, allora abbiamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0.$$

DIM.: Basta applicare n volte il teorema di L'Hôpital (grazie alle nostre ipotesi, ad ogni passo abbiamo una forma indeterminata 0/0):

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{n x^{n-1}} = \ldots = \lim_{x \to 0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n! x} = \lim_{x \to 0} \frac{g^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

A lezione, abbiamo osservato come modificando leggermente l'ultimo passaggio, lo stesso lemma si possa dimostrare anche se f ha $(n-1)$ derivate continue in un intorno di x_0, ma la derivata n-esima esiste solo in x_0. Q.E.D.

Osservazione: Se g è come nel lemma, ma qualcuna delle derivate di ordine minore o uguale a n è diversa da 0, il limite *non può* essere 0: rifacendo lo stesso calcolo, si trova che è infinito, oppure è un numero diverso da zero.

Come corollario, otteniamo una prima forma del Teorema di Taylor:

TEOREMA (Di Taylor con resto di Peano): Sia f una funzione derivabile n volte in un intorno di 0 con derivate continue in tale intorno. Se $P_n(x)$ denota il polinomio di Taylor di grado n centrato in 0, allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = 0.$$

In altri termini, si ha $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ per $x \to 0$.

Tra tutti i polinomi di grado minore o uguale a n, il polinomio di Taylor è l'unico ad avere questa proprietà.

DIM.: Grazie al Lemma 1, la funzione $g(x) = f(x) - P_n(x)$ soddisfa le ipotesi del Lemma 2, e il teorema risulta dimostrato. L'unicità del polinomio di Taylor rispetto a questa proprietà segue dall'Osservazione fatta dopo la dimostrazione del Lemma 2. Q.E.D.

Osservazione: Grazie a quanto osservato nel Lemma2, il teorema rimane vero se chiediamo che f abbia $n-1$ derivate continue in un intorno di 0, e possieda la derivata n-esima in 0.

Osservazione: Se al posto di 0 prendiamo un generico punto x_0, il polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 sarà

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

In questo caso, il teorema di Taylor dice che se f è derivabile $(n-1)$ volte in un intorno di x_0, e possiede derivata n-esima in x_0, allora

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n).$$

Lezione del 26/2/2003 (2 ore): Cominciamo con l'applicazione della formula di Taylor con resto di Peano allo studio dei massimi e dei minimi relativi di una funzione. L'idea è che spesso, per capire se un punto in cui la derivata prima si annulla è di massimo o minimo relativo, basta studiare il segno della derivata seconda:

TEOREMA: Sia f una funzione derivabile k volte in x_0 ($k \geq 2$), e supponiamo che le prime $k-1$ derivate esistano in un intorno di x_0. Supponiamo anche che $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, mentre $f^{(h)}(x_0) = 0$ per $h = 1, \ldots, k$ (in altre parole, la prima derivata che non si annulla è la k-esima).

Allora

- *se k è dispari, x_0 non è né di massimo relativo né di minimo relativo;*
- *se k è pari e $f^{(k)}(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo;*
- *se k è pari e $f^{(k)}(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo.*

noindent DIM.: Si tratta di studiare il segno della funzione $f(x) - f(x_0)$ quando x varia in un intorno sufficientemente piccolo di x_0: se tale funzione è positiva siamo in presenza di un punto di minimo relativo, se è negativa di un massimo (mentre se essa cambia di segno in ogni intorno, comunque piccolo, di x_0, il punto non è né di massimo né di minimo).

Se prendiamo x abbastanza vicino a x_0 in modo che valgano le ipotesi del teorema di Taylor, otteniamo

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_k(x) = [\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{R_k(x)}{(x - x_0)^k}](x - x_0)^k.$$

Siccome $R_k(x) = o((x - x_0)^k)$, la quantità tra parentesi quadre tende a $f^{(k)}(x_0)/k!$ per $x \to x_0$. Di conseguenza, essa *avrà lo stesso segno* di $f^{(k)}(x_0)$ quando x varia in un intorno sufficientemente piccolo di x_0. Poiché è invece chiaro che il polinomio $(x - x_0)^k$ è sempre positivo per k pari, mentre cambia di segno per k dispari (a seconda che x stia a destra o a sinistra di x_0), la tesi segue immediatamente. Q.E.D.

Osservazione: Il teorema appena dimostrato ci dice che se $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, allora $f(x) > f(x_0)$ (con la disuguaglianza stretta) se x è sufficientemente vicino a x_0: in altre parole, il punto in questione *è un punto di minimo relativo, ma certamente non di massimo relativo.*

Questo ci permette di invertire in parte il risultato precedente: se f è derivabile due volte in un intorno di x_0 e x_0 è di massimo relativo, allora $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$ (La derivata prima si annulla pre il principio di Fermat, mentre la seconda non può essere positiva perché se lo fosse il risultato precedente mi darebbe un punto di minimo relativo "stretto", il che sarebbe assurdo!). Analogamente, in un punto di minimo relativo deve essere $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$.

In molti casi, il nostro teorema permette di stabilire se un punto in cui si annulla la derivata prima corrisponde ad un massimo o minimo relativo: basta trovare la prima derivata diversa da zero (a patto che la funzione sia derivabile abbastanza volte)! Può però capitare che la funzione sia derivabile infinite volte, ma *tutte* le derivate si annullino nel punto che ci interessa:

ESEMPIO: Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$$

Con un po' di fatica si vede che f è derivabile infinite volte in 0, e che tutte le derivate si annullano (abbiamo visto la dimostrazione a lezione: il punto chiave è far vedere, per esempio per induzione, che per $x \neq 0$ si ha

$$f^{(k)}(x) = \frac{g_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2},$$

dove $g_n(x)$ è un polinomio di grado al più $(2n - 2)$... A questo punto, basta passare al limite per $x \to 0$ per concludere che la derivata k-esima si annulla nell'origine).

D'altra parte, siccome la funzione f è non negativa, è evidente che 0 è un punto di minimo relativo.

Conviene tenere presente la funzione f di questo esempio: tornerà utile tra non molto!

Dimostriamo ora una versione leggermente più generale del teorema di Lagrange, che ci tornerà utile per trovare subito dopo un'espressione molto precisa del resto nella formula di Taylor.

TEOREMA (di Cauchy): Siano $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *due funzioni continue, derivabili in* (a, b)*. Supponiamo poi che* $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$*. Allora esiste* $c \in (a, b)$ *tale che*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

DIM.: Si noti che risulta $g(b) \neq g(a)$ (altrimenti otterremo un assurdo col teorema di Rolle): di conseguenza, il denominatore del secondo membro nella tesi non si annulla, e il teorema ha perfettamente senso.

Per dimostrarlo, basta applicare il teorema di Rolle alla funzione ausiliaria $h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$. Q.E.D.

TEOREMA (Formula di Taylor con resto di Lagrange): Sia f *una funzione derivabile* $(n+1)$ *volte in un intorno di* x_0*, e sia* x *un punto appartenente a tale intorno. Allora esiste un punto* c*, compreso tra* x_0 *e* x*, tale che*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

dove

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

è il polinomio di Taylor di grado n *centrato in* x_0*.*

DIM.: Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - P_n(x)$. Abbiamo visto la volta scorsa che essa ha la fondamentale proprietà di avere $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$. L'idea è ora di applicare $(n+1)$ volte il teorema di Cauchy, a partire dal rapporto

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}}.$$

Infatti, il teorema di Cauchy applicato a tale espressione ci garantisce l'esistenza di un punto c_1 compreso tra x_0 e x, tale che l'espressione stessa è uguale a

$$\frac{g'(c_1)}{(n+1)(c_1-x_0)^n}.$$

L'ultima quantità può essere anche riscritta

$$\frac{g'(c_1)-g'(x_0)}{(n+1)(c_1-x_0)^n-(n+1)(x_0-x_0)^n},$$

e possiamo riapplicare il teorema di Cauchy... Ripetendo questo passaggio per $(n+1)$ volte troviamo:

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\ldots=\frac{g^{(n)}(c_n)-g^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(c_n-x_0)}=\frac{g^{(n)}(c)}{(n+1)!}=\frac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!},$$

dove $c_1,\ldots,c_n,c$ sono opportuni punti compresi tra x_0 e x. Q.E.D.

Lezione del 27/2/2003 (2 ore): Mettiamo subito a frutto il teorema dimostrato ieri, usandolo per approssimare alcune importanti funzioni con polinomi.

Cominciamo col prendere $f(x)=e^x$ (e $x_0=0$): la formula di Taylor con resto di Lagrange ci dice che esiste un punto c compreso tra 0 e x tale che

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Dimostriamo ora che il resto, qualunque sia $x\in\mathbf{R}$, tende a 0 per $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}=0\qquad\forall x\in\mathbf{R}.$$

Si noti che, anche se c dipende in generale sia da x che da n, la quantità e^c è maggiorata da $e^{|x|}$, per cui ci basterà far vedere che $x^{n+1}/(n+1)!\to 0$ per $n\to+\infty$. Questo fatto, a sua volta, si dimostra immediatamente ricordando la stima

$$n!\geq(\frac{n}{3})^n,$$

che abbiamo provato per induzione.

In conclusione, abbiamo fatto vedere che

$$e^x=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

L'ultimo limite si chiama *serie di Taylor di e^x*, e si denota usualmente con $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$:

DEFINIZIONE: Se $\{a_k\}$ è una successione di numeri reali, col simbolo $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ (che si legge *"serie degli a_k"*, si intende per definizione il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

a patto che tale limite esista. Se il limite è finito, si dice che la serie *converge*, se è infinito che *diverge*, se infine non esiste si dice che la serie *è indeterminata*.

Con lo stesso tipo di conti, abbiamo poi verificato che si ha anche

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Si hanno analoghe serie di Taylor per molte delle funzioni elementari, alcune delle quali non convergono su tutto $\mathbf{R}$, ma solo su intervalli più piccoli: ad esempio si ha

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

per $-1 < x \leq 1$ (non abbiamo però dato, per il momento, una dimostrazione della convergenza).

A questo punto, sorge spontanea la seguente questione: se f è una funzione derivabile infinite volte in x_0, è sempre possibile trovare un intorno di x_0 tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k?$$

La risposta è negativa:

ESEMPIO: Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \textit{se } x \neq 0 \\ 0 & \textit{se } x = 0 \end{cases}$$

già studiata ieri in un altro contesto: abbiamo visto che essa è derivabile infinite volte in 0, e che tutte le derivate si annullano.

Ne segue che la serie di Taylor centrata in 0 per f è identicamente nulla, e quindi evidentemente essa coincide con f solo per $x = 0$.

Le funzioni la cui serie di Taylor converge alla funzione stessa in un intorno di x_0 si dicono *analitiche in* x_0: la funzione dell'esempio non è analitica in 0, mentre la funzione esponenziale, il seno ed il coseno lo sono.

Come ulteriore applicazione del teorema di Taylor con resto di Lagrange, dimostriamo che *il numero di Nepero e è irrazionale.*

Supponiamo infatti per assurdo che si abbia $e = p/q$, con p e q numeri naturali. Applichiamo il teorema di Taylor con resto di Lagrange alla funzione esponenziale, con $x_0 = 0$ e $x = 1$: per ogni $n \in \mathbf{N}$ troviamo un punto $c \in (0, 1)$ tale che

$$e = \frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + e^c \frac{1}{n + 1!}.$$

Prendiamo $n > q$, e moltiplichiamo ambo i membri dell'identità per $n!$. Otteniamo:

$$\frac{p}{q} n! = \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) \cdot n! + \frac{e^c}{n + 1}.$$

Il membro di sinistra dell'uguaglianza è evidentemente un intero, così come il primo pezzo del membro di destra (la quantità tra parentesi tonde moltiplicata per $n!$). Invece, l'ultimo termine si maggiora con $e/(n + 1)$ (perché $c < 1$), e quest'ultima quantità è strettamente minore di 1 per n abbastanza grande: questo è evidentemente assurdo (un intero non può essere uguale ad un intero più una quantità minore di 1).

Lezione del 3/3/2003 (2 ore): In questa lezione, cominceremo a studiare una definizione rigorosa di area per certe figure piane delimitate da un contorno curvilineo. Questo ci porterà a dare la definizione di integrale nel senso di Riemann per una funzione $f : [a, b] \to \mathbf{R}$.

Partiamo da un esempio concreto: supponiamo di voler dare un senso all'area della regione limitata del piano delimitata dall'asse delle x, dal grafico della funzione $f(x) = e^x$, dall'asse delle y e dalla retta $x = a$: si tratta di una specie di trapezio rettangolo, solo che il lato obliquo è curvo (è infatti il grafico della funzione e^x.

Un'idea potrebbe essere la seguente: dividiamo l'intervallo $[0, a]$ in n intervallini uguali (che avranno quindi estremi $0, a/n, 2a/n, 3a/n, \ldots, a$). Per ciascuno di questi intervallini, costruiamo un rettangolo che ha il rettangolino stesso come base, e altezza uguale al valore della funzione esponenziale *nell'estremo di sinistra*: in altre parole, sull'intervallino $[ka/n, (k+1)a/n]$ costruiamo un rettangolo di altezza $e^{ka/n}$. In questo modo otteniamo una figura "a scala" che è tutta *contenuta* nella figura curvilinea di cui vogliamo calcolare l'area: l'area di questa scala inscritta si calcola subito, e vale

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n} e^{ka/n} = \frac{a}{n} \cdot \frac{e^a - 1}{e^{a/n} - 1}.$$

L'ultima espressione, per $n \to +\infty$, tende al numero $(e^a - 1)$, che rappresenta quindi il limite delle nostre approssimazioni per difetto.

In maniera analoga, possiamo costruire una "scala circoscritta" alla regione che ci interessa, prendendo su ciascun intervallino $[ka/n, (k+1)a/n]$ un rettangolo di altezza $e^{(k+1)a/n}$. In tal caso, l'area della scalinata sarà

$$e^{a/n} \frac{a}{n} \cdot \frac{e^a - 1}{e^{a/n} - 1},$$

che tende ancora al limite $e^a - 1$. Possiamo dunque legittimamente affermare che l'area del trapezoide curvilineo sotto la funzione esponenziale tra 0 e a, vale esattamente $e^a - 1$: tale numero si chiama *integrale* della funzione esponenziale tra 0 e a, e si indica

$$\int_0^a e^x \, dx = e^a - 1.$$

Volendo estendere quest'idea in modo sistematico al maggior numero possibile di funzioni, cominciamo col definire le *funzioni a scala* ed il loro integrale:

Definizione: Una funzione $\phi : [a, b] \to \mathbf{R}$ si dice *a scala* se esiste una suddivisione di $[a, b]$ in un numero finito di intervallini di estremi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$, in modo tale che ϕ assuma valore costante c_i su ciascun intervallino (x_i, x_{i+1}) (per $i = 0, \ldots, N-1$).

L'*integrale* della suddetta funzione a scala si definisce come

$$\int_a^b \phi(x) \, dx = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) c_i.$$

Si noti che, se ϕ è positiva, l'integrale della funzione a scala è semplicemente l'area dell'unione finita di rettangoli delimitata dal grafico di ϕ, l'asse delle x e le rette verticali $x = a$ e $x = b$. Se ϕ ha anche tratti negativi, l'unica differenza è che gli scalini con "altezza negativa" si contano con "area negativa".

Le funzioni a scala ed il loro integrale godono delle seguenti proprietà, la cui dimostrazione è lasciata alla riflessione del lettore:

LEMMA: Se ϕ_1 e ϕ_2 sono funzioni a scala su $[a, b]$, e $c \in \mathbf{R}$, allora

- *$c\phi_1$ e $\phi_1 + \phi_2$ sono funzioni a scala;*
- *l'integrale è lineare:*

$$\int_a^b (c\phi_1(x))\, dx = c\int_a^b \phi_1(x)\, dx$$
$$\int_a^b (\phi_1(x) + \phi_2(x))\, dx = \int_a^b \phi_1(x)\, dx + \int_a^b \phi_2(x)\, dx;$$

- *l'integrale è monotono: se $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora*

$$\int_a^b \phi_1(x)\, dx \leq \int_a^b \phi_2(x)\, dx.$$

Siamo ora in grado di definire l'integrale superiore, l'integrale inferiore ed eventualmente l'integrale di una funzione limitata:

DEFINIZIONE: Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione limitata. L'*integrale superiore* di f si definisce come

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf\{\int_a^b \phi(x)\, dx :\ \phi \text{ a scala},\ \phi \geq f \text{ in } [a, b]\}.$$

Analogamente, l'*integrale inferiore* di f si definisce come

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{\int_a^b \psi(x)\, dx :\ \psi \text{ a scala},\ \psi \leq f \text{ in } [a, b]\}.$$

Se l'integrale superiore e l'integrale inferiore coincidono, diremo che *la funzione f è integrabile secondo Riemann* in $[a, b]$, ed indicheremo il valore comune dei due integrali con

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

integrale secondo Riemann di f su $[a, b]$.

Vale una semplice caratterizzazione dell'integrale di Riemann, che permette tra l'altro di verificare la correttezza di quanto trovato sopra per l'integrale della funzione esponenziale:

PROPOSIZIONE: Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione limitata. f è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ si possono trovare due funzioni a scala ϕ, ψ con $\psi \leq f \leq \phi$ in $[a, b]$ tali che

$$\int_a^b \phi(x)\, dx - \int_a^b \psi(x)\, dx < \varepsilon.$$

DIM.: Se f è integrabile, per definizione di integrale superiore e di integrale inferiore possiamo trovare due funzioni a scala ϕ e ψ, la prima maggiore o uguale e la seconda minore o uguale a f, tali che

$$\int_a^b \phi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon/2,$$
$$\int_a^b \psi(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon/2,$$

da cui

$$\int_a^b \phi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx < \varepsilon.$$

Viceversa, prendiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo le due funzioni a scala ϕ, ψ che ci vengono assicurate dall'ipotesi.

Per definizione di integrale superiore e di integrale inferiore avremo

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \geq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$
$$\int_a^b \psi(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

per cui

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \int_a^b \phi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx < \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε, ne deriva che l'integrale superiore e l'integrale inferiore sono uguali. Q.E.D.

Vediamo ora un esempio di funzione *non integrabile* secondo Riemann:

ESEMPIO (Funzione di Dirichlet): Si consideri la funzione $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in \mathbf{Q} \\ 0 & se\ x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Abbiamo già visto questa funzione durante la prima unità, ed abbiamo osservato che essa è ovunque discontinua. Attualmente, invece, ci preme di osservare che *una funzione a scala maggiore o uguale a f sarà ovunque maggiore o uguale a* 1, e che *una funzione a scala minore o uguale a f è ovunque minore o uguale a* 0. Questo segue dalla densità dei razionali e degli irrazionali: in ogni "scalino" di qualunque funzione a scala, esistono sia punti razionali in cui la funzione vale 1, che punti irrazionali in cui essa vale 0.

Se ne deduce che

$$\overline{\int_0^1} f(x)\, dx = 1, \qquad \underline{\int_0^1} f(x)\, dx = 0,$$

e la funzione non è integrabile secondo Riemann.

Lezione del 6/3/2003 (2 ore): Per prima cosa, possiamo verificare che l'integrale delle funzioni integrabili secondo Riemann gode delle stesse proprietà di linearità dell'integrale delle funzioni a scala (si veda il Lemma enunciato la volta scorsa):

PROPOSIZIONE: Siano $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *due funzioni integrabili secondo Riemann,* $c \in \mathbf{R}$. *Allora le funzioni* $c \cdot f$ *e* $f + g$ *sono integrabili secondo Riemann e si ha*

$$\int_a^b c \cdot f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$$
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

DIM.: Supponiamo dapprima $c > 0$. L'integrabilità della funzione $c \cdot f$ (e la prima delle due identità nella tesi) segue subito se si osserva che l'insieme delle funzioni a scala maggiori o uguali a $c \cdot f$ coincide con l'insieme delle funzioni a scala maggiori o uguali a f moltiplicate per c. Poiché per le funzioni a scala è lecito "portare la costante c fuori dal segno di integrale" (si veda il lemma enunciato la volta scorsa), ne deduciamo che

$$\overline{\int_a^b} c \cdot f(x)\, dx = c \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

Un'identità del tutto analoga vale per l'integrale inferiore, da cui la tesi.

Se invece $c < 0$ (il caso $c = 0$ è ovvio!), l'unico cambiamento da fare viene dal fatto che una funzione a scala maggiorante per f moltiplicata per c, darà una funzione a scala minorante per $c \cdot f$.

Veniamo alla somma: osserviamo che

$$\{\Phi :\ \Phi \text{ } a \text{ } scala,\ \Phi \geq f + g\} \supset \{\phi_1 + \phi_2 :\ \phi_1, \phi_2 \text{ } a \text{ } scala,\ \phi_1 \geq f,\ phi_2 \geq g\},$$

da cui, ricordando la definizione di integrale superiore:

$$\overline{\int_a^b} [f(x) + g(x)]\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \leq \overline{\int_a^b} g(x)\, dx.$$

(A lezione abbiamo visto un esempio che mostra come, se togliamo l'ipotesi che f e g siano integrabili, possa anche succedere che valga la disuguaglianza stretta).

Analogamente, per gli integrali inferiori si ottiene

$$\underline{\int_a^b}[f(x)+g(x)]\,dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \leq \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Mettendo assieme le due disuguaglianze e ricordando l'integrabilità di f e g otteniamo

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b}[f(x)+g(x)]\,dx \leq \overline{\int_a^b}[f(x)+g(x)]\,dx \leq$$
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

da cui la tesi. Q.E.D.

Altra proprietà dell'integrale che ci sarà piuttosto utile, è l'additività rispetto all'intervallo di integrazione:

PROPOSIZIONE: Se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *è integrabile,* $c \in (a,b)$ *si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Lasciamo per esercizio la facile dimostrazione.

Se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è integrabile secondo Riemann, poniamo poi *per definizione*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Con questa posizione, la proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo vale *in generale*, anche se c non è compreso tra a e b (in tal caso, f dovrà essere integrabile sul più grande tra gli intervalli coinvolti...).

A questo punto, diventa importante far vedere che tutte le funzioni "abbastanza decenti" sono integrabili. Per esempio, sono integrabili le funzioni monotone e le funzioni continue:

TEOREMA: Se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *è crescente (decrescente), allora è integrabile secondo Riemann.*

DIM.: Per fissare le idee, trattiamo il caso in cui f sia crescente.

Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n parti uguali (lunghe $(b-a)/n$), di estremi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Definiamo una funzione a scala maggiorante ϕ_n e una funzione a scala minorante ψ_n nel modo seguente: nell'i-esimo intervallino $[x_i, x_{i+1})$, poniamo ϕ_n uguale a $f(x_{i+1})$, e ψ_n uguale a $f(x_i)$.

Si ha

$$\int_a^b \phi_n(x)\, dx - \int_a^b \psi_n(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] =$$
$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)],$$

e l'ultima quantità può essere resa piccola a piacere a patto di prendere n abbastanza grande. Q.E.D.

TEOREMA (Integrabilità delle funzioni continue): Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile secondo Riemann.

La dimostrazione di questo teorema è molto meno semplice di quella che abbiamo dato per le funzioni monotone: in effetti, abbiamo bisogno di un concetto nuovo, quello di *uniforme continuità*.

DEFINIZIONE: Una funzione f si dice *uniformemente continua* su un intervallo I se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in I$ con $|x-y| < \delta$, si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

In questa definizione chiediamo qualcosa di più della continuità in tutti i punti di I: stiamo infatti pretendendo che δ dipenda da ε, ma non dal punto in cui andiamo a valutare la continuità. Lo stesso δ deve funzionare in tutti i punti dell'intervallo I!

In effetti, se è vero che ogni funzione uniformemente continua in I è anche continua in I, il viceversa può essere falso: per esempio, la funzione $f(x) = x^2$ è continua in tutti i punti della retta reale, ma non è uniformemente continua su $\mathbf{R}$.

Se però consideriamo soltanto intervalli chiusi e limitati, i due concetti coincidono:

TEOREMA (di Heine-Cantor): Una funzione continua $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è anche uniformemente continua.

Vedremo la dimostrazione la prossima volta: per il momento, utilizziamo il teorema per provare l'integrabilità delle funzioni continue.

DIM.(del Teorema di integrabilità delle funzioni continue): Sia $\varepsilon > 0$. Per il teorema di Heine-Cantor, f è uniformemente continua su $[a,b]$, e possiamo trovare $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ quando $x, y \in [a,b]$ e $|x-y| < \delta$.

In particolare, se I è un qualunque sottointervallo di $[a, b]$ di lunghezza minore di δ, avremo

$$\sup\{f(x) : \ x \in I\} - \inf\{f(x) : \ x \in I\} \leq \varepsilon.$$

Scegliamo ora n abbastanza grande, in modo che $(b-a)/n < \delta$, e suddividiamo $[a, b]$ in n parti uguali tramite i punti $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Definiamo una funzione a scala maggiorante ϕ_n ed una minorante ψ_n nel modo seguente: sull'i-esimo intervallino $[x_i, x_{i+1})$, la funzione ϕ_n vale $M_i = \sup\{f(x) : \ x \in [x_i, x_{i+1}]\}$, mentre ψ_n vale $m_i = \inf\{f(x) : \ x \in [x_i, x_{i+1}]\}$. Per quanto visto sopra, sarà $M_i - m_i \leq \varepsilon$.

Abbiamo

$$\int_a^b \phi_n(x)\, dx - \int_a^b \psi_n(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n}(M_i - m_i) \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} = \varepsilon(b-a),$$

e questa quantità può essere presa piccola a piacere. Q.E.D.

Lezione del 12/3/2003 (2 ore): Nella scorsa lezione, per far vedere che le funzioni continue sono integrabili abbiamo usato il Teorema di Heine-Cantor: una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua. Ci proponiamo ora di dimostrare questo teorema, e per farlo avremo bisogno di una definizione e di un lemma:

DEFINIZIONE: Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è continua e $I \subset [a, b]$ è un intervallo chiuso, l'*oscillazione di f su I* è la quantità

$$\mathrm{Osc}(I, f) = \max\{f(x) : \ x \in I\} - \min\{f(x) : \ x \in I\}.$$

LEMMA: Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è continua e $\varepsilon > 0$, è possibile suddividere $[a, b]$ in un numero finito di sottointervalli chiusi (disgiunti a parte gli estremi) in modo tale che $\mathrm{Osc}(I, f) < \varepsilon$ in ogni intervallo I della suddivisione.

DIM.: Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa. Dovrebbe allora esistere $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni suddivisione finita di $[a, b]$ in intervalli chiusi, esiste almeno un intervallo I della suddivisione tale che $\mathrm{Osc}(I, f) \geq \varepsilon_0$.

Dividiamo $[a, b]$ in due parti uguali: in una delle due metà, che chiameremo $[a_1, b_1]$, deve essere ancora vero che in *ogni* sua suddivisione finita in intervalli chiusi c'è almeno un intervallo su cui l'oscillazione supera ε_0 (se così non fosse, la cosa non succederebbe neanche in $[a, b]$!).

Possiamo proseguire: dividiamo $[a_1, b_1]$ in due parti uguali e ne troviamo una (che chiamiamo $[a_2, b_2]$) con la stessa proprietà... In questo modo, troviamo una successione decrescente di intervalli $[a_n, b_n]$ tali che

$b_n - a_n = (b-a)2^{-n}$, e per costruzione avremo $\text{Osc}([a_n, b_n], f) \geq \varepsilon_0$. D'altra parte, la successione a_n è crescente, e tenderà a un certo punto $\overline{x} \in [a,b]$. Evidentemente, avremo anche $b_n \to \overline{x}$.

Supponiamo per semplicità che $\overline{x}$ sia un punto interno di $[a,b]$: le modifiche da fare se è uno degli estremi sono intuibili. Siccome f è continua in $\overline{x}$, esiste $\delta > 0$ tale che $|x - \overline{x}| \leq \delta$ implica $|f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon_0/4$. Ma allora $\text{Osc}([\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta]) < \varepsilon_0$, il che è assurdo perché $[a_n, b_n] \subset [\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta]$ per n abbastanza grande. Q.E.D.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI HEINE-CANTOR: Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Devo mostrare che è uniformemente continua: per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se $x, y \in [a,b]$, $|x - y| \leq \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Per il Lemma, possiamo trovare una suddivisione finita di $[a,b]$ in intervalli chiusi, in modo tale che l'oscillazione di f in ogni intervallo della suddivisione sia minore di $\varepsilon/2$. Sia δ la lunghezza del *più piccolo* di tali intervalli. Se $x, y \in [a,b]$, $|x - y| < \delta$, i due punti x e y apparterranno allo stesso intervallo della suddivisione, o alla peggio a *due intervalli adiacenti.* Poiché l'oscillazione di f su ciascuno di questi due intervalli è minore di $\varepsilon/2$, avremo $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Q.E.D.

Siamo ora in grado di dimostrare i due risultati principali della teoria dell'integrazione: il teorema della media ed il teorema fondamentale del calcolo integrale.

TEOREMA (Della media integrale): Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Esiste un punto $c \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c) \cdot (b-a).$$

DIM.: Sia $M = \max\{f(x) :\ x \in [a,b]\}$, $m = \min\{f(x) :\ x \in [a,b]\}$.

Per la monotonia dell'integrale, avremo $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$, per cui la quantità

$$\frac{1}{b-a} \int_1^b f(x)\, dx$$

(che è detta *media integrale*) è compresa tra m e M.

Per il teorema dei valori intermedi, f assume tutti i valori compresi tra m e M, e quindi anche il valore corrispondente alla media integrale! Q.E.D.

TEOREMA (teorema fondamentale del calcolo integrale): Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua, e definiamo la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Allora F è derivabile, e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

DIM.: Consideriamo il rapporto incrementale della funzione F nel punto x. Ricordando l'additività dell'integrale rispetto all'intervallo si ha:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$

Applicando il Teorema della media all'ultimo integrale troviamo un punto c compreso tra x e $x + h$ tale che

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c).$$

Passando al limite per $h \to 0$, avremo $c \to x$ e $f(c) \to f(x)$ (perché f è continua), da cui

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Q.E.D.

DEFINIZIONE: Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, una *primitiva* di f è una funzione $G : [a, b] \to \mathbf{R}$ tale che $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che la funzione integrale è una primitiva dell'integranda. Ora, spesso è facile "indovinare" una primitiva di una funzione f (e vedremo presto delle tecniche per trovare in modo più sistematico le primitive di moltissime funzioni elementari). Se ci riusciamo, siamo anche in grado di calcolare l'integrale di f:

PROPOSIZIONE: Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua, $G : [a, b] \to \mathbf{R}$ una qualunque primitiva di f. Allora

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a).$$

DIM.: Per il Teorema fondamentale, anche la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ è una primitiva di F. Ne segue che la funzione $F(x) - G(x)$ ha derivata nulla in $[a, b]$, e quindi è costante: esiste $C \in \mathbf{R}$ tale che

$$F(x) = G(x) + C$$

per ogni $x \in [a, b]$. Siccome $F(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$, ponendo $x = a$ nell'ultima identità troviamo $C = -G(a)$, da cui $F(x) = G(x) - G(a)$. In particolare, per $x = b$ si ha la tesi. Q.E.D.

ESEMPI:

- Se $f(x) = e^x$, riconosciamo subito che una primitiva è data dalla funzione $G(x) = e^x$, e quindi

$$\int_0^a e^x \, dx = G(a) - G(0) = e^a - 1.$$

Abbiamo così rapidamente riottenuto un risultato che ci eravamo conquistati con una certa fatica a partire dalla definizione di integrale!

- Se $f(x) = mx$, si vede che una primitiva è $G(x) = mx^2/2$, quindi

$$\int_a^b mx \, dx = m(b^2 - a^2)/2.$$

Possiamo convincerci della veridicità di questa formula se osserviamo che geometricamente l'integrale appena calcolato rappresenta l'area di un trapezio rettangolo di altezza $(b - a)$ e basi ma e mb.

- Se $f(x) = \sin x$, una primitiva sarà $G(x) = -\cos x$. Quindi

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = -cos(\pi) - (-cos(0)) = 2,$$

risultato che non sarebbe stato facile prevedere in altro modo!

Lezione del 13/3/2003 (2 ore): Abbiamo visto ieri che è facilissimo calcolare l'integrale di una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ se se ne conosce una primitiva G: oggi cercheremo di studiare questo problema in modo più sistematico. Conviene stabilire un nome (ed una notazione) per l'insieme di tutte le primitive di una funzione f:

DEFINIZIONE: Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è una funzione continua, l'insieme delle primitive $G : [a, b] \to \mathbf{R}$ (cioè l'insieme delle funzioni derivabili la cui derivata è uguale ad f), si chiama *integrale indefinito di* f, e si denota con il simbolo $\int f(x) \, dx$:

$$\int f(x) \, dx = \{G : [a, b] \to \mathbf{R} : \; G'(x) = f(x) \; \forall x \in [a, b]\}.$$

Grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale e a quanto osservato la volta scorsa, sappiamo che la funzione integrale è una primitiva di f, e anche che due primitive diverse differiscono per una costante, dunque:

$$\int f(x) \, dx = \{\int_a^x f(t) \, dt + C : \; C \in \mathbf{R}\}.$$

Con lieve abuso di notazione, se G è una qualunque primitiva di f si scrive $\int f(x)\,dx = G(x) + C$, con C *costante arbitraria*.

Se ora prendiamo una tabella delle derivate delle funzioni elementari, e la leggiamo al contrario, troviamo la seguente tabella di integrali indefiniti "immediati":

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^a (con $a \neq -1$)	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
$1/x$	$\log\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Altre regole di integrazione vengono direttamente dalle regole di derivazione della somma e del prodotto:

- $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ (additività),
- $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$,
- $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ (formula di integrazione per parti).

Dalla formula per la derivata della funzione composta viene poi un'utile formula di *integrazione per sostituzione*: se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Se "cambiamo variabile" ponendo $y = f(x)$, l'identità appena scritta diventa $\int f(y)\,dy = \int f(g(x))g'(x)\,dx$. Questa formula può essere ricordata nel seguente modo, poco ortodosso ma efficace: usando la notazione di Leibniz per la derivata, abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(g(x))}{dx} = g'(x)\,dx,$$

e moltplicando ambo i membri per dx (cosa che *ovviamente* non ha alcun senso!) otteniamo l'identità $dy = d(g(x)) = g'(x)\,dx$, che sostituita nell'integrale $\int f(y)\,dy$ ci restituisce la formula voluta...

Evidentemente, abbiamo commesso più di un crimine matematico: la derivata NON è un rapporto, e il simbolo dx nell'integrale NON ha un significato matematico ben definito (se non quello di indicare la variabile indipendente rispetto alla quale si integra). D'altra parte, la notazione per la derivata e l'integrale si è rivelata suggestiva: agendo senza farci troppi scrupoli, abbiamo comunque ottenuto un risultato corretto (infatti lo avevamo già giustificato partendo dalla formula di derivazione di funzioni composte!).

ESEMPI:

1. Si voglia calcolare $\int \cos^2 x \; dx$. Per una nota identità trigonometrica, abbiamo $\sin^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ da cui

$$\int \cos^2 x \; dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \; dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int \cos 2x \; d(2x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

2. Calcoliamo poi $\int \sqrt{1-x^2} \; dx$. Poniamo $x = \sin y$, da cui (OK, non è ortodosso ma abbiamo verificato che funziona): $dx = \cos y \; dy$ e

$$\int \sqrt{1-x^2} \; dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y \; dy = \int \cos^2 y \; dy = \frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4} + C.$$

   Ora, $x = \arcsin y$ e $\cos y = \sqrt{1-x^2}$, da cui $\sin 2y = 2x\sqrt{1-x^2}$ e l'integrale cercato vale $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$.

   L'integrale definito di questa funzione tra -1 e 1 vale allora $\pi/2$... e questo ha un semplice significato geometrico: quale? Questa è un'ulteriore conferma del fatto che l'integrale di Riemann è l'oggetto giusto per definire l'area di oggetti curvilinei del piano dal contorno abbastanza regolare!

3. Calcoliamo $\int \log x \; dx$. Integrando per parti si ha: $\int \log x \; dx = \int 1 \cdot \log x \; dx = \int (x)' \log x \; dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \; dx = x \log x - x + C$.

4. Calcoliamo $\int e^x \sin x \; dx$. Integrando due volte per parti si ottiene: $\int e^x \sin x \; dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \; dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \; dx$. Portando l'ultimo integrale a primo membro si ottiene subito

$$\int e^x \sin x = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C.$$

5. Calcoliamo

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \; dx.$$

Poniamo $y = 1 - x^2$, da cui: $dy = -2x\, dx$ e l'integrale diventa

$$-\frac{1}{2}\frac{dy}{\sqrt{y}} = -\sqrt{y} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Oppure, con un uso disinvolto della formula di integrazione per sostituzione:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = -\sqrt{1-x^2}+C.$$

6. Si voglia calcolare $\int \sin\sqrt{x}\, dx$. Si ottiene subito il risultato ponendo $\sqrt{x} = y$, e integrando per parti.

7. Per calcolare l'integrale $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$, si operi la sostituzione $\sqrt{1+x^2} = y - x$...

Per concludere la lezione, osserviamo che a volte può essere desiderabile estendere la nozione di integrale ad intervalli *illimitati* (ossia a semirette). Diamo la seguente

DEFINIZIONE: Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua. L'integrale (improprio o generalizzato) di f sulla semiretta $[a, +\infty)$ si definisce come

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\, dx$$

a patto che il limite esista.

A titolo di esempio, abbiamo verificato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$, mentre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty$ e infine $\int_0^{+\infty} \sin x\, dx$ non esiste.

Lezione del 19/3/2003 (2 ore): In modo analogo a quanto abbiamo fatto la volta scorsa, possiamo definire l'integrale (generalizzato) di una funzione continua su un intervallo *aperto in uno dei suoi estremi*: se per esempio $f : (a, b] \to \mathbf{R}$ è continua, definiamo

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\delta \to a^+} \int_\delta^b f(x)\, dx,$$

a patto che il limite esista.

Anche in questo caso, l'integrale può essere finito, infinito o non esistere.

Per esempio, un semplice conticino mostra che l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ è finito se e soltanto se $\alpha < 1$, mentre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ è finito se e solo se $\alpha > 1$ (e per

$\alpha = 1$, *entrambi* gli integrali sono infiniti). Invece, l'integrale della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}\sin(1/x)$ non esiste su $(0, 1]$.

A questo proposito, vale la pena di notare che se $f \geq 0$, l'integrale improprio *esiste sempre* (sia nel caso delle semirette che nel caso degli intervalli semiaperti). Infatti, in quel caso il limite nella definizione di integrale improprio è il limite di una funzione monotona, e sappiamo bene che questo esiste sempre (finito o infinito). Dunque, nel caso delle funzioni non negative, l'integrale improprio può essere finito (e in quel caso diremo che *converge*), oppure può *divergere a* $+\infty$.

Un'altra semplicissima osservazione (che deriva dalla proprietà monotonia dell'integrale) è la seguente

PROPOSIZIONE (Principio del confronto per gli integrali impropri, prima versione): Siano $f, g : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ due funzioni continue non negative, e supponiamo di sapere che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, +\infty)$. Allora, se l'integrale di g converge, converge anche l'integrale di f. Se invece l'integrale di f diverge, diverge anche l'integrale di g.

Un analogo principio di confronto vale anche per gli integrali impropri di funzioni continue su intervalli semiaperti.

Come conseguenza abbiamo la seguente Proposizione, che ha anch'essa un'ovvia estensione agli integrali impropri di funzioni continue su intervalli semiaperti:

PROPOSIZIONE (Principio dell'equivalenza asintotica): Siano $f, g : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ due funzioni continue non negative tali che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to +\infty$ (questo significa che $\lim_{x \to +\infty} f(x)/g(x) = 1$, e si legge "$f$ è asintoticamente equivalente a g"). Allora gli integrali impropri

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx, \qquad \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$$

hanno lo stesso comportamento: sono entrambi convergenti, oppure entrambi divergenti a $+\infty$.

DIM.: Per definizione di limite all'infinito, visto che $f \sim g$ esisterà $\overline{a} \geq a$ tale che

$$\frac{1}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2} g(x) \quad \forall x \geq \overline{a}.$$

La tesi segue allora dal principio del confronto applicato agli integrali impropri sulla semiretta $[\overline{a}, +\infty)$. Q.E.D.

Meno ovvia è la seguente versione del principio del confronto, valida per una funzione f *di segno qualunque*:

PROPOSIZIONE (Principio del confronto per gli integrali impropri, seconda versione): Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ due funzioni continue, tali che $|f(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, +\infty)$. Allora, se l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$$

converge, esiste finito anche l'integrale improprio di f. In particolare, se converge l'integrale improprio di $|f|$, esiste finito anche l'integrale improprio di f.

DIM.: Consideriamo la funzione $h(x) = f(x) + g(x)$.

Dalla disuguaglianza tra $|f|$ e g segue subito che $0 \leq h(x) \leq 2g(x)$, per cui l'integrale improprio di h è convergente. Possiamo scrivere allora:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)\, dx =$$
$$\lim_{M\to+\infty} \left[\int_a^M h(x)\, dx - \int_a^M g(x)\, dx \right],$$

e l'ultimo limite esiste finito perché i due integrali impropri coinvolti sono convergenti. Q.E.D.

Un modo particolarmente espressivo di leggere la tesi del teorema appena dimostrato è il seguente: se l'integrale improprio di una funzione di segno qualunque *converge assolutamente*, allora *converge*.

Il teorema del confronto si rivela spesso utilissimo per dimostrare la convergenza (o la divergenza, nel caso di funzioni non negative) dell'integrale improprio di una funzione di cui *non si sappia calcolare esplicitamente una primitiva*. Purtroppo, però, la convergenza assoluta è una condizione sufficiente, ma non necessaria, per la convergenza di un integrale improprio:

ESEMPIO: L'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ esiste finito, mentre $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = +\infty$.

Infatti, integrando per parti si ha

$$\int_1^M \frac{\sin x}{x}\, dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\, dx \to \ \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

L'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ converge per il principio del confronto, perché $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ e abbiamo visto che l'integrale dell'ultima funzione è finito. Dunque, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ esiste finito.

Mostreremo invece domattina che $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx = +\infty$.

Lezione del 20/3/2003 (2 ore): Concludiamo il discorso di ieri: mostriamo che $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx = +\infty$. Infatti, per ogni $n \in \mathbf{N}$ ($n \geq 2$) avremo

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)}.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ abbiamo quindi trovato la seguente disuguaglianza:

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots)$$

La serie nell'ultima disuguaglianza (cioè la serie dei reciproci dei numeri naturali) si chiama *serie armonica*: mostreremo ora che essa *diverge a* $+\infty$, concludendo così la dimostrazione della divergenza del nostro integrale.

Per farlo, useremo ancora una volta il principio del confronto per gli integrali impropri! Infatti, possiamo interpretare la serie armonica come l'integrale tra 2 e $+\infty$ della funzione a scala (con infiniti scalini) $\phi(x) = \frac{1}{[x]}$[1]. Visto che $\phi(x) \geq \frac{1}{x}$, e visto che $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty$, il principio del confronto ci dice che l'integrale di ϕ (che è poi la serie armonica) diverge.

La discussione appena fatta per mostrare la divergenza dell'integrale improprio di $\frac{|\sin x|}{x}$, ci suggerisce un utilissimo *criterio di convergenza per le serie*. Ricordiamo a questo proposito, la fondamentale *definizione di serie* che abbiamo già visto parlando di polinomi di Taylor: se $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è una successione di numeri reali, poniamo *per definizione*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

a patto che il limite a secondo membro esista. La successione

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

si chiama *successione delle somme parziali* della serie, per cui la somma della serie è semplicemente il limite delle somme parziali!

[1]Si noti che la definizione di integrale improprio si può estendere senza cambiare nulla a funzioni anche non necessariamente continue, che siano però integrabili secondo Riemann su tutti gli intervalli limitati. Quindi, è perfettamente lecito fare l'integrale improprio di ϕ.

PROPOSIZIONE (Criterio integrale di convergenza per le serie): Sia $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ *una funzione non negativa e decrescente. Allora l'integrale improprio*

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$$

ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Con questo vogliamo dire che se l'integrale converge, converge anche la serie, mentre se l'integrale diverge a $+\infty$*, diverge anche la serie.*

DIM.: Basta osservare che $f([x+1]) \le f(x) \le f([x])$, e interpretare la serie come l'integrale della funzione costante a tratti $f([x])$. Q.E.D.

ESEMPIO: La *serie armonica generalizzata*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$: basta usare il criterio integrale con la funzione $f(x) = 1/x^\alpha$.

Da quanto abbiamo appena visto, non ci stupirà scoprire che esistono delle analogie tra integrali impropri e serie! Cominciamo infatti con un elenco di alcune proprietà delle serie che ricordano quanto abbiamo già visto per gli integrali:

- Se $a_n \ge 0$, la serie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_n$ *esiste sempre*, finita o infinita: infatti, le somme parziali costituiscono una successione monotona. In sostanza *una serie a termini positivi converge a una somma finita, oppure diverge a* $+\infty$.

- Vale il seguente *criterio del confronto per le serie a termini positivi*: se $0 \le a_n \le b_n$, allora la convergenza di $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_n$ implica la convergenza di $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_n$, mentre la divergenza di $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_n$ implica la divergenza di $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_n$.

- Vale anche un *criterio dell'equivalenza asintotica*: se $a_n, b_n > 0$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

allora le serie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento. Basta infatti osservare che per n abbastanza grande $\frac{1}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}b_n$, e applicare il criterio del confronto.[2]

- Se una serie è *assolutamente convergente*, cioè se converge $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |a_n|$, allora anche la serie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_n$ esiste finita. La dimostrazione è analoga a quella del criterio del confronto per gli integrali (seconda versione): si considera la serie di termine generale $b_n = a_n + |a_n|$ e si nota che $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$. Ne deriva che $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_n$ converge (principio del confronto), e la convergenza di $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_n$ si ricava subito scrivendo $a_n = b_n - |a_n|$.[3]

Un'altra proprietà interessante (che per gli integrali impropri *non* vale) è la seguente:

PROPOSIZIONE: Se la serie (a termini di segno qualunque) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ *converge, allora*

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$$

.

DIM.: Se s_n denota la somma parziale n-esima della serie e s la sua somma (cioè $s_n \to s$), si ha $a_n = s_n - s_{n-1}$, e passando al limite per $n \to +\infty$ si ha la tesi. Q.E.D.

Si noti che il viceversa *non è vero*: il termine generale della serie può essere infinitesimo senza che la serie converga. Come esempio, abbiamo visto il caso della serie armonica: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

ESEMPIO FONDAMENTALE (Serie geometrica): Utilizziamo ora la formula per la somma della progressione geometrica per studiare la *serie geometrica*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k,$$

[2]Questo criterio è falso per le serie a termini di segno qualunque. Infatti, le serie di termine generale $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ e $b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ sono asintoticamente equivalenti. Grazie a un criterio di convergenza che vedremo la prossima volta (criterio di Leibniz), si verifica che la prima serie diverge a $+\infty$, mentre la seconda converge.

[3]Anche in questo caso, non vale il viceversa: vedremo che una serie può convergere anche se non converge assolutamente.

in cui a è un numero reale chiamato *ragione* della serie.

Se $s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$ denota la somma parziale n-esima della serie, abbiamo visto che $s_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. Se studiamo il limite di questa espressione per $n \to +\infty$, vediamo che la serie converge a $1/(1-a)$ per $|a| < 1$, diverge a $+\infty$ per $a \geq 1$, non esiste per $a < -1$.

Usando il nostro studio della serie geometrica e il criterio del confronto, otteniamo i seguenti semplici risultati.

PROPOSIZIONE (Criteri della radice e del rapporto): Sia a_n il termine generale di una serie a termini non negativi, $\sum_{k=1}^{+\infty} a_n$.

- *Supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell_1.$$

Allora, se $\ell_1 > 1$ la serie diverge, se $\ell_1 < 1$ converge.

- *Sia $a_n > 0$, e supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell_2.$$

Allora, se $\ell_2 > 1$ la serie diverge, se $\ell_2 < 1$ converge[4].

DIM.: Cominciamo dal criterio della radice. Se $\ell_1 > 1$, scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $\ell_1 - \varepsilon > 1$. Per la definizione di limite, sappiamo che per n abbastanza grande avremo $\sqrt[n]{a_n} > \ell_1 - \varepsilon$, ossia $a_n > (\ell_1 - \varepsilon)^n$. Passando al limite per $n \to +\infty$ otteniamo $a_n \to +\infty$, e la serie non può convergere perché il suo termine generale non tende a zero.

Se $\ell_1 < 1$, scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $\ell_1 + \varepsilon < 1$. Per n abbastanza grande avremo $\sqrt[n]{a_n} < \ell_1 + \varepsilon$, da cui $a_n < (\ell_1 + \varepsilon)^n$. Poiché la serie geometrica di ragione $\ell_1 + \varepsilon$ converge, converge anche la nostra serie (criterio del confronto).

La dimostrazione del criterio del rapporto la vedremo la prossima volta...
Q.E.D.

I criteri della radice e del rapporto falliscono se i limiti ℓ_1, ℓ_2 sono uguali ad 1. Per esempio, si consideri la serie armonica generalizzata di termine generale $a_n = 1/n^\alpha$. In questo caso, i limiti di radice e rapporto sono entrambi uguali a 1, ma abbiamo visto che la serie converge se $\alpha > 1$, mentre diverge per $\alpha \leq 1$.

[4] Si potrebbe far vedere che se esiste il limite del rapporto ℓ_2, allora esiste anche il limite della radice ℓ_1, e questi due limiti sono uguali: per questo, il criterio del rapporto è in realtà una conseguenza del criterio della radice.

Lezione del 26/3/2003 (2 ore): Dimostriamo il *criterio del rapporto* per la convergenza delle serie numeriche (vedi l'enunciato negli appunti della scorsa lezione): supponiamo $\ell_2 > 1$, e scegliamo ε tanto piccolo che $\ell_2 - \varepsilon > 1$. Per definizione di limite, troviamo $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \ell_2 - \varepsilon$ per $n \geq \nu$. Allora, se $n > \nu$:

$$a_n = a_\nu \cdot \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq a_\nu \cdot (\ell_2 - \varepsilon)^{n-\nu}.$$

Passando al limite vediamo che $a_n \to +\infty$, e la serie non converge di sicuro.

Se poi $\ell_2 < 1$, scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $\ell_2 + \varepsilon < 1$. Troviamo $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell_2 + \varepsilon$ per $n \geq \nu$. Rifacendo il conto di prima abbiamo

$$a_n = a_\nu \cdot \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_\nu \cdot (\ell_2 + \varepsilon)^{n-\nu},$$

e la nostra serie risulta maggiorata da una serie geometrica convergente. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Se abbiamo una serie a termini di segno qualunque $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, e sappiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell > 1 \text{ oppure } \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell > 1,$$

la dimostrazione appena vista ci dice che $|a_n| \to +\infty$. In particolare, il termine generale a_n della serie *non tende a zero*, e la serie certamente non converge.

Che altro dire delle serie a termini di segno qualunque? Se esse non convergono assolutamente, abbiamo ben pochi strumenti a nostra disposizione. Uno di questi è il seguente:

PROPOSIZIONE (Criterio di Leibniz): Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri non negativi, e si consideri la serie a termini di segno alterno

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n.$$

Se a_n è decrescente e tende a zero, allora la serie converge.

DIM.: Al solito, sia $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n a_n$ la successione delle somme parziali. Si ha

$$s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq s_{2n},$$

cioè la successione delle somme parziali *di indice pari* è decrescente.

Analogamente, $s_{2n+3} \geq s_{2n+1}$: la successione delle somme parziali di indice dispari è crescente. Inoltre, evidentemente $s_1 \geq 0$ e $s_{2n} \geq s_{2n-1}$: ne segue che la successione delle somme parziali pari è non negativa, e tenderà a un limite finito ℓ (uguale al suo inf). Anche le somme parziali dispari tenderanno allo stesso limite:

$$\lim_{k \to +\infty} s_{2k+1} = \lim_{k \to +\infty} (s_{2k} - a_{2k+1}) = \ell - 0.$$

Ne segue che ℓ è proprio la somma della serie. Q.E.D.

Il criterio di Leibniz ci dice ad esempio che la versione a segni alterni della serie armonica, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, è convergente (in realtà, si può far vedere che converge a $\log 2$).

Si ricorderà che abbiamo incontrato per la prima volta le serie quando ci siamo accorti che alcune funzioni infinitamente derivabili possono essere sviluppate in *serie di Taylor*: la serie che si ottiene in quel caso è del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

e si chiama *serie di potenze*.

Abbiamo visto che se $f(x)$ è una funzione analitica e scegliamo $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, allora la serie di potenze converge in un intorno di 0, e converge proprio a $f(x)$... a dire il vero, questa era proprio la definizione di funzione analitica!

È però interessante anche studiare il problema inverso: se ci viene data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, cosa possiamo dire del suo insieme di convergenza?

E se scopriamo che essa converge per gli x in un opportuno intorno di 0, sarà poi vero che la sua somma $f(x)$ è una funzione infinitamente derivabile, la cui serie di Taylor coincide con la serie di partenza?

Volendo rispondere a queste domande, cominciamo con un'osservazione semplice ma interessante:

LEMMA: Se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge per $x = x_0$, allora converge assolutamente per tutti gli x con $|x| < |x_0|$.

DIM.: Siccome la serie converge per $x = x_0$, abbiamo necessariamente $\lim_{n \to +\infty} a_n x_0^n = 0$. In particolare, per n abbastanza grande avremo $|a_n x_0^n| \leq 1$.

Se poi $|x| < |x_0|$ si ha (sempre per n abbastanza grande)

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq \left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$ converge perché è maggiorata da una serie geometrica convergente. Q.E.D.

Il lemma ci suggerisce di dare la seguente, fondamentale

DEFINIZIONE: Il *raggio di convergenza* della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ è l'estremo superiore dei valori di x per cui la serie converge.

Sia r il raggio di convergenza della nostra serie di potenze. Grazie al lemma visto sopra, possiamo concludere che

- Se $r = +\infty$, la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbf{R}$.
- Se $r > 0$, la serie converge assolutamente nell'intervallo aperto $(-r, r)$,mentre non converge per $|x| > r$.
- Se $r = 0$, la serie converge soltanto per $x = 0$.

Tutti e tre questi comportamenti sono possibili: la serie esponenziale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge per ogni $x \in \mathbf{R}$, la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ha raggio di convergenza 1, mentre la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^n$ ha raggio di convergenza 0 come si può facilmente verificare con il criterio della radice.

Si noti anche che il nostro lemma non dice nulla sul comportamento della serie per $x = \pm r$, cioè agli estremi dell'intervallo di convergenza: in effetti, in quei due punti può succedere qualunque cosa (la serie può convergere in tutti e due i punti, in uno solo di essi, oppure in nessuno dei due). La convergenza di una serie di potenze agli estremi dell'intervallo di convergenza è spesso la cosa più difficile da valutare, e lo studio deve essere condotto caso per caso.

Lezione del 27/3/2003 (2 ore): Vediamo ora come è possibile calcolare il raggio di convergenza di una serie di potenze: in *quasi tutti i casi* è possibile dare una risposta grazie al criterio della radice o del rapporto.

Supponiamo infatti di sapere che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$$

(oppure che $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$). Usando il criterio della radice (del rapporto) vediamo subito che la serie converge per $|x| < \frac{1}{\ell}$, mentre non converge per $|x| > \frac{1}{\ell}$ (nei casi $\ell = 0$ e $\ell = +\infty$, il raggio di convergenza è rispettivamente $+\infty$ e 0...).

L'unica situazione in cui questo metodo non funziona, è quella in cui non esiste il limite della radice n-esima di $|a_n|$ (anche in questo caso, tuttavia, è possibile aggirare il problema: se PROPRIO volete sapere come fare, leggete la nota[5] qui sotto... ma non dite che non vi avevo avvertito!).

Supponiamo ora di avere una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$. Possiamo allora definire una funzione $f : (-r, r) \to \mathbf{R}$ nel modo seguente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Ci chiediamo quali siano le proprietà della funzione $f(x)$.

Osserviamo che essa si ottiene come limite di polinomi: $f(x)$ è il limite delle somme parziali $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ della serie.

D'altra parte, può accadere benissimo che una successione di funzioni molto regolari (derivabili infinite volte) converga ad una funzione discontinua: per esempio, la successione di funzioni $s_n(x) = \arctan(nx)$ ha per li-

---

[5] *La semplice osservazione appena fatta può essere trasformata in una* ricetta universale *per trovare il raggio di convergenza: se è vero che non sempre esiste il limite della successione* $\sqrt[n]{|a_n|}$, *è però sempre possibile farne il* massimo limite.

Il massimo limite di una successione $\{b_n\}$ *è una schifezza che si definisce come*

$$\max \lim_{n\to+\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} \sup\{b_m : \ m \geq n\} = \lim_{n\to+\infty} \sup\{b_m : \ m \geq n\},$$

e analogamente si definisce il minimo limite

$$\min \lim_{n\to+\infty} b_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} \inf\{b_m : \ m \geq n\} = \lim_{n\to+\infty} \inf\{b_m : \ m \geq n\}.$$

Non è troppo difficile far vedere che la successione ammette limite se e solo se il suo massimo limite e il suo minimo limite sono uguali. Il massimo e il minimo limite possono essere caratterizzati come il più grande e il più piccolo tra i limiti di tutte le sottosuccessioni di $\{b_n\}$ *che ammettono limite.*

Ora, il criterio della radice vale pari pari (e anche la dimostrazione non cambia granché) se si sostituisce il limite con il massimo limite: possiamo quindi affermare che il raggio di convergenza della nostra serie di potenze è dato dal reciproco di $\ell = \max \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

mite la funzione discontinua $\pi/2\ \mathrm{sgn}(x)$.[6] Tuttavia, questa eventualità poco desiderabile non si verifica per le serie di potenze. Vale infatti il seguente

TEOREMA (Regolarità delle serie di potenze): Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza* $r > 0$*. Allora* $f(x)$ *è continua e derivabile in* $(-r, r)$*. Inoltre la serie delle derivate* $\sum_{n=1} a_n \cdot n x^{n-1}$ *ha ancora raggio di convergenza* r*, e converge proprio alla derivata* f' *di* f*.*

Il teorema dice dunque che una serie di potenze si può derivare termine a termine. Inoltre, iterando il procedimento si ottiene che $f(x)$ è derivabile infinite volte, e che la serie di partenza non è altro che la serie di Taylor di f centrata in 0.

Purtroppo, non siamo in grado di dimostrare il teorema: per farlo sarebbe necessario introdurre il concetto di convergenza uniforme di una serie di funzioni, e dimostrare un certo numero di risultati collegati: tutto questo esula dalla portata di questo corso introduttivo.

Il fatto che la serie delle derivate abbia lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza è invece facile da verificare nel caso in cui esista il limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$. Si ha infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n \cdot |a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot \ell.$$

ESEMPIO: Come applicazione del teorema sulla somma delle serie di potenze, verifichiamo che

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad 1 < x < 1; \\ \arctan(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad 1 < x < 1. \end{aligned}$$

Infatti, non è difficile vedere che entrambe le serie hanno raggio di convergenza 1. Se chiamiamo $f(x)$ la somma della prima e $g(x)$ la somma della seconda, derivando termine a termine si ottiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}, \\ g'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}, \end{aligned}$$

[6]Si noti che $f(x)$ può essere vista come la somma della serie di funzioni di termine generale $a_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x)$.

dove abbiamo usato la formula per la somma della serie geometrica. Integrando e tenendo conto del fatto che $f(0) = g(0) = 0$, si ottiene $f(x) = \log(1+x)$ e $g(x) = \arctan x$.

ESEMPIO: Consideriamo la *serie binomiale*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

in cui $\alpha \in \mathbf{R}$ e i coefficienti binomiali sono definiti da

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} \quad (n \geq 1).$$

Usando il criterio del rapporto, si verifica subito che il questa serie ha raggio di convergenza 1[7]. Mostriamo che la somma $f(x)$ della serie è uguale a $(1+x)^\alpha$ per ogni $x \in (-1, 1)$.

Derivando termine a termine la serie si ottiene

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} (\alpha - n) x^n$$

(la seconda espressione si ottiene osservando che $\binom{\alpha}{n} n = \binom{\alpha}{n-1} (\alpha - n + 1)$ e cambiando l'indice, $(n-1) \leftrightarrow n$). Utilizzando queste due scritture equivalenti di $f'(x)$ si ottiene subito

$$(1+x) f'(x) = \alpha f(x), \text{ ovvero } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{1+x}.$$

Integrando, si ha allora $\log f(x) = \log(1+x)^\alpha + C$, da cui (osservando che $f(0) = 1$) $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Lezione del 2/4/2003 (2 ore): In questa lezione, vogliamo cominciare un discorsetto introduttivo sulle equazioni differenziali ordinarie, che sarà poi ripreso diffusamente nella terza unità didattica.

Dovremmo essere già sufficientemente motivati allo studio di questo argomento: nel corso di fisica abbiamo visto numerosi esempi di equazioni del secondo ordine che "nascono" dall'applicazione del II principio della dinamica.

[7] A meno che non si abbia $\alpha \in \mathbf{N}$: in tal caso solo i primi α coefficienti binomiali sono diversi da 0, e la serie si riduce a un polinomio.

Cominciamo col ricordare qualche definizione: un'equazione differenziale è un'equazione *funzionale* (cioè un'equazione in cui l'incognita è una funzione) della forma

$$f(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \ldots, x'(t), x(t), t) = 0,$$

dove $x(t)$ è la funzione incognita da cercare, e f è una funzione nota di $(n+2)$ variabili. L'equazione scritta sopra è *di ordine* n, perché la derivata di ordine massimo che vi compare ha appunto ordine n. In particolare, la più generale equazione differenziale ordinaria del primo ordine sarà del tipo

$$f(x'(t), x(t), t) = 0.$$

Almeno in questa prima fase, ci occuperemo soltanto di equazioni del primo ordine: vedremo infatti che uno studio accorto sulle equazioni e sistemi del primo ordine, ci darà poi un sacco di informazioni utili anche sulle equazioni di ordine superiore.

Notiamo che, in certi casi, un'equazione differenziale del primo ordine si può scrivere esplicitando $x'(t)$ in funzione di $x(t)$ e t:

$$x'(t) = g(x(t), t).$$

In tal caso si dice che l'equazione è scritta *in forma normale*, e sarà di questo tipo di equazioni che ci occuperemo nel seguito.

Tanto per fare un esempio di equazione differenziale che *non* derivi dalla fisica, abbiamo visto che se $x(t)$ rappresenta il prezzo di un bene al tempo t, un ragionevole modello per l'evoluzione temporale del prezzo in assenza di eventi esterni è dato dall'equazione differenziale

$$x'(t) = \delta x(t),$$

dove δ rappresenta il tasso di incremento del prezzo nell'unità di tempo.

Se è noto il prezzo x_0 in un certo istante iniziale t_0, dobbiamo dunque risolvere il *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = \delta x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Abbiamo visto in aula che il problema si può facilmente risolvere scrivendo l'equazione nella forma $x'(t)/x(t) = \delta$, e integrando ambo i membri tra t_0 e t: si trova $x(t) = x_0\, e^{\delta t}$.

L'estrema semplicità dell'equazione differenziale che abbiamo appena risolto (che chiede di trovare una funzione proporzionale alla sua derivata...), costituisce una buona spiegazione dell'ubiquità della funzione esponenziale in un gran numero di fenomeni naturali...

Consideriamo il problema di Cauchy per una generale equazione del primo ordine in forma normale,

$$\begin{cases} x'(t) = g(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Ci sarebbe estremamente utile avere un *teorema di esistenza e unicità* che ci dicesse che il problema ha soluzione, e che questa soluzione è unica.

Nel caso in cui l'equazione differenziale rappresenti il modello di una situazione reale, è evidente l'importanza fisica e filosofica di un risultato di esistenza e unicità di questo tipo: se il modello è corretto, il sistema dovrà evolvere in qualche modo (e quindi ci devono essere soluzioni del problema di Cauchy), mentre l'unicità delle soluzioni corrisponde al requisito di *ripetibilità di un esperimento* (il sistema deve reagire nello stesso modo se sono identiche le condizioni iniziali).

ESEMPIO: Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Scrivendo l'equazione nella forma $x'(t)/x^2(t) = 1$ e integrando, si trova che l'unica soluzione è $x(t) = 1/(1-t)$. Siccome una soluzione ci aspettiamo che sia continua e derivabile in un intervallo che contiene il punto iniziale, se ne deduce che la soluzione del problema *non è definita su tutta la retta reale, ma solo sulla semiretta* $(-\infty, 1)$.

Dunque, anche se il secondo membro dell'equazione è estremamente regolare, possiamo sperare solo in un teorema di esistenza e unicità *locale*, che ci assicuri l'esistenza di una soluzione in un opportuno *intorno dell'istante iniziale* t_0.

ESEMPIO: Si noti che, affinché la nostra equazione differenziale abbia senso, sembra ragionevole assumere che la funzione $g(x, t)$ sia continua (anche se dovremo precisare cosa significa che una funzione di due variabili è continua).

La sola continuità non è però sufficiente a garantire l'unicità della soluzione del problema di Cauchy: ad esempio il problema

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni. Infatti, si vede subito che $x(t) = 0$ è una soluzione. Inoltre, applicando lo stesso trucco usato sopra scopriamo che la funzione

$x(t) = t^4/4$ è una soluzione del problema per $t > 0$... e indoviniamo così che tutte le funzioni del tipo

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_0)^2}{4} & se\ t \geq t_0 \\ 0 & se\ t < 0 \end{cases}$$

sono soluzioni del problema di Cauchy ($t_0 > 0$ è una costante).

A questo punto, sappiamo che il nostro teorema di esistenza e unicità (che enunceremo nell'unità didattica 3) potrà darci soltanto un *risultato di esistenza locale*, e che per avere l'unicità dovremo chiedere più che la continuità della funzione g...

In compenso, il trucchetto che abbiamo usato prima per risolvere i semplici problemi che abbiamo preso in considerazione, si generalizza a tutta una classe di equazioni differenziali dette *a variabili separabili*: supponiamo che $A(t)$ e $B(x)$ siano due funzioni continue, definite rispettivamente in un intorno di t_0 e di x_0. Supponiamo anche che $B(x_0) \neq 0$. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{A(t)}{B(x(t))} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Supponiamo ora che $x(t)$ sia una soluzione del problema: moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per $B(x(t))$ e integriamo tra t_0 e t. Se denotiamo con $F(t)$ e $G(x)$ delle primitive di $A(t)$ e $B(x)$ rispettivamente, si ottiene $G(x(t)) = F(t) - F(t_0) + G(x_0)$.

Questa è un'equazione che ci fornisce la soluzione $x(t)$ *in forma implicita*: se per caso sapessimo che la funzione G è invertibile in un intorno di x_0 (e domattina mostreremo che questo è proprio vero!), potremmo ottenere esplicitamente la soluzione come $x(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(x_0))$.

Lezione del 3/4/2003 (1 ora): Torniamo per un attimo alle equazioni a variabili separabili (vedi lezione precedente): siamo partiti dal problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{A(t)}{B(x(t))} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove $A(t)$ e $B(x)$ sono due funzioni continue, definite rispettivamente in un intorno di t_0 e x_0 (e inoltre $B(x_0) \neq 0$).

Abbiamo visto ieri che se $x(t)$ è una soluzione del problema, allora deve soddisfare anche l'equazione

$$G(x(t)) = F(t) - F(t_0) + G(x_0),$$

dove G è una primitiva di B e F è una primitiva di A.

Ma G è invertibile in un intorno di x_0: infatti $G'(x) = B(x)$ è una funzione continua, e $G'(x_0) = B(x_0) \neq 0$. Per il teorema della permanenza del segno, $G'(x)$ deve avere segno costante in un intorno di x_0, per cui G è strettamente monotona ed invertibile in tale intorno. La funzione inversa G^{-1} sarà definita di conseguenza in un intorno di $G(x_0)$, e possiamo scrivere $x(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(x_0))$.

Si noti che vale anche il viceversa: la funzione $x(t)$ appena trovata è una soluzione del problema di Cauchy (basta ripercorrere a ritroso i passaggi che abbiamo fatto!): in questo caso abbiamo trovato esplicitamente la soluzione del problema, ed abbiamo anche dimostrato che essa è unica.

Un'altra classe di equazioni del primo ordine che si possono risolvere esplicitamente è costituita dalle *equazioni lineari del primo ordine*: esse sono della forma

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t),$$

dove a e b sono date funzioni continue definite su un certo intervallo (a, b).

Se imponiamo anche la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ (con $t_0 \in (a, b)$), mostreremo ora che esiste un'unica soluzione, definita su tutto l'intervallo (a, b): in questo caso particolarmente fortunato abbiamo *esistenza e unicità globale*, e possiamo anche scrivere esplicitamente la soluzione.

Il trucco consiste nel moltiplicare ambo i membri dell'equazione per il *fattore integrante*

$$F(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}.$$

Facendo questo, a primo membro avremo la derivata del prodotto $x(t)F(t)$, e integrando ambo i membri tra t_0 e t troviamo la soluzione esplicita del problema di Cauchy:

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} b(t)\, dt \right).$$