Probabilità, statistica e false credenze

Marco Caliari
Dipartimento di Informatica
Università di Verona

Simone Zuccher
Liceo Scientifico Statale "E. Medi"
Villafranca di Verona

Piano Lauree Scientifiche, a.s. 2011–2012

Capitolo 1

La probabilità

È molto probabile che la maggior parte della gente non sappia niente di probabilità.

1.1 Energy Sprint

Proiezione video Energy Sprint. Test della rotazione.

1.2 Il concetto di probabilità

Se lanciamo una moneta in aria, intuitivamente diciamo che la probabilità che esca testa è del 50%. Cosa significa? Potremmo dire che ci possono essere due risultati possibili, testa o croce e che, non avendo motivo di ritenere la moneta truccata, i due eventi ("esce testa", "esce croce") sono equiprobabili, da cui il 50% di probabilità. Cioè, per definire il concetto di "probabilità" si è fatto ricorso al concetto di "equiprobabilità": un circolo vizioso. Convince di più questa spiegazione: se lanciamo la moneta un numero molto grande di volte, il numero di volte che uscirà testa sarà *all'incirca* uguale alla metà del numero totale. Allo stesso modo, lanciando un dado molte volte, il numero 5 uscirà all'incirca un sesto delle volte e dunque la sua probabilità di uscita è $1/6$. Per convenzione, si dà probabilità 1 (o 100%) all'evento *certo*. Se la probabilità di un evento è p, la probabilità che non accada è $1 - p$. Si dice evento *impossibile* un evento la cui probabilità è 0. Il nome "impossibile" è fuorviante: pensiamo ad un numero naturale. Qual è la probabilità che tale numero sia 987? È nulla, eppure è *possibile* aver pensato proprio a quel numero.

1.2.1 Cosa non dice la probabilità

Supponiamo di lanciare 100 volte una moneta e di ottenere 52 volte testa. Il rapporto 52/100 vale 0.52, numero ragionevolmente vicino alla probabilità di uscita di testa (0.5). Supponiamo ora di proseguire con il lancio fino a 10000 volte e di ottenere 5020 volte testa. Il rapporto 5020/10000 è ancora più vicino (come ci si aspetta all'aumentare dei lanci) a 0.5. Supponiamo ora di giocare d'azzardo e di ricevere 100 Euro se esce croce e di perdere 100 Euro se esce testa. Ebbene, con l'esempio precedente, dopo i primi 100 lanci si sarebbe in perdita di 400 Euro. Continuando a giocare, con l'idea (sbagliata!) di rifarsi perché il numero di uscite di croci dovrebbe essere circa uguale al numero di uscite di teste, si arriverebbe a 10000 lanci in perdita di 4000 Euro. E nulla vieta che la perdita possa continuare ad aumentare.

Altra miscredenza piuttosto comune è la seguente: supponiamo di sapere che una moneta non truccata è stata lanciata 20 volte e ha sempre dato testa. Ci viene chiesto di scommettere 200 Euro che al lancio successivo esce croce: voi scommettereste? Ora supponiamo di non sapere cosa è uscito nei 20 lanci precedenti: scommettereste 200 Euro sull'uscita della croce? Cosa cambia, per la moneta, nei due casi? Niente. Perché allora tenere nota dei numeri usciti al Lotto e scommettere sui "ritardatari"?

1.3 Somme e prodotti di probabilità

Prima di cominciare, un test: Lucia ha studiato Economia e commercio e ama fare volontariato. Quali dei seguenti scenari è più probabile:

1. Lucia lavora in banca;
2. Lucia è disoccupata;
3. Lucia lavora in banca ed è attivista di Greenpeace;

Supponiamo di lanciare due dadi. Qual è la probabilità di ottenere 8 come somma? Ci sono varie possibilità (2 e 6, 3 e 5, ...) e, poiché ognuna di queste *esclude* le altre, la probabilità complessiva è data dalla *somma* delle probabilità di ogni possibilità (che vale 1/36). Dunque, la probabilità di ottenere 8 è 5/36.

Chiediamoci ora qual è la probabilità di ottenere 8 come somma da due dadi e testa dal lancio di una moneta. Poiché il risultato del lancio della moneta è *indipendente* dal lancio dei dati e poiché appare equamente probabile la somma 8 e l'uscita di testa o la somma 8 e l'uscita di croce, la probabilità cercata è data dal prodotto $5/36 \cdot 1/2$. È evidente che in presenza di una moneta truccata (o, semplicemente sbilanciata) che dia testa il 2/3 delle volte, la probabilità cercata è data dal prodotto $5/36 \cdot 2/3$.

A volte si cerca la probabilità che accadano eventi non indipendenti tra loro. Per esempio, qual è la probabilità di ottenere 8 dalla somma di due dati *e* aver ottenuto 5 dal primo dado? Nel caso particolare, è ovvio che il secondo dado deve aver dato 3. Dunque la probabilità cercata è $1/6 \cdot 1/6$. Nel caso generale, si può ragionare così: è la probabilità di ottenere 8 *sapendo* che il primo dado ha dato 5 (1/6) moltiplicato per la probabilità che il primo dado abbia dato 5 (1/6).

Capitolo 2

Combinatoria

2.1 Palline

Supponiamo che dentro un'urna ci siano sei palline bianche e quattro nere. Qual è la probabilità che estraendone due siano una bianca e una nera? Ci sono due possibilità: la prima pallina estratta è bianca e la seconda nera o viceversa. Dunque, $6/10 \cdot 4/9 + 4/10 \cdot 6/9$ (una volta estratta la prima pallina, rimangono nove palline nell'urna). Allo stesso modo si può calcolare la probabilità di fare sei al Superenalotto. Scelti sei numeri tra novanta, possiamo immaginare che le sei palline corrispondenti ai numeri scelti siano nere e le altre bianche. Qual è la probabilità che vengano estratte sei palline nere? Evidentemente è $6/90 \cdot 5/89 \cdot 4/88 \cdot 3/87 \cdot 2/86 \cdot 1/85$ (per inciso, vale $1/622614630$). E la probabilità di fare cinque (avendo giocato sei numeri)? Si tratta di calcolare la probabilità che vengano estratte cinque palline nere e una bianca. Ci sono sei possibilità, a seconda che la pallina bianca venga estratta per prima, per seconda e così via. In conclusione, la probabilità cercata è $6 \cdot 84/90 \cdot 6/89 \cdot 5/88 \cdot 4/87 \cdot 3/86 \cdot 2/85$ (cioè $25/30883662$).

Anche nel gioco del Superenalotto esistono false credenze. Per esempio, è più probabile che escano i numeri 3, 2, 1, 5, 4, 6 oppure i numeri 3, 2, 9, 17, 33, 5? Ovviamente la probabilità è la stessa. Perché allora il primo gruppo di numeri ci sembra molto meno probabile? Perché tendiamo a dare un senso alle cose e il primo gruppo ci appare più sensato del secondo. E poichè sappiamo dare un senso a molti meno gruppi di quelli a cui non sappiamo dare un senso e confondiamo la probabilià che esca un particolare gruppo sensato con la probabilità che esca uno *qualunque* di questi, reputiamo minore la probabilità del primo gruppo. D'altra parte i numeri del secondo gruppo, se ordinati, sono a distanza 1,2,4,8,16 (e dunque sono "sensati").

2.2 Permutazioni e combinazioni

In quanti modi si possono ordinare quattro palline numerate? Evidentemente

①②③④	②①③④	③①②④	④①②③
①②④③	②①④③	③①④②	④①③②
①③②④	②③①④	③②①④	④②①③
①③④②	②③④①	③②④①	④②③①
①④②③	②④①③	③④①②	④③①②
①④③②	②④③①	③④②①	④③②①

La prima pallina può essere scelta tra quattro, la seconda tra le rimanenti tre e la terza tra le rimanenti due. In totale ci sono $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ modi di ordinare le palline. In generale, il numero di *permutazioni* di N oggetti vale $N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot 2$ e si scrive $N!$ (N fattoriale).

Consideriamo ora il problema di scegliere quattro palline da un gruppo di dieci palline. In quanti modi diversi può avvenire la scelta? La prima può essere scelta tra dieci, la seconda tra nove e così via. Si arriva a $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$. Se quelle estratte sono le palline, per esempio, ①, ②, ③, ④ (proprio in quest'ordine), è chiaro che esistono altri 23 modi per scegliere le stesse palline. Quindi, per ogni insieme di quattro palline esistono $4 \cdot 3 \cdot 2$ modi di estrarle. Allora, la risposta alla domanda "in quanti modi diversi posso scegliere quattro palline *senza tener conto dell'ordine* da un gruppo di dieci palline" è $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7/(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$ (si mette $\cdot 1$ per avere lo stesso numero di fattori a numeratore e a denominatore). In generale, il numero di *combinazioni* di N oggetti presi a gruppi di n ($0 \leq n \leq N$) è

$$\frac{N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)}{n!} = \frac{N!}{(N-n)! \cdot n!} = \binom{N}{n}$$

Evidentemente, c'è un solo gruppo di N oggetti: dunque $\binom{N}{N} = 1$, da cui, per definizione, $0! = 1$. Il simbolo $\binom{N}{n}$ si chiama coefficiente binomiale di N e n. Il nome deriva dal calcolo della potenza N-esima di un binomio

$$(a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} a^n b^{N-n}$$

2.2.1 Il paradosso del compleanno

Calcoliamo adesso qual è la probabilità che in un gruppo di N persone ce ne siano alcune che compiono gli anni nello stesso giorno e mese. Calcoliamo la probabilità che tutti compiano gli anni in giorni diversi. Scelta una persona, la probabilità che una seconda persona compia gli anni in un giorno diverso è 364/365. La probabilità che una terza persona compia gli anni in un giorno diverso dai primi due è 363/365. E così via. Si arriva a

$$\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365 - N + 1}{365} = \frac{365!}{(365 - N)! \cdot 365^N}$$

Dunque, la probabilità che ce ne siano alcune che compiono gli anni nello stesso giorno è

$$1 - \frac{365!}{(365 - N)! \cdot 365^N}$$

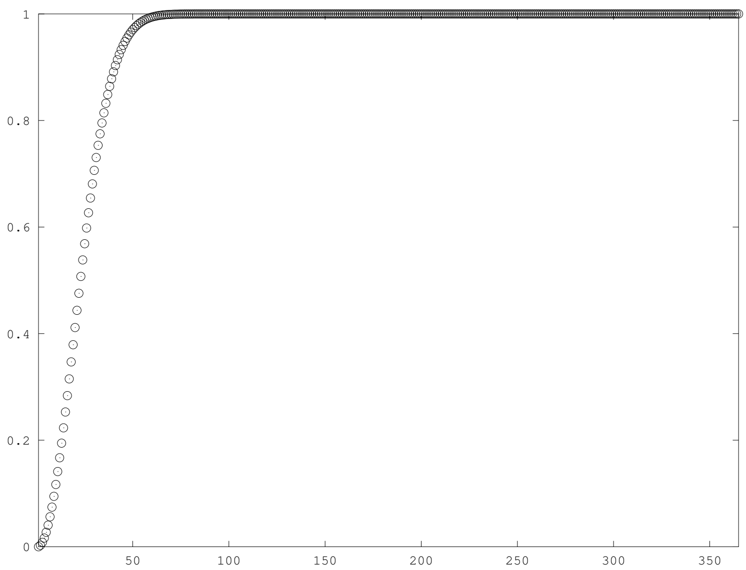

Figura 2.1: Probabilità (in ordinata) che in un certo numero di persone (in ascissa) ce ne siano alcune che compiono gli anni nello stesso giorno e mese.

Il fatto (apparentemente) paradossale è che se $N = 23$, allora la probabilità è più del 50%; con $N = 30$ è più del 70%. E con $N = 50$ è più del 97%. Quindi, in un gruppo di 50 persone, è praticamente certo che almeno due compiono gli anni nello stesso giorno. Questo gioco spiega la percezione comune che certi eventi di grande risonanza mediatica (disastri aerei, sequestri, ...) accadono *a grappoli*, cioè concentrati in certi periodi (solitamente settimane o mesi) e non uniformemente distribuiti nel tempo.

2.3 Esercizi

1. Calcolare la probabilità di fare n, $0 \leq n \leq 6$, al Superenalotto avendo giocato m numeri, $6 \leq m \leq 8$.

Capitolo 3

Distribuzione di probabilità

Per una più dettagliata analisi del concetto di probabilità abbiamo bisogno di considerare metodi più efficienti per trattare le probabilità di intere classi di eventi.

3.1 Distribuzioni di probabilità discrete

Ritornando all'esempio del Superenalotto, possiamo definire la funzione

$$f(n) = \frac{\binom{6}{n} \cdot \binom{84}{6-n}}{\binom{90}{6}}$$

che fornisce la probabilità di fare n avendo giocato sei numeri. Possiamo fare un istogramma di $f(n)$ che mostra chiaramente quanto sia difficile fare più di due. Una funzione che assume certi valori x_n con una probabilità nota p_n si chiama *variabile aleatoria (discreta)* e la funzione $f(n) = p_n$ è la sua *distribuzione di probabilità*. Una variabile aleatoria può essere indicata con la notazione

$$\begin{cases} x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ p_1 & p_2 & \dots & p_N \end{cases}$$

Naturalmente in una distribuzione di probabilità deve succedere che

$$\sum_n p_n = \sum_n f(n) = 1$$

ove la sommatoria si intende su tutti i valori possibili di n. Si può definire anche la *media* (o valore medio o valore atteso) di una variabile aleatoria. Si suppone di ripetere molte volte, diciamo Z, un esperimento che ammetta come risultati i valori $x_1, x_2, \dots, x_N$ (per esempio il lancio di una moneta o

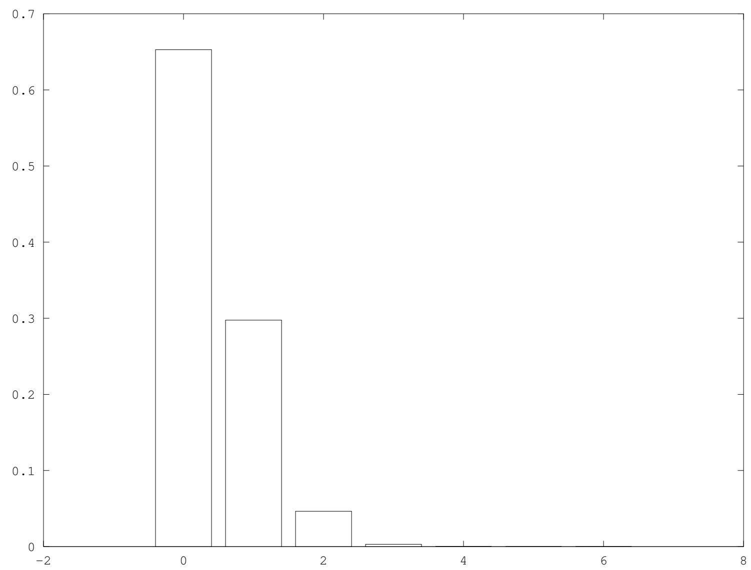

Figura 3.1: Probabilità di fare $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ giocando sei numeri al Superenalotto.

di un dado), di sommare tutti i valori che si sono trovati e dividere per Z. Si dovrà eseguire un'operazione del tipo

$$\bar{x} = \frac{\overbrace{x_2 + x_5 + x_4 + x_2 + x_1 + \ldots + x_6}^{Z \text{ valori}}}{Z}$$

Si tratta ora di calcolare il numeratore di tale espressione. Se la probabilità che esca x_n è p_n, per la definizione che abbiamo dato di probabilità significa che ripetendo molte volte un esperimento il numero di volte che esce x_n rispetto al totale Z è p_n. Dunque il numero di volte che esce x_n è Zp_n. Quindi, raccogliendo i vari x_n,

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot Zp_1 + x_2 \cdot Zp_2 + \ldots + x_N \cdot Zp_N}{Z} = \frac{Z \cdot \sum_n x_n p_n}{Z} = \sum_n x_n p_n$$

È da notare che $\bar{x}$ può anche non essere un valore possibile della variabile aleatoria: per esempio, il valore medio del lancio di un dado è 3.5. Si può anche calcolare il valor medio di $(x_n - \bar{x})^2$, cioè la *varianza* dei valori x_n, dato da

$$\sigma^2 = \sum_n (x_n - \bar{x})^2 p_n$$

3.2 La distribuzione binomiale

Un caso molto frequente è quello di ripetere più volte (ma non necessariamente tante) uno stesso esperimento con due risultati possibili (solitamente un "successo" e un "insuccesso"), ogni volta *indipendentemente* dall'altra (come lanciare dieci volte una moneta) e chiedersi con quale probabilità si hanno i vari risultati possibili. Cominciamo proprio con il lancio di una moneta dieci volte. Con quale probabilità testa esce zero volte? Evidentemente deve uscire croce dieci volte. Poiché ogni lancio è indipendente dagli altri, tale probabilità vale $(1/2)^{10}$. Con quale probabilità esce testa una sola volta? Ci sono varie possibilità: testa esce solo la prima volta, testa esce solo la seconda e così via. Ognuno di questi eventi ha probabilità $(1/2) \cdot (1/2)^9$ (cioè la probabilità che esca testa una volta e croce nove volte), ognuno di questi eventi esclude gli altri e il numero di questi eventi è 10: dunque, la probabilità cercata è $10 \cdot (1/2)^{10}$. Con quale probabilità esce testa n volte ($0 \leq n \leq 10$)? Ognuno di questi eventi ha probabilità $(1/2)^n \cdot (1/2)^{10-n}$, ognuno di questi eventi esclude gli altri e il numero di questi eventi è $\binom{10}{n}$. Dunque la distribuzione cercata è

$$f(n) = \binom{10}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{10-n}$$

Più in generale, un esperimento

$$\begin{cases} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{cases}$$

che ha successo con probabilità p ripetuto N volte, fornirà un numero di successi distribuito come

$$f(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

Una variabile aleatoria con tale distribuzione si chiama variabile aleatoria binomiale.

Abbiamo detto che deve necessariamente essere $\sum_n f(n) = 1$. È vero per la variabile aleatoria binomiale? Si ha

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = [p + (1-p)]^N = 1$$

Dunque è vero. Qual è il numero medio di successi? Dobbiamo pensare di eseguire tante volte, diciamo Z, la ripetizione di N esperimenti, sommare il

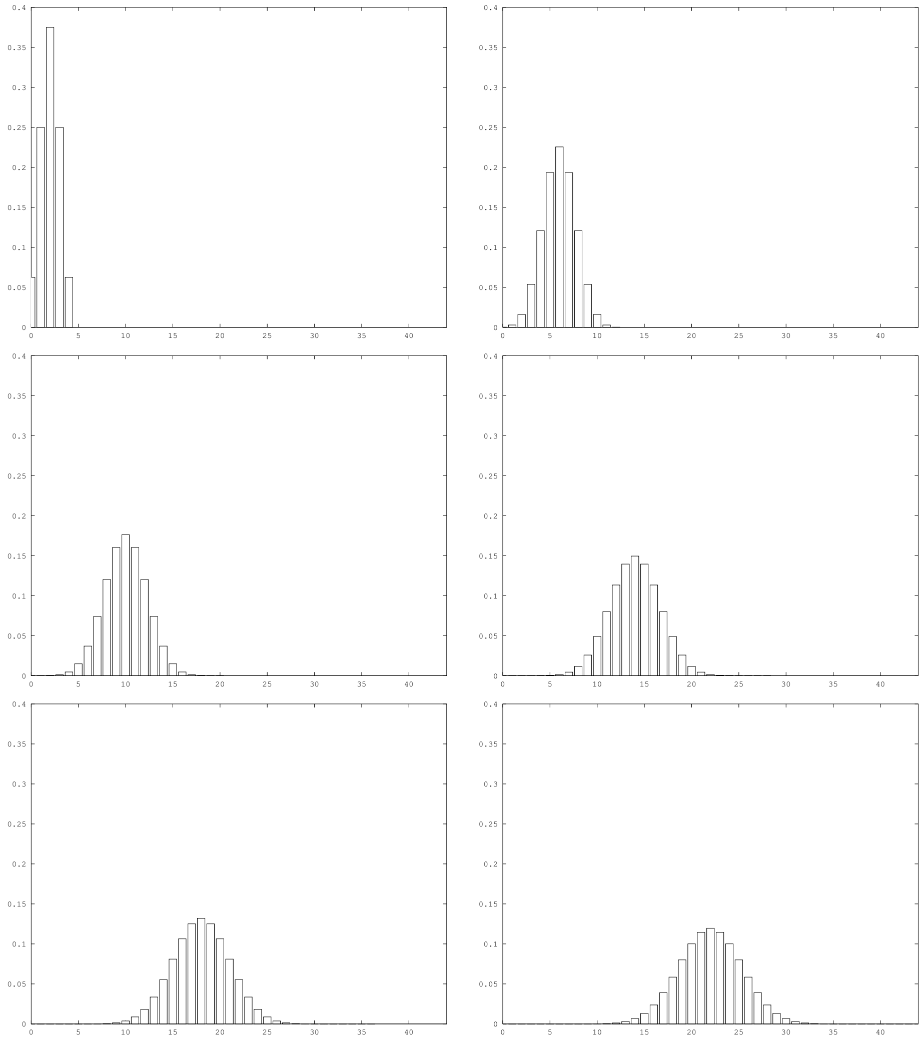

Figura 3.2: Distribuzione binomiale con $p = 1/2$ e $N = 4, 12, 20, 28, 36, 44$.

numero di successi ogni volta ottenuto e dividere per Z. Come visto sopra, si ottiene

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

Si può dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = Np$$

Tale risultato non dovrebbe sorprendere. Consideriamo ancora il lancio di monete. La probabilità che esca testa è $p = 1/2$ e questo significa che se lanciamo la moneta tante volte, diciamo $Z \cdot N$, escono ZNp teste e $ZN(1-p)$ croci. Associamo $x_2 = 1$ all'uscita di testa e $x_1 = 0$ all'uscita di croce. La media di un tale esperimento è $x_1 \cdot ZN(1-p) + x_2 \cdot ZNp$. Possiamo pensare di aver lanciato le monete a gruppi di N lanci. E poiché questi gruppi sono Z, la media dei risultati di ogni gruppo è $(x_1 \cdot ZN(1-p) + x_2 \cdot ZNp)/Z = Np$. Questa non è una vera dimostrazione, ma una giustificazione della sensatezza del risultato.

3.3 Verifica di ipotesi

Supponiamo di voler verificare se una moneta è truccata. Se non è truccata, e associamo il valore 0 alla croce e 1 alla testa, ci aspettiamo che lanciandola N volte i risultati si distribuiscano come in una variabile aleatoria binomiale con $p = 1/2$. Se invece pensiamo che sia sbilanciata a favore della testa, i risultati si distribuiranno come in una variabile aleatoria binomiale con $p > 1/2$. Possiamo allora considerare un esperimento (N lanci della moneta) con due risultati:

H_0 : il numero di teste è distribuito come una binomiale con $p = 1/2$

H_1 : il numero di teste è distribuito come una binomiale con $p > 1/2$

Tale esperimento si chiama *test di verifica di ipotesi unilaterale.* H_0 è chiamata ipotesi *nulla:* è quella che mantiene lo stato attuale delle cose e che non crea sconvolgimenti nel modo corrente di intendere le stesse. Cosa dovrebbe succedere per convincerci che la moneta è truccata? Il numero di teste dovrebbe essere significativamente alto, ben più della metà dei lanci. Dobbiamo quindi individuare una *regione critica* del tipo "numero di teste maggiore o uguale a c", ove c è una parametro da determinare. Se il numero di teste osservato rientra nella regione critica, allora si rifiuta l'ipotesi nulla e si accetta l'ipotesi alternativa. Per il tipo di esperimento che stiamo considerando, il valore c dovrebbe essere del tipo $N/2 + \Delta$. Come determinare tale soglia? Da un lato, non si vorrebbe incorrere nell'errore (detto di *prima specie*) di rifiutare l'ipotesi H_0 qualora essa fosse vera. E siccome, in linea di principio, se H_0 è vera può succedere che lo scarto dalla media del numero di successi sia molto alto (al massimo quando si verificano proprio N successi, la cui probabilità non è nulla ma vale $\binom{N}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^N = \left(\frac{1}{2}\right)^N$), bisognerebbe accettare sempre l'ipotesi H_0, qualunque sia l'esito dell'esperimento. Ma così facendo si rischia di incorrere nell'errore detto di *seconda specie*, cioè di accettare H_0 qualora essa sia falsa. Bisogna fare un compromesso e correre il rischio di commettere un errore, o di prima specie o di seconda.

3.4 Esperimenti in doppio cieco, medicine alternative, placebo

3.5 Esercizi

1. Si calcoli la probabilità che una variabile aleatoria binomiale di parametri $N = 6$, $p = 2/3$ assuma i valori 3 o 4 o 5 o 6.

Capitolo 4

Esperimento in doppio cieco

4.1 Protocollo

Lo studente più anziano è il giudice, un docente il suo segretario. Il giudice mette l'Energy Sprint e l'altro braccialetto dentro due sacchetti di stoffa indistinguibili, davanti a tutti gli studenti. Lo studente più giovane esce dalla stanza con i due sacchetti e un sacchetto di carta. Chiude la porta, mette i sacchetti dentro il sacchetto di carta e lo chiude piegandone la sommità. A questo punto bussa alla porta. Il giudice apre la porta, prende il sacchetto di carta e richiude la porta. Il giudice estrae i sacchetti e li posiziona sulla sua postazione, dentro una scatola di scarpe, sopra due fogli di carta recanti le scritte A e B, rispettivamente. Il giudice richiama lo studente fuori dall'aula. A questo punto, nessuna delle persone presenti in aula conosce il contenuto dei sacchetti. Comincia l'esperimento: lo studente esegue una o più torsioni con il braccio destro teso e il palmo rivolto verso l'alto. Il giudice procede alla generazione casuale di una lettera A o B tramite l'apposito software. Dopo l'uscita della lettera, il segretario prende il sacchetto corrispondente e lo pone sul palmo della mano aperta dello studente di turno, senza che lo studente sappia quale sacchetto è stato sorteggiato. Lo studente esegue la prova di torsione e il giudice e il segretario annotano il risultato. Il sacchetto viene cambiataøe lo studente esegue nuovamente la prova e il giudice e il segretario annotano il risultato. A questo punto aggiornano il foglio dei risultati (vedi allegato) mettendo il nome dello studente, la lettera uscita, e segnando la casella corrispondente al risultato ottenuto dalle due torsioni ($\theta_A < \theta_B$ oppure $\theta_A > \theta_B$). Alla fine dell'esperimento, il segretario apre i sacchetti, svelando così in quale si trova l'Energy Sprint. Il giudice e il segretario firmano il foglio dei risultati *senza* calcolare i totali. I totali saranno calcolati successivamente.

4.2 E se Energy Sprint non funziona?

Proviamo a ripetere mentalmente l'esperimento fatto, *supponendo* di avere usato un Energy Sprint (contenuto, per esempio, nel sacchetto B) difettoso che non produce effetti (o, meglio, che produce gli stessi effetti di un qualunque altro braccialetto). Una prima variabile aleatoria genera le sequenze AB o BA in maniera casuale con probabilità 1/2 ciascuna, cioè

$$\begin{cases} AB & BA \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

e una seconda variabile aleatoria genera $\theta_1 < \theta_2$ (prima rotazione minore della seconda) e $\theta_1 > \theta_2$ (prima rotazione maggiore della seconda) con probabilità $1-q$ e q, cioè

$$\begin{cases} \theta_1 < \theta_2 & \theta_1 > \theta_2 \\ 1-q & q \end{cases}$$

Se Energy Sprint non funziona, le due variabili sono indipendenti e dunque è facile calcolare la probabilità che un singolo esperimento abbia dato "successo" (cioè rotazione con Energy sprint maggiore): è data dalla probabilità che sia uscita la sequenza AB e $\theta_1 < \theta_2$ $(1/2 \cdot (1-q))$ più la probabilità che sia uscita la sequenza BA e $\theta_1 > \theta_B$ $(1/2 \cdot q)$. In tutto, $p = 1/2 \cdot (1-p+p) = 1/2$, indipendentemente dal valore di q che è ignoto (dipende da come ognuno reagisce alla "non" influenza di due sacchetti). Dunque, anche se gli sperimentatori si fossero messi d'accordo di affermare che la prima rotazione è maggiore della seconda ($q = 1$), l'estrazione casuale dell'ordine di esecuzione è in grado di prevenire risultati distorti. Se ripetiamo l'esperimento N volte, esperimento che può dare successo o insuccesso con la stessa probabilità, stiamo considerando una variabile aleatoria binomiale sappiamo quanto vale la probabilità di avere esattamente n successi,

$$f(n) = \binom{N}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

Se invece Energy Sprint funziona, allora il successo dell'esperimento sarà più probabile ($p > 1/2$) e non dipenderà dalla sequenza AB o BA generata. Si potrebbe pensare che $p = 1$, ma in realtà piccole imperfezioni nell'esecuzione dell'esperimento potrebbero pregiudicare la certezza del successo. Dunque, il test che stiamo considerando è

H_0: il numero di successi è distribuito come una binomiale con $p = 1/2$

H_1: il numero di successi è distribuito come una binomiale con $p > 1/2$

4.3 Significatività

Universalmente, si preferisce limitare la possibilità di incorrere nell'errore di prima specie ed evitare lo sforzo di tentare di capire un nuovo fenomeno che invece non esiste. Si fissa allora un livello α di *significatività*, cioè la probabilità massima di fare un errore di prima specie.

Quindi, la strategia da adottare sarà quella di rifiutare l'ipotesi nulla se la probabilità che una variabile binomiale dia un valore maggiore o uguale a $N \cdot 1/2 + \Delta$ vale α, ove α è generalmente un numero preso tra $0.05, 0.01, 0.001$. Se l'esperimento fornisce proprio uno scarto maggiore o uguale di Δ e l'ipotesi H_0 era veramente sbagliata, si è fatto bene a rifiutarla. Se invece era giusta, si è fatto male: ma lo scarto di riferimento Δ era stato scelto in modo che fosse poco probabile (precisamente, α) che venisse fuori uno scarto maggiore o uguale. Quindi, è poco probabile aver sbagliato. Resta la domanda: come si calcola lo scarto di riferimento Δ? Semplicemente con la formula della distribuzione della variabile binomiale. Infatti, dobbiamo considerare, al variare di i, le quantità

$$\sum_{n=N/2+i}^{N} f(n) = \sum_{n=N/2+i}^{N} \binom{N}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{N}, \quad i = 0, \ldots, N/2$$

(assumiamo N pari) che esprimono la probabilità di ottenere $N/2 + i$ o più successi. Se $i = 0$, tale quantità vale poco più di $1/2$. Al crescere di i, tali quantità decrescono. Ad un certo punto, per un valore particolare di i tale quantità vale α (o un po' di meno, visto che non variano con continuità). Quello sarà il valore dello scarto di riferimento Δ.

	0.05	0.01	0.001
20	5	6	8
40	6	8	11
60	7	10	13
78	8	11	15
80	8	11	15

Tabella 4.1: Valori degli scarti di riferimento Δ per vari $\alpha = 0.05, 0.01, 0.001$ e $N = 20, 40, 60, 78, 80$.

Nella Tabella 4.1 è possibile vedere alcuni valori dello scarto di riferimento per diversi valori di N e di α.

4.4 Esercizi

1. Verificare la correttezza della Tabella 4.1.

2. L'esperimento in doppio cieco condotto il 15 Febbraio 2012 al "Medi", su 78 prove, ha dato i seguenti risultati: 42 A, 36 B, 37 casi in cui l'Energy Sprint funziona. Quali conclusioni ne puoi trarre?

Bibliografia

[1] Hugh D. Young, Elaborazione statistica dei dati sperimentali, Veschi Editore, Roma.