

Bolle di sapone, superfici di area minima, network ottimali: un'avventura matematica dalla fondazione di Cartagine alle nanotecnologie

S. Baldo

Università di Verona

Verona, Istituto alle Stimate 16/3/2022



UNIVERSITÀ
di **VERONA**

Dipartimento
di **INFORMATICA**

Ringraziamenti. . . in anticipo.

Una parte non trascurabile di quel che vedremo oggi viene da **idee** e **materiali** del **Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica** dell'Università di Trento e dal centro **MateMatita - Centro di Ricerca Universitario per la Comunicazione e l'Apprendimento Informale della Matematica**, con cui collaboro. Ringrazio in particolare **Italo Tamanini** dell'Università di Trento, che è stato di grande ispirazione per tutte queste attività! I contorni che userò per ottenere i film di sapone li ho realizzati con una stampante 3D, ma possono essere ottenuti anche con del semplice fil di ferro: tutti gli esperimenti che vedremo sono facilmente replicabili a casa. Il liquido che userò è invece semplice acqua con un po' di sapone per i piatti!



UNIVERSITÀ
di VERONA

Dipartimento
di INFORMATICA



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI TRENTO
Dipartimento di Matematica

Perché i film di sapone?

Chi non ha mai giocato con le bolle di sapone?

Ma perché le bolle di sapone sono sferiche?

Perché i film di sapone?

Chi non ha mai giocato con le bolle di sapone?

Ma perché le bolle di sapone sono sferiche?

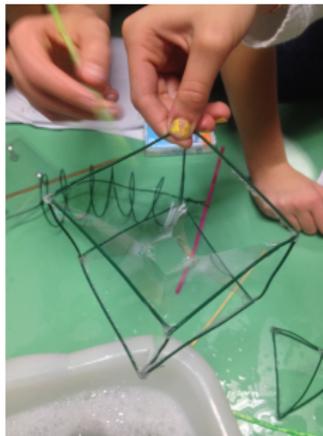
Questo avviene perché la sfera ha area minima tra tutte le superfici che racchiudono lo stesso volume (problema isoperimetrico).



Le bolle risolvono un problema matematico semplice e interessante!

Perché i film di sapone?

Sperimentare con bolle e film di sapone è facile, affascinante e può essere fatto con **materiali che abbiamo comunemente in casa**. Immergete un filo metallico chiuso a cappio nell'acqua saponata, estraetelo delicatamente e vedrete delle strutture belle e spesso inaspettate!

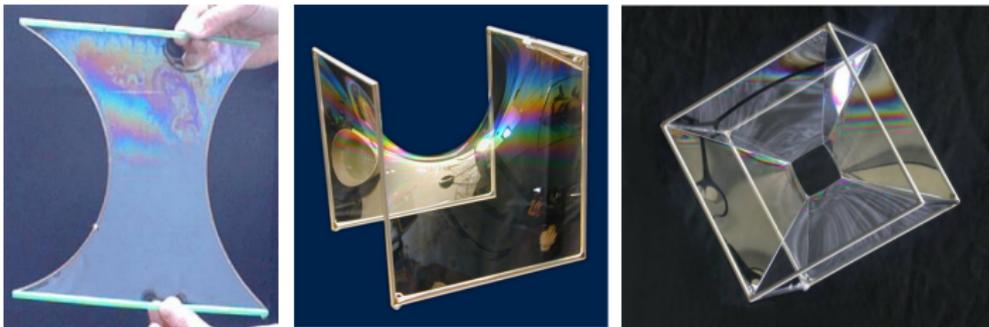


Perché i film di sapone?

Inoltre, film e bolle di sapone possono essere descritti con un modello matematico **molto semplice** eppure **incredibilmente ricco**:

Perché i film di sapone?

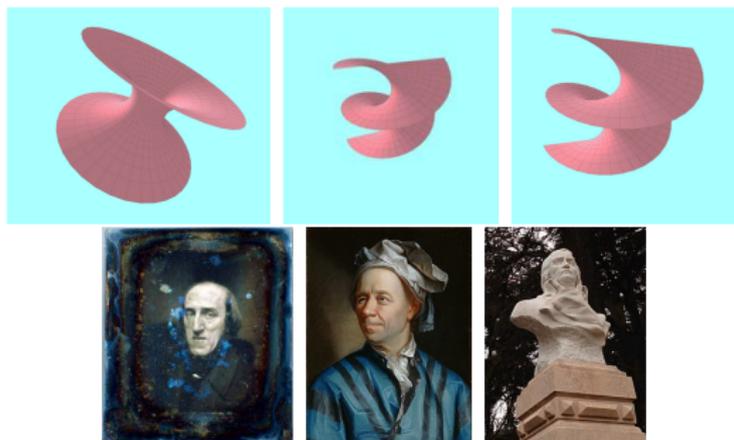
Inoltre, film e bolle di sapone possono essere descritti con un modello matematico **molto semplice** eppure **incredibilmente ricco**: a causa della tensione superficiale, **le lamine di sapone cercano di minimizzare la propria area** tra tutte le possibili superfici aventi lo stesso contorno (il filo metallico).



Semplice da raccontare ma **incredibilmente difficile da risolvere!**

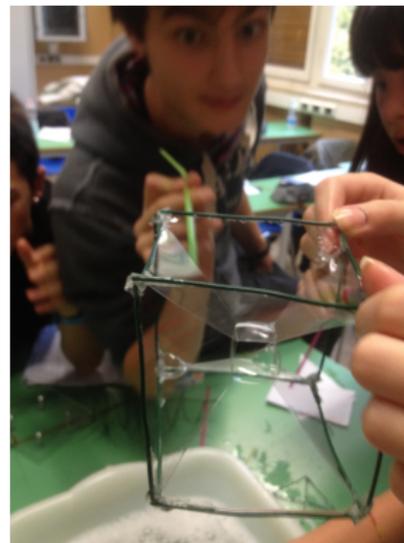
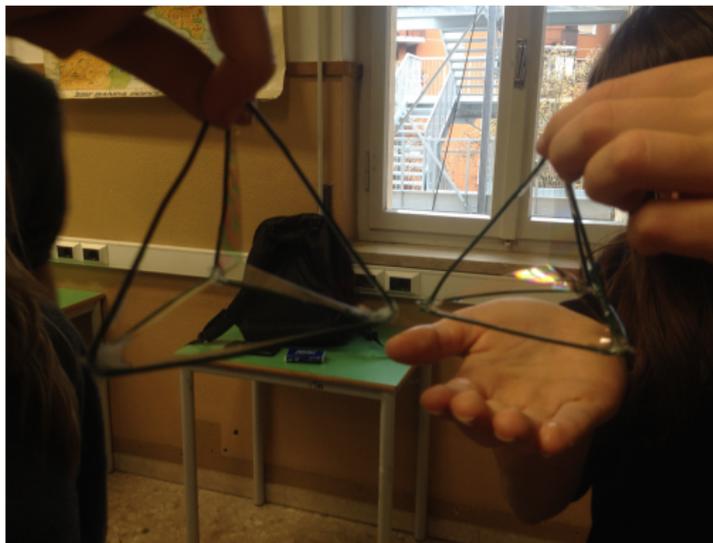
Perché i film di sapone?

Questo è noto come il Problema di Plateau (dal fisico belga J. Plateau, 1801-1883), anche se era stato già studiato da matematici come Leonhard Euler (catenoide - 1744) e Jean-Baptiste Meusnier de la Place (elicoide - 1776)



Perché i film di sapone?

... e i ragazzi della **secondaria di primo grado** e delle **scuole superiori**...



Perché i film di sapone?

ma è anche così **complesso e sfuggente** che le superfici minime sono **oggetto di ricerca d'avanguardia in matematica**:

Annals of Mathematics, 155 (2002), 459-489

Proof of the Double Bubble Conjecture

By MICHAEL HUTCHINGS, FRANK MORGAN, MARIO RITORÉ, and ANTONIO ROS*

Abstract

We prove that the standard double bubble provides the least-area way to enclose and separate two regions of prescribed volume in \mathbb{R}^2 .

1. Introduction

Archimedes and Zenodorus (see [Z], p. 272) claimed and Schwarz [S] proved that the round sphere is the best-packer way to enclose a given volume in \mathbb{R}^3 . The Double Bubble Conjecture, long believed (see [F], pp. 308-309), [H], [R], [S] but only recently stated as a conjecture [F], [S], says that the standard double soap bubble of Figure 1, consisting of two spherical caps separated by a spherical cap or a flat disc, meeting at 120-degree angles, provides the least-perimeter way to enclose and separate two given volumes.

THEOREM (see [1]). In \mathbb{R}^2 , the unique perimeter-minimizing double bubble enclosing and separating regions R_1 and R_2 of prescribed volumes v_1 and v_2 is a standard double bubble as in Figure 1, consisting of three spherical caps meeting along a common circle of 120-degree angles. (For equal volumes, the bubble cap is a flat disc.)

The analogous result in \mathbb{R}^3 was proved by the 1988 Williams College "SMALL" undergraduate research Geometry Group [F]. The case of equal volumes in \mathbb{R}^3 was proved with the help of a computer in 1993 by Hans Bockhorn and Michael BIRN, FRG, [BIR], [BIR1], [BIR2], [BIR3], [BIR4]. In this paper we give a complete, computer-free proof of the Double Bubble Conjecture for arbitrary volumes in \mathbb{R}^2 , using stability arguments, as announced in [BIR4B].

Richard, Williams, Lei and Stephen [BIR5] have generalized our results to \mathbb{R}^n and certain higher dimensional cases (where at least one region is known to be convex). The 2003 edition of [M] treats bubble clusters through these recent results.

*Mathematics Subject Classification. Primary: 52B10; Secondary: 58E12.

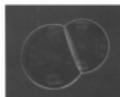


Figure 1. The standard double bubble provides the best-packer way to enclose and separate two prescribed volumes. Computer graphics copyright John M. Sullivan, University of Illinois (<http://www.math.uiuc.edu/~jms/graphics/>).

Previous results (see [M], Chapters 13 and 14). Our strategy for proving Theorem 1.1 is to assume that a given double bubble minimizes perimeter and to use this assumption to deduce that the double bubble is standard. This strategy is valid only if we know that a perimeter-minimizing double bubble exists. P. Almgren [A], The VII (see [M], Chap. 13) proved the existence and almost-everywhere regularity of perimeter-minimizing bubble clusters enclosing a prescribed volume in \mathbb{R}^n , using geometric measure theory. A Taylor [T] proved that minimizers in \mathbb{R}^n consist of smoothly constant-mean-curvature spherical caps meeting in discs or 120-degree angles along circles, which he could meet only in finite or isolated points. An argument suggested by White, which was written up by Pinn [P], Thea. 3.4 (see Birkhoff [Bk], Thea. 142), shows further that any perimeter-minimizing double bubble in \mathbb{R}^n (for $n \geq 2$) has identical symmetry about some line.

Unfortunately, the existence result depends on allowing the enclosed volumes R_1 and R_2 to be disconnected. The complementary "no-neck" region could also be proven to be disconnected. (It can seem to require the region to be connected, they might be pinched elements in the remaining limit, as this concerning (what should say) [Birkhoff [Bk]] (partially dealt with the complications using convexity and topological arguments) to give a perimeter-minimizing double bubble that both regions have positive perimeter (see 4.1) and lower than the convex or connected. However, there are three outcomes (see [B]) which pairs agree bounds on the structure of components of R_1 and R_2 , depending on the dimension n and the volumes v_1, v_2 .

Mathematics Subject Classification. Primary: 52B10; Secondary: 58E12.

M. Hutchings, F. Morgan, M. Ritoré, A. Ros, "Proof of the Double Bubble Conjecture", *Annals of Mathematics* **155** (2002), 459-489

Risolviamo dei problemi interessanti con i film di sapone...

- Vi ho dato un'idea dell'interesse che possono avere le bolle di sapone e i film di sapone per **matematici e scienziati**: vedremo qualche altro esempio alla fine! Inoltre, il principio fisico che spiega il fenomeno (le superfici di sapone cercano di avere **l'area più piccola possibile**) è semplicissimo!

Risolviamo dei problemi interessanti con i film di sapone...

- Vi ho dato un'idea dell'interesse che possono avere le bolle di sapone e i film di sapone per **matematici e scienziati**: vedremo qualche altro esempio alla fine! Inoltre, il principio fisico che spiega il fenomeno (le superfici di sapone cercano di avere **l'area più piccola possibile**) è semplicissimo!
- Vedremo dopo che i film di sapone hanno la proprietà geometrica di avere **curvatura media 0** in tutti i punti...E cosa vuol dire quest'arcana affermazione!

Risolviamo dei problemi interessanti con i film di sapone...

- Già che ci siamo, accenniamo anche alle **leggi di Plateau**: i film di sapone si incontrano solo tre a tre, lungo curve o segmenti su cui formano angoli uguali di 120° ...
- A loro volta queste curve si possono incontrare solo quattro a quattro, formando angoli di $109.4712\dots^\circ$.
- Questi fatti sono stati osservati sperimentalmente da **Joseph Plateau** nel 1873, ma dimostrati da **Jean Taylor** solo nel 1976!



Due problemi più “adatti al biennio” . . .

- Ma ci sono dei problemi collegati ai film di sapone che coinvolgano “solo” la matematica del biennio? Perché purtroppo lo studio delle superfici curve richiede strumenti un po’ più sofisticati

Due problemi più “adatti al biennio” . . .

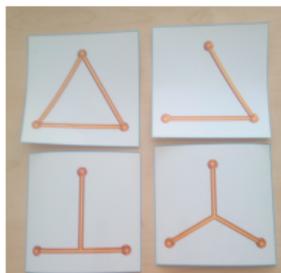
- Ma ci sono dei problemi collegati ai film di sapone che coinvolgano “solo” la matematica del biennio? Perché purtroppo lo studio delle superfici curve richiede strumenti un po’ più sofisticati
- Ci sono almeno due **problemi semplici e significativi** che posso proporvi come **sfida matematica** e che si possono **risolvere in modo spettacolare con l’acqua saponata**:
 - **La ricerca di reti minime**
 - **Il problema di Didone**

Le reti minime

Supponiamo di dover collegare due città A e B in pianura con una strada.

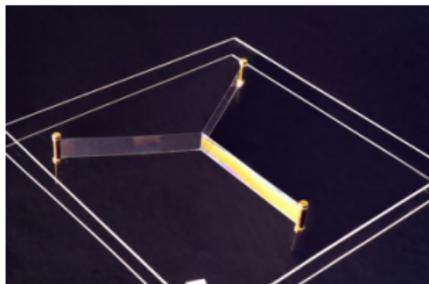
Capiamo subito che la strada **più corta possibile** è un **segmento di retta!**

Ma cosa succede se le città sono 3, ai vertici di un **triangolo equilatero**? Qual è la rete di strade di lunghezza minima che le congiunge? Ecco alcune possibilità



Reti minime in un triangolo

Potete misurare le reti proposte (o calcolarne la lunghezza) e trovare la più corta. . . ma ce ne sono di ancora più corte?
Le lamine di sapone conoscono la risposta:

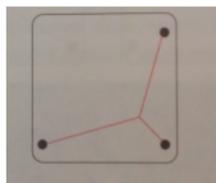


Due lastre di plexiglass sono separate da 3 pioli metallici posti ai vertici di un triangolo equilatero. Immergendo in acqua saponata, appare la rete di lunghezza minima!

Reti minime in un triangolo

Che succede se il triangolo **non è** equilatero?

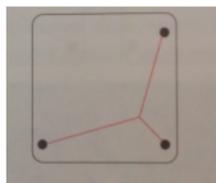
Le strade nella rete minima non si incontrano più nel baricentro. . .



Reti minime in un triangolo

Che succede se il triangolo **non è** equilatero?

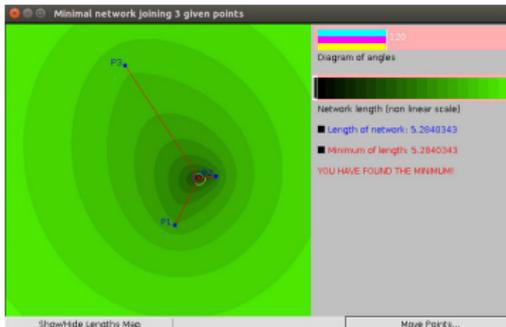
Le strade nella rete minima non si incontrano più nel baricentro. . .



. . . ma nel cosiddetto **punto di Fermat**, dove le “strade” formano **angoli uguali di 120°** . Ricordate J. Plateau e J. Taylor?

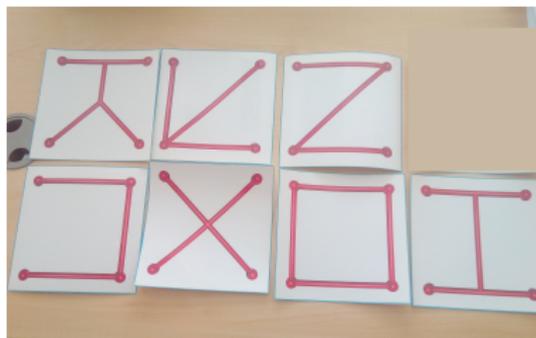
Reti minime in un triangolo

Per provare questa “**proprietà dei 120°**” delle reti minime servono strumenti un po’ più avanzati “da triennio” (anche se non necessariamente il calcolo differenziale). . . ma è possibile convincersene con un apposito programmino o con paragoni meccanici. . .



Rete minima nel quadrato

Che succede se abbiamo 4 città ai vertici di un quadrato?



Rete minima nel quadrato

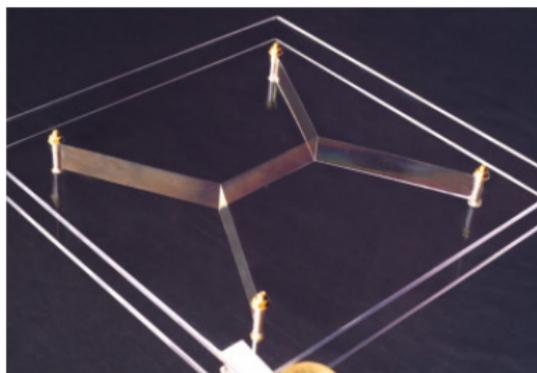
Che succede se abbiamo 4 città ai vertici di un quadrato?



Tra gli esempi mostrati, la rete più corta è quella a forma di "X".
Ma...

Rete minima nel quadrato

... c'è una rete più corta (la più corta di tutte), che i film di sapone trovano subito:



Ancora una volta, i segmenti formano angoli uguali di 120° .

Le “leggi” delle reti minime

- È facile vedere che in una **rete minima** (qualunque sia la posizione dei vertici) non ci possono essere **angoli minori di 120°** : data una tale configurazione, ce n'è sicuramente una **più corta**.
- In particolare, più segmenti possono incontrarsi in un punto interno della rete **solo tre a tre**, e solo con angoli uguali di 120° .
- D'altra parte, nei **vertici** della rete (le “città”) possono convergere due segmenti con un angolo maggiore o uguale a 120° .

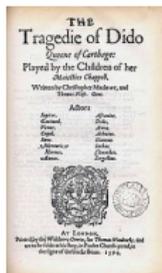
La regina Didone e la fondazione di Cartagine



La mitologia antica ci narra della regina fenicia Didone, che dovette scappare da un parente malvagio assieme ad un gruppo di seguaci ed arrivò per mare sulle coste del Nordafrica. Decise di fermarsi in quel luogo per fondare la città di Cartagine, la futura rivale di Roma. Dopo una trattativa, ottenne dal sovrano locale di poter comprare **tanta terra, quanta potesse essere racchiusa dalla pelle di un bue.**

Il problema di Didone

L'astuta regina tagliò la pelle di bue in una lunghissima stringa di cuoio, che poi usò per circondare un rispettabile appezzamento di terreno.



PROBLEMA DI DIDONE o PROBLEMA ISOPERIMETRICO:
Qual è la forma da dare alla corda che massimizza l'area racchiusa (a parità della lunghezza - fissa - della corda)?

Il problema di Didone

La soluzione del problema di Didone è **il cerchio**.

Questo è noto sin dall'antichità, quando Zenodoro diede una dimostrazione - anche se incompleta secondo gli standard moderni.

La prima dimostrazione corretta risale al diciannovesimo secolo.

L'idea di Zenodoro era la seguente:

- Tra tutti i triangoli di dato perimetro, l'equilatero ha area massima
- Tra tutti i quadrilateri di dato perimetro, il quadrato ha area massima
- Tra tutti gli n -agoni di dato perimetro, quello regolare ha area massima
- Tra i poligoni regolari con lo stesso perimetro, al crescere del numero di lati cresce l'area

Il problema di Didone

- Quindi, è intuitivo che il cerchio abbia area più grande di qualunque poligono con lo stesso perimetro

In un workshop con i ragazzi, ci sono molti modi di rendere plausibile l'idea di Zenodoro!

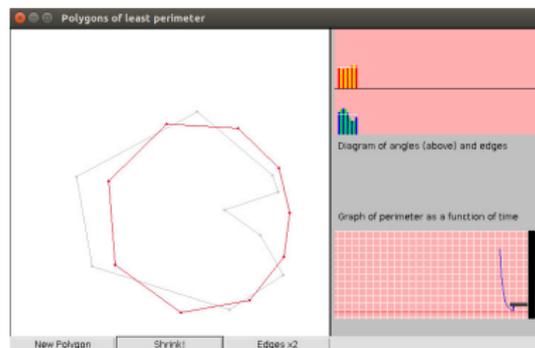
*Alcuni poligoni articolati con lo stesso perimetro possono essere riempiti con chicchi di riso.
All'aumentare del numero di lati, aumenta la quantità di chicchi che il poligono può contenere!*



Il problema di Didone

Interessante è pure il problema duale, che consiste nel **minimizzare il perimetro** a **parità di area**: è la versione bidimensionale del problema delle bolle di sapone!

Un programma interattivo che minimizza il perimetro ad area fissata: scegliere i vertici cliccando con il mouse e premere "Shrink". Il poligono evolve, ad area costante, verso quello di perimetro minimo.



Il problema di Didone

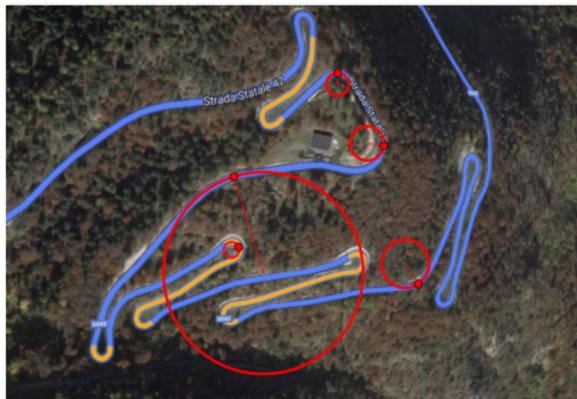
D'altra parte, è facile trovare la soluzione del problema di Didone con i film di sapone:

Un pezzo di filo è legato in un cappio di lunghezza fissa e adagiato su una lamina di sapone piana. La parte di lamina dentro il cappio viene bucata: il buco diventa immediatamente circolare!



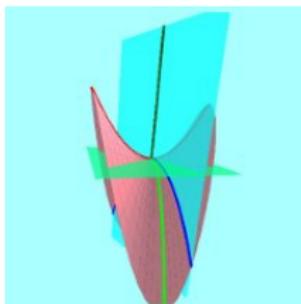
Geometria delle superfici minime

Come abbiamo detto, le superfici minime hanno **curvatura media nulla** in tutti i loro punti. Vediamo cosa significa! Il **raggio di curvatura** di una curva in un punto è il raggio del **cerchio che meglio approssima la curva vicino al punto**. La **curvatura** è il **reciproco del raggio di curvatura**.



In soldoni, **la curvatura in un punto ci dice di quando dovremmo girare il volante se volessimo percorrere in macchina quel tratto di curva.**

Ecco un'animazione che illustra le curvatures normali e le curvatures principali di una superficie in un suo punto.



Le curvatures principali k_1 , k_2 sono la più grande e la più piccola delle curvatures normali (prese col loro segno): corrispondono a due direzioni ortogonali tra loro del piano secante.

La **curvatura media** è la **media aritmetica delle curvatures principali**: $H = (k_1 + k_2)/2$.

Le superfici di area minima hanno **curvatura media zero in tutti i punti!**

E' importante anche la **curvatura di Gauss**, che è il prodotto delle curvatures principali:

$$K = k_1 k_2.$$

Le Superfici Minime dei matematici

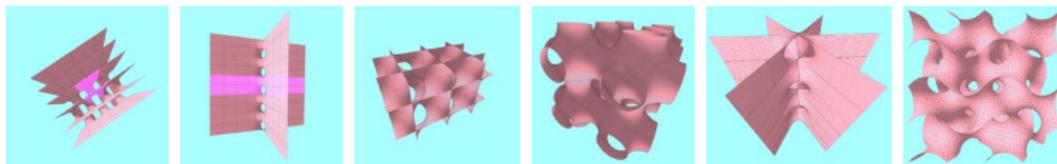
- Una superficie di area minima ha **sempre curvatura media zero**
- Viceversa, se una superficie ha curvatura media zero in tutti i punti, **ogni sua porzione sufficientemente piccola** ha area minima tra le superfici con il suo stesso bordo
- Per questo motivo, i matematici chiamano **Superficie Minima** una qualunque superficie con curvatura media nulla: se essa ha anche area minima, si chiama *superficie minima minimizzante* . . .



Superfici minime periodiche



Nel corso del XIX e XX sec. i matematici **B. Riemann**, **A. Enneper**, **K. Weierstrass**, **H. Schwarz**, **A. Schoen**... scoprirono un gran numero di **superfici minime periodiche**



Superfici bellissime, ma **non ottenibili come film di sapone** perché non sono **globalmente** minimizzanti

Applicazioni tecnologiche?

- Una domanda che sorge spontaneamente è: **a cosa servono le superfici minime?**
Soltanto a **far giocare i matematici?**

Applicazioni tecnologiche?

- Una domanda che sorge spontaneamente è: **a cosa servono le superfici minime?**

Soltanto a **far giocare i matematici?**



- **Anche gli architetti:** la copertura dello stadio olimpico di Monaco (Frei Otto, 1972) è realizzata con superfici minime
- Alcuni vegetali ricordano superfici minime (**Articolo**)
- Gli endoscheletri di alcuni animali marini (cetrioli di mare) hanno una **struttura che negli anni '80 è stata messa in relazione con le superfici minime triplamente periodiche (TPMS).**

Applicazioni tecnologiche?

- Una domanda che sorge spontaneamente è: **a cosa servono le superfici minime?**

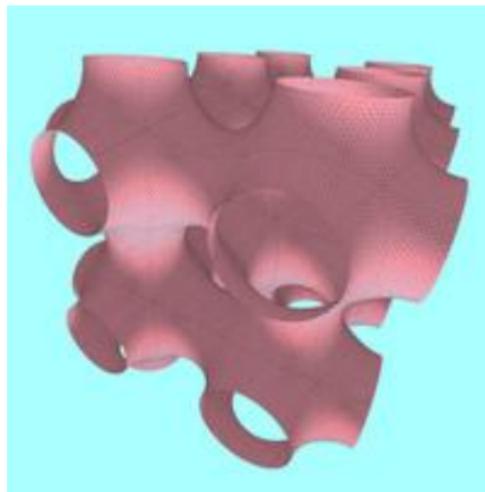
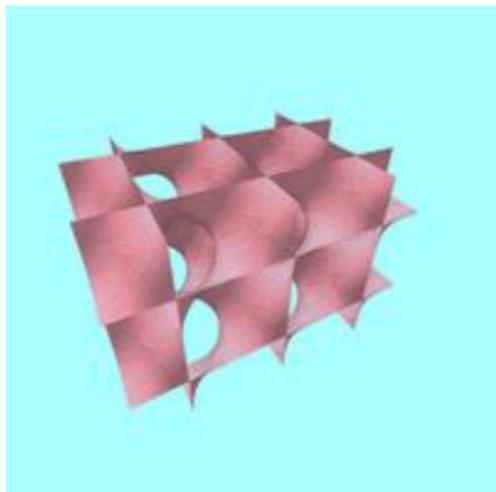
Soltanto a **far giocare i matematici?**



- **Anche gli architetti:** la copertura dello stadio olimpico di Monaco (Frei Otto, 1972) è realizzata con superfici minime
- Alcuni vegetali ricordano superfici minime (**Articolo**)
- Gli endoscheletri di alcuni animali marini (cetrioli di mare) hanno una **struttura che negli anni '80 è stata messa in relazione con le superfici minime triplamente periodiche (TPMS)**. Non molto eccitante, vero?

Superfici minime triplamente periodiche

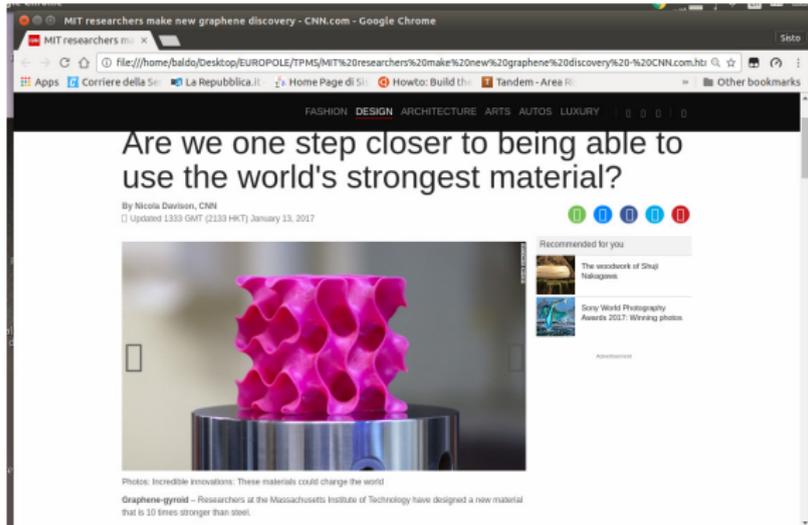
Dunque le TPMS sono degli oggetti molto belli ma sostanzialmente “inutili”?



Saranno davvero così inutili?

"The world's strongest material"

Sito della CNN:



Articoli scientifici: (1), (2).

Protesi, Impalcature biocompatibili per tessuti

Impalcature biocompatibili:

Received: 22/01/1994-1994

Contents lists available at ScienceDirect

Biomaterials

Journal homepage: www.elsevier.com/locate/biomaterials

Leading Opinion

Porous scaffold design using the distance field and triply periodic: minimal surface models¹

Dong J. Yoo^{*}

Department of Computer Aided Mechanical Design Engineering, Seoul National University, San 51-1, P.O. Box 58, 151-747, Seoul, Korea

ARTICLE INFO

Article history:
Received 22 June 2001
Accepted 17 July 2001
Available online 27 July 2001

Keywords:
Scaffolds
Triple periodic minimal surface
Triply periodic
Porous scaffold

ABSTRACT

An effective method for the 3D porous scaffold design of bone tissue is presented based on a hybrid method of distance field and triply periodic minimal surface (TPMS). By the creative application of the distance field algorithm into the distance operation of the mathematical model and TPMS based on cellularity, an almost infinite porous scaffolds having the complicated micro-structure and high quality can be made and fabricated in a specific manner based on a easily done and without the difficult and time-consuming etching and re-etching processes. After generating the distance field for the given tissue model and choosing optimal surface structure, a series of stable mathematical models are able to create a complete porous scaffold. Experimental results show that the proposed scaffold design method has the potential to construct the perfectly interconnected porous scaffold under the TPMS data collection and the given micro-geometry in a convenient framework irrespective of the complexity of the model.

©2002 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Recently, tissue engineering scientists are attempting to engineer virtually a variety of human tissues/organs including cartilage, bone, heart valves, nerves, muscles, liver, etc. Tissue engineering has been the ultimate goal of surgery from ancient times to the present. Tissue engineering emerged in the early 1980s to address limitations of tissue grafting and repair. Tissue engineering techniques generally require the use of a porous scaffold, which serves as a three-dimensional (3D) template for initial or de novo tissue [1,2]. Ideally, a porous scaffold should have the following characteristics: (i) three-dimensional and highly porous with an interconnected pore network for cell growth and flow transport of nutrients and metabolic waste; (ii) biocompatible and bioabsorbable with a controllable degradation and resorption rate to match cell/tissue growth/in vivo and in vitro; (iii) suitable surface chemistry for cell attachment, proliferation, and differentiation and (iv) mechanic properties to match those of the tissue at the site of implantation [3]. Based on the structural pre-requisites listed above, one major goal in scaffold production is to maximize high levels of accurate control over their structure (e.g., spatial form, mechanical strength, density, porosity) and micro-structure (e.g., pore size, pore distribution, pore interconnectivity) properties [4]. Although a variety of conventional manufacturing fabrication techniques such as salt leaching [4], gas foaming [5], and phase separation followed by freeze-drying [6] are available for scaffold production, most of them allow the rough tuning of only a few parameters like porosity and pore size. The only advanced fabrication techniques, known as solid freeform fabrication (SFF) or rapid prototyping (RP), have been successfully used to fabricate complex parts with a focus on the rapid manufacturing of prototypes for non-biomedical applications. More recently, biomaterial scientists used these technologies to fabricate scaffolds for tissue engineering. As a result of the introduction of these technologies, tissue engineered scaffolds can be manufactured that contain a controlled spatial distribution of cell and growth factors, as well as engineered gradients of scaffold materials with a predefined micro-structure. Among these technologies are selective laser sintering [7], fused deposition modeling [8], ink jet printing [9] and stereolithography [10]. The stereolithography is particularly suitable with respect to the freedom of design and scale. The working principle of stereolithography is based on optically controlled solidification of a liquid photore-

Articolo scientifico sulle **protesi ossee**