PLS VERONA - AGGIORNAMENTO INSEGNATI
CORSO DI
“”

Introduzione

Obiettivi degli incontri. Negli anni recenti c'è stato un forte impulso di ritorno sull'importanza dei modelli in matematica. Questa serie di incontri non vuole schierarsi, ma desidera offrire un'opportunità e uno spazio di confronto. Perché, se da un lato, in passato i modelli erano stati (quasi) dimenticati nella didattica della matematica della scuola secondaria italiana, dall'altro, essi non possono diventare l'unica modalità didattica e di avvicinamento alla matematica.

1. Studiare matematica attraverso la modelizzazione;
2. Servirsi dell'aiuto di uno o più strumenti di calcolo;
3. Ricavare informazione dai modelli.

la modelizzazione è un processo in cui si *usa* la matematica[1] per rappresentare, analizzare, effettuare previsioni e cercare di capire più a fondo i fenomeni (naturali e non) del mondo reale.

Come procedere. [2]

- **Starting point:** Definizione del problema.
- **Second step:** semplificazione del problema: cioè fare assunzioni che permettano di focalizzarsi sugli aspetti rilevanti.
- **Third step:** definizione delle variabili o dei parametri.
- **Fourth step:** è il momento di utilizzare **tutta** la matematica che si conosce (*e magari anche di più*) per costruire il modello.
- **Final step:** riportare i risultati ottenuti.

Ma cosa possiamo modellizzare?

Date: 17/09/2017.

[1] e, se necessario, se ne inventa di nuova.

[2] Al seguente indirizzo web https://www.youtube.com/watch?v=xHtsuOB-TPw si può trovare un'interessante introduzione al Mathematical Modeling.

Per iniziare

Problema 1. La tabella 1 contiene delle informazioni relative ad una galassia ad spirale simile a M88, vedi Figura 1. In particolare sono fornite le distanza (in kiloparsec) dal centro di rotazione della galassia e la relativa velocità angolare.

Distanza in Kiloparsec	Velocità tangenziale (km/s)
1	244.0
2	221.0
3	208.0
4	208.8
5	211.5
6	216.0
7	219.0
8	221.0
9	221.5
10	221.0

Tabella 1. Tabella velocità Galassie.

È oramai ben noto che se le stelle di una galassia fossero libere di muoversi sotto la sola reciproca attrazione gravitazionale, non sarebbe possibile osservare i bracci della spirale. La loro esistenza, quindi, è un possibile indicatore che la massa presente in una galassia è maggiore di quella che siamo in grado di osservare direttamente con strumenti ottici. Tale massa è oggi nota come materia oscura.

Figura 1. Galassia Messier M88

Cercare una funzione che interpola i dati nella tabella e calcolare a quale distanza dal centro della galassia la velocità angolare è minima.

Soluzione proposta. Aprire il foglio di calcolo di GeoGebra (dal menù a tendina vista, oppure Ctrl+shift+S) e inserire i dati. Creare quindi una lista

`Lista1 = ListaPunti[{⟨ lista di punti ⟩}]`

I punti si dispongono in maniera complessa, tuttavia non siamo interessati solamente alle coordinate del minimo: possiamo quindi interpolare i punti con una funzione polinomiale: dall'andamento qualitativo potrebbe bastare un polinomio di terzo grado:

`RegPol[Lista di punti, grado del polinomio interpolante]`

A questo punto usare la funzione

`Min[⟨ funzione ⟩, ⟨ x iniziale ⟩, ⟨ x finale ⟩]`

per determinare il minimo.

Provare con un polinomio di grado 5, a ridurre il numero di punti su cui effettuare l'interpolazione, ad usare un polinomio interpolante creato mediante degli sliders.

Problema 2. Una piccola quantità d'acqua si raffredda rapidamente dopo essere stata versata in una tazza da una pentola calda. La Tabella 2 riporta gli istanti di tempo (misurati in s) e le temperature relative T (misurate in gradi Celsius). La temperatura ambiente è stata determinata in $22,3°C$.

$t(s)$	$T(°C)$	$t(s)$	$T(°C)$	$t(s)$	$T(°C)$
0	69,58	360	43,96	720	35,00
30	66,11	390	43,96	750	34,53
60	61,41	420	42,92	780	34,04
90	58,07	450	41,95	810	33,59
120	55,60	480	41,05	840	33,20
150	53,58	510	40,18	870	32,76
180	51,66	540	39,40	900	32,37
210	50,05	570	38,70	930	32,00
240	48,52	600	38,00	960	31,64
270	47,18	630	37,32	990	31,30
300	46,00	660	36,67		
330	44,96	690	36,08		

TABELLA 2. Temperature di raffreddamento di una picccola quantià d'acqua.

Si determini un modello che interpoli bene i dati a diaposizione. Si usi poi questo modello per determinare l'intervallo di tempo necessario per raffreddare l'acqua della tazza fino a $26°C$.

Soluzione proposta1. Aprire il foglio di calcolo di GeoGebra (*Menù Vista* ⟶ *Foglio di calcolo* oppure con la combinazione di tasti *Ctrl-Shift-S*) e immettere i dati. Quindi selezionare i dati, cliccare sul tasto destro del mouse e selezionare *Crea* ⟶ *Lista di Punti*. Quindi si analizza la distribuzione dei punti: essi si dispongono lungo una "decrescita tipo esponenziale", ma non asintotica a zero. Molti strumenti di calcolo, così come GeoGebra, offrono uno strumento di fit esponenziale del tipo $f(x) = C\,a^x$, che però decresce asintoticamente a zero. Per utilizzare questo strumento dobbiamo in qualche modo"ripulire" i dati:

togliamo dai dati ricavati la temperatura dell'ambiente circostante

Come procedere:

- Nella colonna C duplichiamo la colonna dei tempi (solamente per facilitare le operazioni);

- Nella colonna D scriviamo le temperature ripulite;
- Ora usiamo il fitting, digitando:[3]

```
FitGrowth[list2]
```

Q. Come si dispongono i dati rispetto alla curva di Fitting?

Probabilmente il fit non è così buono come ci si poteva aspettare e i motivi sono diversi. Un decadimento di tipo esattamente esponenziale è valido per un oggetto puntiforme in un ambiente tenuto a temperatura costante indipendentemente dalla temperatura dell'oggetto (bagno termico). In questo caso l'acqua calda scalda la tazza e essa rallenta lo scambio con l'ambiente esterno. Le cose potrebbero migliorare "eliminado" alcuni dati, quali? Cosa si sta facendo in questo caso? Proviamo ad eliminare o a non tener conto dei primi 6 punti. A questo punto rifacciamo il fit. Cosa ne dite? Possiamo ora rispondere al quesito del problema.

Tracciamo una retta orizzontale corrispondente alla temperatura (pulita) $T = 26°C$ e poi intersechiamo tale retta con l'ultimo fit ottenuto.

Soluzione proposta2. Q. Come possiamo agire senza "pulire i dati"?

Creiamo noi la funzione che pensiamo approssimi i meglio i dati usando gli sliders di GeoGebra. Il modello 'e esponenziale:

$$f(x) = \kappa\, a^x + T_0\,,$$

con κ e a sliders e T_0 la temperatura iniziale dell'ambiente. A questo punto usiamo il Fit di GeoGebra:

```
Fit[list1,m]
```

Se questo fit non è buono possiamo, come in precedenza, eliminare alcuni dati e procedere come in precedenza per la risposta al quesito.

Q. Com'è il risultato del fitting?

[3] Il comando `FitExp` avrebbe fornito un fit esponenziale in base e.

Problema 3. Fornire una stima delle dimensioni (lunghezza e larghezza) e dell'area del lago di Garda. Si cerchi, inoltre, di fornire una stima dell'errore de metodo utilizzato.

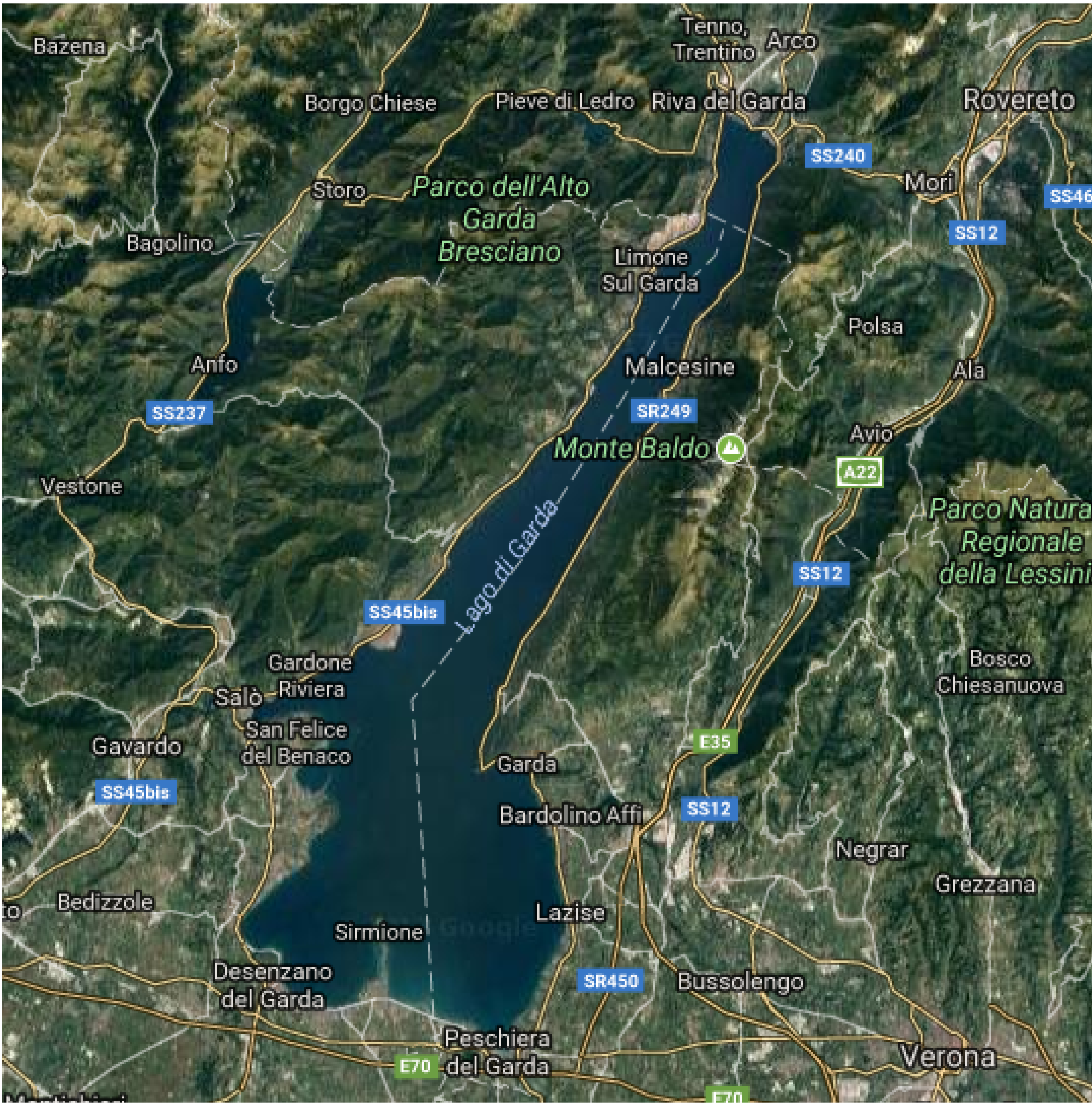

Figura 2. Vista dall'alto de lago di Garda

Problema 4. Nella Tabella 3 sono elencate le distanze medie dei pianeti dal Sole in unità astronomiche (UA) e l'intervallo di tempo necessario per ognuno dei pianeti di compiere un'orbita completa attorno al Sole (pari ad un anno per il pianeta).

pianeta	Distanza media (AU)	Periodo orbitale (anni terrestri)
Mercurio	0,387	0,241
Venere	0,723	0,615
Terra	1,000	1,000
Marte	1,523	1,881
Giove	5,2013	11,861
Saturno	9,541	29,457
Urano	19,190	84,008
Nettuno	30,086	164,784

Tabella 3. Distanze medie dei pianeti dal Sole e tempo di percorrenza dell'orbita.

Si cerchi una relazione tra le distanze medie dei pianeti dal Sole e l'intervallo di tempo necessario per percorrere un'orbita completa. Si cerchi prima un modello lineare e poi uno non lineare che interpola i dati.

Problema 5. Una radiografia (vedi Figura 3) mostra un disco tumorale nella zona toracica. Si rende quindi necessario un intervento chirurgico per rimuovere il tumore. La Tabella 4 mostra le coordinate

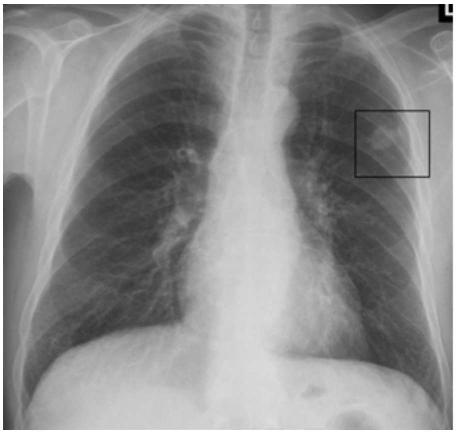

Figura 3. Radiografia toracica

rilevate di sei punti ai bordi della zona tumorale. Dopo aver disposto i punti in un piano coordinato, fornire una stima del centro e delle dimensioni della zona tumorale.

Problema 6. La funzione del cuore è quella di pompare sangue in tutte le parti del corpo. Il sangue porta ossigeno (O_2) dai polmoni a tessuti del corpo e anidride carbonica (CO_2) dai tessuti ai polmoni. Nella costruzione di un modello matematico del sistema circolatorio umano, supponiamo che esso formi un circuito chiuso e che il sangue sia un fluido incomprimibile (e quindi il volume di sangue contenuto nel sistema è costante). La velocità a cui il sangue fluisce nel sistema circolatorio è un parametro molto importante. In linea di principio 'e possibile misurare la velocità del flusso sanguigno in ogni

x	y
4,56	1,36
-0,28	1,43
-2,96	-2,96
-0,64	-7,21
4,73	-7,18
7,10	-2,88

Tabella 4. Coordinate cartesiane del disco tumorale.

punto. Una particolare attenzione è generalmente posta nel cuore stesso. L'output cardiaco (CO) è la velocit'a a cui il sangue è pompato fuori dal cuore. L'output cardiaco è il prodotto del volume di sangue pompato ad ogni battito (stroke volume) e il numero di battiti al minuto (heart rate). Il metodo di Stewart–Hamiltons[4] può essere usato per misurare l'output cardiaco:

$$CO = \frac{I}{\int_0^+ \infty C(t)\, dt}$$

in cui I sono i millimetri di colorante immesso nell'atrio destro del cuore all'istante $t = 0$. La concentrazione $C(t)$ di colorante che lascia il cuore attraverso l'aorta al istante t viene misurata mediante un certo tipo di osservazione per un intervallo di tempo $[0, T]$. Al termine dell'intervallo di misurazione, la ricircolazione ha iniziato a disturbare ancora la misurazione e l'osservazione viene cancellata. In accordo con la prassi medica, la misurazione della concentrazione viene fatta lungo intervalli di tempo regolari di lunghezza $[0, T]$ per tutta la durata del test. Ad un paziente sono stati iniettati $5,68\,mg$ di colorante nell'atrio destro e la concentrazione nell'aorta è stata misurata ogni $25\,s$. La lettura della concentrazione del colorante è stata riportata su una striscia di carta, in cui una lettura di $55\,mm$ corrisponde ad una concentrazione di $5\,mg/\ell$. I risultati sono riportati in Tabella 5. *Determinare l'output cardiaco del paziente. Tener conto di come la ricircolazione alteri il risultato.*

$t(s)$	Lettura (mm)	$t(s)$	Lettura (mm)	$t(s)$	Lettura (mm)
0	0	9	80	18	15
1	5	10	66	19	13
2	20	11	53	20	12
3	50	12	41	21	13
4	88	13	35	22	14
5	115	14	29	23	15
6	122	15	24	24	16
7	115	16	20	25	18
8	100	17	17		

Tabella 5. Letture della concentrazione di colorante nel sangue.

Problema 7. Il più economico distributore di benzina si trova dalla parte opposta della città e dalla mia abitazione. Vale la pena recarsi in tale distributore per fare il pieno? Se conosci la posizione e i prezzi delle altre stazioni di carburante, sei in grado di dire quale sia la più conveniente per te?

4

Si sviluppi un modello che permetta di suggerire ai proprietari di automobili quanto distante sia conveniente guidare per fare un pieno di carburante.

Problema 8 (Zebra crossing)**.** Nella Figura 4 possiamo osservare delle persone che stanno attraversando la strada sopra delle strisce pedonali. Si **assuma** che le strisce pedonali sia tutte delle stesse dimensioni ed equispazisate, inoltre si assuma che il terreno sia piatto. La fotocamera che ha effettuato la fotografia è situata ad una qualche distanza dietro la più vicina riga bianca e posta ad una qualche altezza.

FIGURA 4.

Si cerchi di determinare la posizione della fotocamera sia in termini di profondità che di altezza dal suolo, in relazione alla prima striscia bianca visibile. Si cerchi, inoltre, di determinare l'altezza dell'uomo isolato con una valigetta e la cravatta, sapendo che l'uomo con la sciarpa azzurrina è alto 180 cm.

Problema 9 (Chaos game: the Sierpinski triangle)**.** Chaos game è un algoritmo che sotto alcune condizioni produce un insieme frattale. Esso un gioco esso possiede delle regole. Ad esempio si consideri un triangolo equilatero (o più in generale un poligono) e:

(1) si prenda un punto del o dentro il triangolo;
(2) si prenda un punto del triangolo scelto a casa;
(3) muoversi in linea retta verso tale punto, fino alla metà della distanza tra i deu punti:
(4) marcare lì un nuovo punto;
(5) ripetere i punti precedenti qualche migliaia di volte.

Problema 10 (Porisma di Poncelet)**.** Il *Porisma di Poncelet* (detto anche *Teorema della chiusura di Poncelet*) afferma che non appena un poligono è inscritto in una conica e circoscrive un'altra conica, allora esso fa parte di una famiglia infinita di poligoni tutti inscritti e circoscritti le due medesime coniche.

Il risultato di Poncelet può essere letto anche alla luce della teoria dei sistemi dinamici e in particolare della teoria dei biliardi. Un biliardo (matematico) è un sottoinsieme (abbastanza regolare: cioè un insieme la cui frontiera è connessa per archi e con un numero finito di punti in cui la frontiera non sia derivabile) $\mathcal{B}$ del piano auclideo, in cui "si muove" un punto materiale di massa unitaria (che possiamo immaginare lasci una scia) che deve rispettare le seguenti regole:

(1) il punto si muove all'interno dell'insieme $\mathcal{B}$ e può urtare il bordo del biliardo;
(2) quando il punto urta il bordo del biliardo $\mathcal{B}$ viene riflesso elasticamente mediante le leggi dell'ottica geometrica. Non è invece definita la riflessione nei "vertici" dell'insieme $\mathcal{B}$.
(3) Il moto del punto tra due urti con le pareti è rettilineo uniforme.

Consideriamo una circonferenza $\mathcal{C}$. Costruire la traiettoria di un punto materiale che sia muove all'interno di $\mathcal{C}$ secondo le regole dei biliardi. Determinare sia traiettorie periodiche (cioè che si chiudono) sia traiettorie aperte. Cosa si può dire su queste traiettorie? Proviamo a fare lo stesso per un biliardo quadrato.

Riferimenti bibliografici

[FF] F. Fassò, *Primo sguardo ai sistemi dinamici.* Edizioni Cleup, Padova.
[HL] J. Hall and T. Lingefjärd, *Mathematical modeling. Applications with GeoGebra.* Wiley Press, 2017.