Rotte nautiche, geometria della sfera, satelliti: aspetti matematici e fisici della cartografia da Cristoforo Colombo al GPS

S. Baldo

Università di Verona

"Oltre la Luna", Verona, 20/11/2019

Esplorazione della terra/conquista dello spazio. . .

Il mio intervento vuole toccare gli intimi collegamenti tra alcune scoperte rivoluzionarie in matematica e fisica e lo sviluppo della rappresentazione cartografica della superficie terrestre o dei metodi per rilevare la nostra posizione sulla Terra.
Perché parlare di carte geografiche in un Festival dedicato allo sbarco sulla Luna?
Se dimentichiamo per un momento le motivazioni geopolitiche (e anche se ce ne ricordiamo!), c'è qualcosa in comune tra la stagione delle scoperte geografice del XV-XVI sec. e la conquista dello spazio nel XX sec.
Tralasciamo un istante la ricerca di nuove rotte commerciali, dell'egemonia in Europa e nel nel mondo, la guerra fredda tra il blocco occidentale e l'Unione Sovietica: una caratteristica comune alle due stagioni è certamente il desiderio umano di conoscere e espandere i propri orizzonti!
Inoltre, cinquecento anni dopo Colombo, la conquista dello spazio e la disponibilità di satelliti artificiali ha migliorato enormemente la nostra capacità di spostarci sul nostro pianeta senza eccessivi errori: portiamo tutti in tasca un GPS estremamente affidabile!

Cristoforo Colombo e Paolo dal Pozzo Toscanelli. . .

Torniamo al 1492! A volte, una cattiva mappa può cambiare la storia: Cristoforo Colombo si basa (appositamente?) sui calcoli errati di Claudio Tolomeo, ripresi tra gli altri da Paolo dal Pozzo Toscanelli e parte per il suo viaggio verso il Giappone immaginando una Terra molto più piccola del reale. I caluniatissimi “scienziati di corte” di Salamanca, contrari a finanziare Colombo, NON erano terrapiattisti ignoranti, ma probabilmente conoscevano meglio di lui stime attendibili del raggio terrestre e dell’estensione dell’Asia! Per sua fortuna, Colombo non perisce in un viaggio troppo lungo, ma ri-scopre l’America.

La velocissima espansione europea. . .

In seguito, la storia si muove velocissima: il viaggio di Vasco da Gama è del 1496-'97, quello di Magellano comincia nel 1519, anno in cui Carlo V diventa Imperatore. . . Pochi anni dopo, lo stesso potrà vantarsi che sul suo impero non tramonta mai il Sole!

A quel punto, è evidente che gli spagnoli e le potenze marittime loro rivali in Europa avevano un disperato bisogno di buone mappe, migliori di quelle derivate da Tolomeo!
Ma mettere su carta la superficie di una sfera è tutt'altro che facile!

La geometria della sfera

Conosciamo quasi tutti la vecchia storiella dell'esploratore e dell'orso:
Una mattina un esploratore esce dalla sua tenda, percorre 10 Km verso Sud, percorre altri 10 Km verso Est e infine altri 10 Km verso Nord. È un po' sorpreso perché è tornato alla sua tenda... e deve sparare in aria per scacciare un orso che vuole razziare le sue provviste.

Di che colore è l'orso?

La geometria della sfera

Conosciamo quasi tutti la vecchia storiella dell'esploratore e dell'orso:
Una mattina un esploratore esce dalla sua tenda, percorre 10 Km verso Sud, percorre altri 10 Km verso Est e infine altri 10 Km verso Nord. È un po' sorpreso perché è tornato alla sua tenda. . . e deve sparare in aria per scacciare un orso che vuole razziare le sue provviste.

Di che colore è l'orso?

La geometria della sfera è molto diversa da quella del piano!

La geometria della sfera

Siccome la sfera è un buon modello sia della Terra che della volta celeste, sin dall'epoca ellenistica i matematici ne hanno studiato la geometria: per i primi risultati di trigonometria sferica possiamo citare ad esempio Ipparco da Nicea (II sec. a.C.), Menelao da Alessandria (I-II sec.), Claudio Tolomeo (II sec.), al-Biruni (XI sec.).
L'interesse per questa disciplina passa anche in Europa occidentale: poco prima di Colombo di geometria sferica si occupa ad esempio il matematico, astronomo ed astrologo tedesco Regiomontano (Johannes Müller da Königsberg, 1436-1476).

Gerardo Mercatore

Uno dei più grandi studiosi di questa disciplina nel '500 è però il cartografo fiammingo Mercatore (Geert de Kremer, 1512-1594, latinizzato in Mercator).

Nel 1569 Mercatore pubblica una mappa del mondo conosciuto, destinata ai naviganti, in cui si ripromette di mantenere gli angoli. . . e anche le proporzioni (locali) tra le distanze nonché la forma delle terre emerse "quatenus fieri potest". . .

Gerardo Mercatore: mappa del 1569

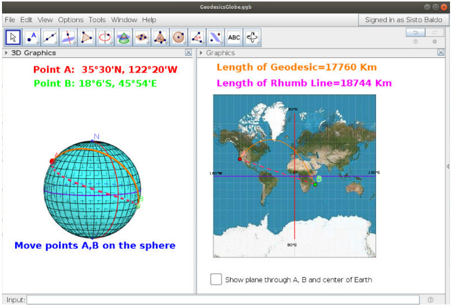
Nova et Aucta Orbis Terrae Descriptio ad Usum Navigantium Emendate Accommodata

Gerardo Mercatore: mappa del 1569

La proiezione di Mercatore ha molte proprietà desiderabili.
È infatti conforme (conserva gli angoli, e quindi in piccolo le forme) e meridiani e paralleli vi formano un reticolo rettangolare.
Per questo, le rotte che tagliano i paralleli con angolo costante (le Lossodromie, in inglese Rhumb Lines), sono rappresentate sulla carta da segmenti.
Tali rotte hanno una grande importanza pratica per la navigazione, perché si percorrono seguendo una direzione costante sulla bussola.
Non a caso, la proiezione di Mercatore è tuttora molto utilizzata: Google Maps ne usa una variante nota come Web Mercator.
La lossodromia non rappresenta però il percorso biù breve tra due punti sulla superficie terrestre (chiamato ortodromia o geodetica): questo si ottiene percorrendo l'arco di cerchio massimo che unisce i due punti.

Ortodromie e Lossodromie sulla proiezione di Mercatore

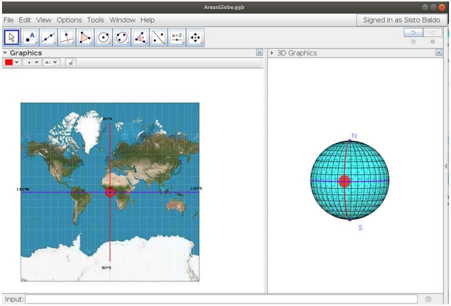
Vediamo alcune proprietà poco desiderabili della proiezione di Mercatore:



Il percorso più breve tra due punti non è mai rettilineo sulla mappa, che esagera enormemente le distanze vicino ai poli.

Distorsione delle aree...

La mappa di Mercatore si comporta ancora peggio per quanto riguarda le aree: il continente europeo, la Groenlandia, la Russia asiatica sembrano enormemente più grandi di quel che sono!



Per questo motivo, nelle applicazioni diverse dalla navigazione in cui non è così importante la conservazione degli angoli si usano altre proiezioni che conservano l'area!

La carta perfetta non esiste e non può esistere...

Ma Mercatore e i suoi successori non potevano fare di meglio?
Come mai nessuno ha inventato la carta perfetta?

La carta perfetta non esiste e non può esistere...

Ma Mercatore e i suoi successori non potevano fare di meglio?
Come mai nessuno ha inventato la carta perfetta?
Perchè nessuna carta piana può rappresentare in modo perfetto le distanze (in proporzione), neanche per una piccola porzione della superficie terrestre.
Per capirne il motivo, ci serve una semplicissima definizione:
Tre punti A, B, C sulla sfera identificano un triangolo sferico, i cui lati sono gli archi di cerchio massimo che uniscono a due a due i punti.
Ebbene, i triangoli sferici hanno proprietà molto diverse dai triangoli piani!

Angoli interni di un triangolo ed eccesso sferico. . .

TEOREMA (T. Harriot 1604, A. Girard 1626): Siano α, β, γ *gli angoli interni del triangolo sferico* ABC, *misurati in radianti. Allora* $\alpha+\beta+\gamma\geq\pi$. *Inoltre,*

$$Area(ABC)=R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi),$$

ove R *è il raggio della sfera. La quantità* $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ *si chiama eccesso sferico del triangolo.*

Angoli interni di un triangolo ed eccesso sferico...

TEOREMA (T. Harriot 1604, A. Girard 1626): Siano α, β, γ gli angoli interni del triangolo sferico ABC, misurati in radianti. Allora $\alpha + \beta + \gamma \geq \pi$. Inoltre,

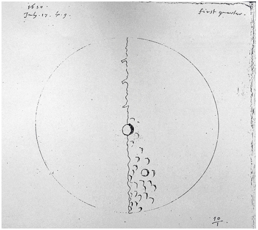
$$Area(ABC) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

ove R è il raggio della sfera. La quantità $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ si chiama eccesso sferico del triangolo.

Siccome la somma degli angoli interni di un triangolo piano è sempre π, la carta geografica perfetta non può esistere!. Posso sperare di rappresentare accuratamente solo i triangoli di area 0...

Il Teorema di Harriot-Girard. . .

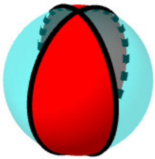
Questo importante risultato fu scoperto da Thomas Harriot nel 1604 e fu pubblicato per la prima volta da Albert Girard nel 1626. Anche se, secondo alcuni studiosi, il teorema era noto a Regiomontano più di cent'anni prima.



Nel 1609 Thomas Harriot, precedendo di qualche mese Galileo, realizzò uno schizzo della Luna da lui osservata al telescopio (la figura riprodotta è del 1610).

Il Teorema di Harriot-Girard. . .

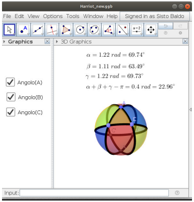
La dimostrazione del teorema è sorprendentemente elementare!



È evidente che l'area del doppio spicchio (fuso) sferico in figura è direttamente proporzionale all'angolo α. Siccome per $\alpha = \pi$ si ottiene tutta la sfera, che ha area $4\pi R^2$, l'area del doppio spicchio è data da $4\alpha R^2$.

Il Teorema di Harriot-Girard. . .

Consideriamo il triangolo sferico T di vertici A, B, C, i tre cerchi massimi che contengono i lati e gli angoli interni $\alpha,\ \beta,\ \gamma$. Indichiamo con T' il triangolo antipodale, congruente a T.



I tre doppi spicchi sferici corrispondenti ad α, β e γ coprono tutta la sfera e si sovrappongono solo su T e T': i due triangoli vengono coperti 3 volte ciascuno. Dunque

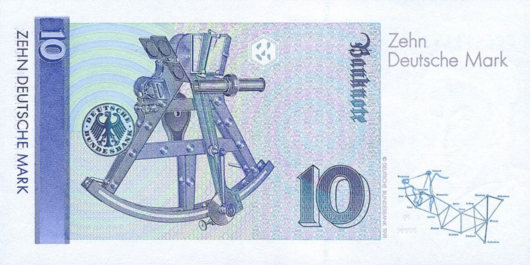
$$4R^2(\alpha+\beta+\gamma) = 4\pi R^2 + 4Area(T),$$

da cui si ricava subito $Area(T) = R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$.

200 anni dopo: Gauss e i rilievi dell'Hannover

A partire dal 1818 uno dei massimi matematici di tutti i tempi, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), si dedicò intensamente alla cartografia: venne incaricato dei rilievi topografici per la triangolazione del Regno di Hannover, nella Germania settentrionale.

200 anni dopo: Gauss e i rilievi dell'Hannover



A partire dal 1818 uno dei massimi matematici di tutti i tempi, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), si dedicò intensamente alla cartografia: venne incaricato dei rilievi topografici per la triangolazione del Regno di Hannover, nella Germania settentrionale. Questa attività di Gauss venne ricordata nelle banconote tedesche da 10 DM rimaste in corso fino all'entrata in vigore dell'Euro...

Lo strumento raffigurato nelle banconote, l'Eliotropo di Gauss, fu l'oggetto di un curioso articolo sul *Gentleman's Magazine* del 1822.

THE

GENTLEMAN'S MAGAZINE:

AND

HISTORICAL CHRONICLE.

FROM JUNE TO DECEMBER, 1822.

VOLUME XCII.

(BEING THE FIFTEENTH OF A NEW SERIES.)

PART THE SECOND.

PRODESSE & DELECTARE. E PLURIBUS UNUM.

BY SYLVANUS URBAN, GENT.

London:

PRINTED BY JOHN NICHOLS AND SON, 25, PARLIAMENT-STREET;
WHERE LETTERS ARE PARTICULARLY REQUESTED TO BE SENT, POST-PAID;
AND SOLD BY JOHN HARRIS AND SON (SUCCESSORS TO MRS. NEWBERY),
AT THE CORNER OF ST. PAUL'S CHURCH YARD, LUDGATE STREET;
AND BY PERTHES AND BESSER, HAMBURGH.

1822.

Gauss e i rilievi topografici dell'Hannover

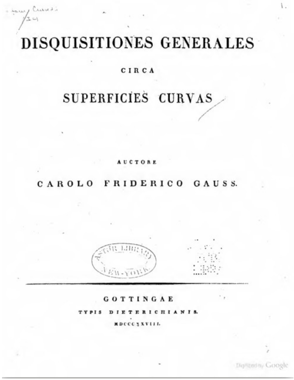
Lo strumento raffigurato nelle banconote, l'Eliotropo di Gauss, fu l'oggetto di un curioso articolo sul *Gentleman's Magazine* del 1822.

THE HELIOTROPE, A NEW INSTRUMENT.

When Professor Gauss was engaged in 1820 at Luneberg, in trigonometrical observations, to combine the Hanoverian with the Danish triangles, he perceived that when he directed his telescope towards the steeple of St. Michael's Church at Hamburgh, which was seven German (thirty-two English) miles distant, the little round window in the upper part of it reflected the image of the sun towards him, and thus impeded him in his operations. This gave him the idea of using the sun's light for signals, by catching it with a mirror, and reflecting it to the place to which a signal was to be given. He made a calculation of the strength of the sun's light, and of the diminution it suffers in the atmosphere; from which it appeared that a small mirror, two or three inches in diameter, was sufficient to reflect the sun's image to the distance of ten or more German miles. This is the Heliotrope, described to be of great importance in the measuring of large triangles, and as likely to supersede the methods hitherto employed. These consisted in placing or fastening by night several Argand lamps, with reflectors, at those places which it was intended to observe from a great distance. This measuring by night is very inconvenient, and by day the light of the lamps is much too faint to be always seen at the distance of several miles through a telescope. The inventor of the Heliotrope, on the other hand, had full proof of the great advantage to be derived from it, when he was last year on the summit of the Brocken Mountain, to determine the three corners of the triangle for measuring the meridian of the North of Germany; on which occasion Professor Gauss gave signals with this instrument to his assistants, stationed at 14 German miles from him, upon the Inselbergh, in the forest of Thuringia. But the great use of the Heliotrope is not confined to such operations. It will be found greatly to excel the telegraph for giving signals, and in time will probably supersede it [provided the Professor could insure the perpetual appearance of the sun]. As the reflected image of the sun is visible at so great a distance, the signal stations may be much fewer. The mode of using it is likewise more simple, it being merely necessary alternately to shew and to hide the mirror; the intervals, measured by a stop watch, are the signals.

Gauss e i rilievi topografici dell'Hannover

I rilievi delle colline dell'Hannover contribuirono a rivoluzionare per sempre lo studio della Geometria!
Nel 1827 infatti, ispirato dal suo lavoro topografico, Gauss pubblicò uno dei suoi capolavori, un denso articolo di 50 pagine che fondava la Geometria Differenziale delle superfici curve


DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA

SUPERFICIES CURVAS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.

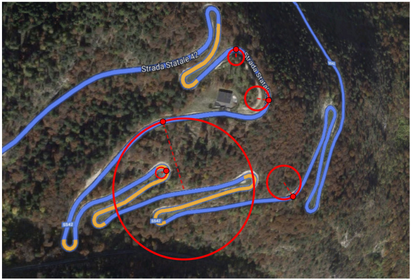
GOTTINGAE

TYPIS DIETERICHIANIS.

MDCCCXXVIII.

Raggio di Curvatura e Curvatura per una curva

Nel lavoro di Gauss è fondamentale il concetto di curvatura. Il raggio di curvatura di una curva in un punto è il raggio del cerchio che meglio approssima la curva vicino al punto. La curvatura è il reciproco del raggio di curvatura.

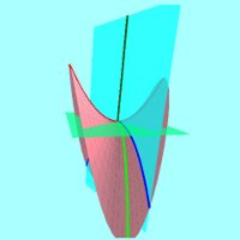


Elaborazione da Google Maps, SS42 della Mendola: Immagini ©2019 Google, Immagini ©2019 Maxar Technologies, Dati Cartografici ©2019

In soldoni, la curvatura in un punto ci dice di quando dovremmo girare il volante se volessimo percorrere in macchina quel tratto di curva.

Curvature di una superficie

Ecco un'animazione che illustra le curvature normali e le curvature principali di una superficie in un suo punto.



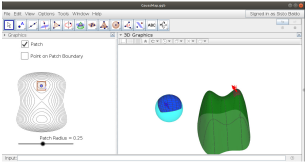
Le curvature principali $k_1, \; k_2$ sono la più grande e la più piccola delle curvature normali (prese col loro segno): corrispondono a due direzioni ortogonali tra loro del piano secante.
La curvatura di Gauss è il prodotto delle curvature principali:

$$K = k_1 \; k_2.$$

La curvatura media è la media aritmetica delle curvature principali:
$H = (k_1 + k_2)/2.$

Un'interpretazione alternativa della curvatura di Gauss

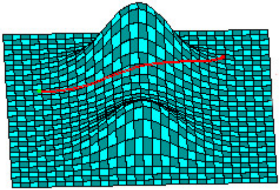
È possibile dare un'interpretazione geometrica alternativa della curvatura di Gauss



Questa interpretazione si basa sulla cosiddetta *mappa di Gauss*, che associa ad un punto della superficie il versore normale visto come punto della sfera di raggio 1.

Geodetiche e distanze su una superficie

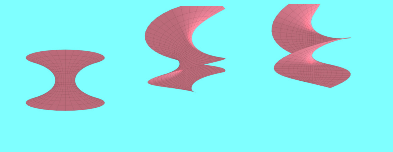
Esattamente come sulla sfera, su una superficie c'è una nozione intrinseca di distanza: la distanza tra due punti è la lunghezza della curva più corta (geodetica) che li congiunge sulla superficie stessa.



Informalmente, possiamo pensare ad una geodetica come alla curva che percorrerebbe una formichina, che passeggia sulla superficie andando sempre dritta davanti a sé, senza mai cambiare direzione. . .

Le distanze non cambiano se deformo la superficie. . .

La distanza geodetica rimane la stessa se la superficie viene immersa in modo diverso nello spazio tridimensionale.
Immaginiamo cioè che la superficie sia fatta di un materiale flessibile ma non elastico e di "deformarla" dolcemente senza stiracchiarla: la lunghezza delle curve sulla superficie non cambia.
Ad esempio, un foglio di carta piano può essere arrotolato a formare un cono o un cilindro senza che cambi la lunghezza delle curve disegnate sul foglio.



Un catenoide può essere "srotolato" a formare un elicoide.

Il Theorema Egregium di Gauss

Nel lavoro del 1827, Gauss scopre una proprietà del tutto inaspettata della curvatura di Gauss: essa può essere determinata a partire dalle sole distanze intrinseche sulla superficie. . . e perciò non cambia se deformo la superficie nello spazio tridimensionale (senza stiracchiarla).

Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium

Theorema. ***Si superficies curua in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curuaturae in singulis punctis inuariata manet.***

"La formula del paragrafo precedente conduce dunque in modo naturale al seguente notevole
TEOREMA: Se una superficie curva viene 'dispiegata' su una qualunque altra superficie, la misura di curvatura (di Gauss) nei singoli punti rimane invariata"

Il Theorema Egregium di Gauss. . .

Il Theorema Egregium, in particolare, dice che se una superficie può essere rappresentata fedelmente nel piano, allora deve avere curvatura di Gauss nulla in tutti i punti.
Questo è evidentemente impossibile per la sfera, che ha curvatura di Gauss $1/R^2$, e per l'ellissoide che ha ovunque curvatura di Gauss positiva. Nel suo lavoro, Gauss cita esplicitamente le applicazioni alla topografia e i suoi rilievi dell'Hannover!

Il Theorema Egregium di Gauss. . .

Il Theorema Egregium, in particolare, dice che se una superficie può essere rappresentata fedelmente nel piano, allora deve avere curvatura di Gauss nulla in tutti i punti.
Questo è evidentemente impossibile per la sfera, che ha curvatura di Gauss $1/R^2$, e per l'ellissoide che ha ovunque curvatura di Gauss positiva. Nel suo lavoro, Gauss cita esplicitamente le applicazioni alla topografia e i suoi rilievi dell'Hannover!
Ancora più importante (per i matematici) fu il cambio di paradigma proposto da Gauss: una superficie può essere studiata non solo come sottinsieme dello spazio, ma anche attraverso le sue sole proprietà intrinseche, cioè dal punto di vista di una formichina che riesca a vederne solo le proprietà locali bidimensionali. . . e non sia in grado di alzare la testa per vedere cosa succede più lontano e in tre dimensioni.

Nasce la Geometria Riemanniana. . .

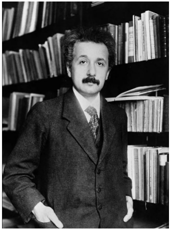
Il punto di vista intrinseco venne generalizzato da Bernhard Riemann (1826-1866) ad oggetti astratti in dimensione superiore. Fu poi sviluppato in modo spettacolare da studiosi quali Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), Gregorio Ricci Curbastro (1853-1925, "Ricci Calculus"), Tullio Levi Civita (1873-1941) ed altri




Questi sviluppi ebbero importanti applicazioni in meccanica dei continui, ingegneria e. . .

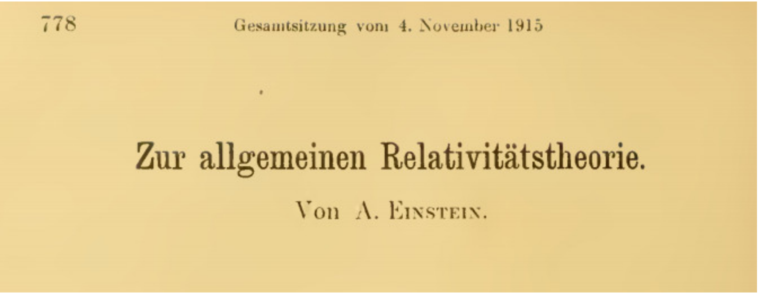
1915: nasce la Teoria della Relatività Generale

... nella teoria della Relatività Generale di Einstein del 1915 *(con qualche dubbio sulla priorità per le equazioni di campo tra Einstein e David Hilbert)*



1915: nasce la Teoria della Relatività Generale

. . . nella teoria della Relatività Generale di Einstein del 1915 *(con qualche dubbio sulla priorità per le equazioni di campo tra Einstein e David Hilbert)*



778 Gesamtsitzung vom 4. November 1915

Zur allgemeinen Relativitätstheorie.

Von A. Einstein.

1915: nasce la Teoria della Relatività Generale

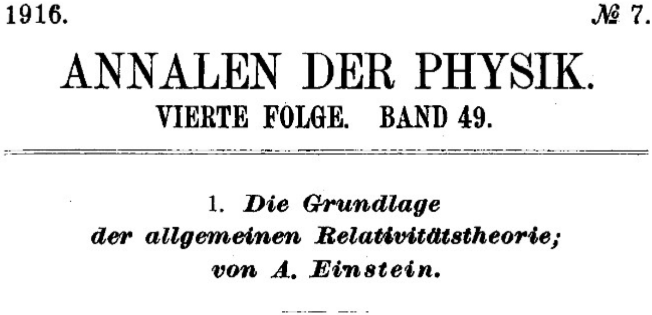
. . . nella teoria della Relatività Generale di Einstein del 1915 *(con qualche dubbio sulla priorità per le equazioni di campo tra Einstein e David Hilbert)*

> Dem Zauber dieser Theorie wird sich kaum jemand entziehen können, der sie wirklich erfaßt hat: sie bedeutet einen wahren Triumph der durch GAUSS, RIEMANN, CHRISTOFFEL, RICCI und LEVI-CIVITER begründeten Methode des allgemeinen Differentialkalküls.

. . . *Nessuno che l'abbia veramente capita può sfuggire alla magia di questa teoria. Perché costituisce un vero trionfo dei metodi del calcolo differenziale in coordinate generali fondato da Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci e Levi Civiter.*

1915: nasce la Teoria della Relatività Generale

. . . nella teoria della Relatività Generale di Einstein del 1915 *(con qualche dubbio sulla priorità per le equazioni di campo tra Einstein e David Hilbert)*



1916. № 7.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 49.

1. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie;*
von A. Einstein.

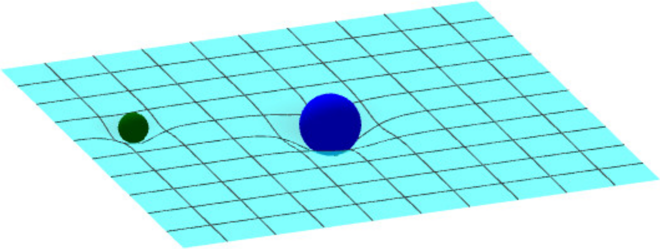
1915: nasce la Teoria della Relatività Generale

. . . nella teoria della Relatività Generale di Einstein del 1915 *(con qualche dubbio sulla priorità per le equazioni di campo tra Einstein e David Hilbert)*

> Die für die allgemeine Relativitätstheorie nötigen mathematischen Hilfsmittel lagen fertig bereit in dem „absoluten Differentialkalkül", welcher auf den Forschungen von Gauss, Riemann und Christoffel über nichteuklidische Mannigfaltigkeiten ruht und von Ricci und Levi-Civita in ein System gebracht und bereits auf Probleme der theoretischen Physik angewendet wurde.

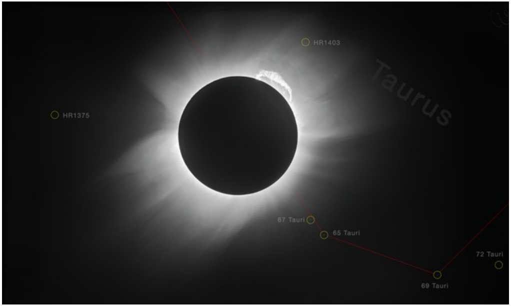
. . . *Gli strumenti matematici necessari alla teoria della relatività generale erano già pronti nel "calcolo differenziale assoluto", che si fonda sulle ricerche di Gauss, Riemann e Christoffel sulle varietà non euclidee e fu elevato a sistema da Ricci e Levi-Civita e subito applicato a problemi di fisica teorica."*

1915: nasce la Teoria della Relatività Generale



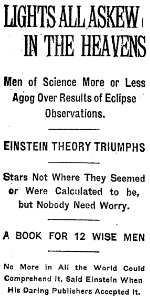
In presenza di masse (o energia), lo spaziotempo da piatto diventa curvo

1915: nasce la Teoria della Relatività Generale



In presenza di masse (o energia), lo spaziotempo da piatto diventa curvo, come confermato dalle osservazioni di Eddington durante l'eclisse di sole del 29 maggio 1919

1915: nasce la Teoria della Relatività Generale



LIGHTS ALL ASKEW IN THE HEAVENS

Men of Science More or Less Agog Over Results of Eclipse Observations.

EINSTEIN THEORY TRIUMPHS

Stars Not Where They Seemed or Were Calculated to be, but Nobody Need Worry.

A BOOK FOR 12 WISE MEN

No More in All the World Could Comprehend It, Said Einstein When His Daring Publishers Accepted It.

In presenza di masse (o energia), lo spaziotempo da piatto diventa curvo, come confermato dalle osservazioni di Eddington durante l'eclisse di sole del 29 maggio 1919 (articolo dal New York Times del 10 novembre 1919).

Il GPS: la Relatività Generale nella vita di tutti i giorni.

Potrebbe sembrare che io sia andato fuori tema...
Non proprio: il GPS del nostro telefono funzionerebbe talmente male da essere inutile se non conoscessimo la Relatività Generale!
La posizione viene determinata calcolando la distanza dai satelliti GPS visibili. A questo scopo, i satelliti trasmettono continuamente il tempo risultante dal loro orologio interno: questo segnale arriva a noi con un certo ritardo, proporzionale alla distanza, perché la velocità della luce è finita. Confrontando con l'ora locale, possiamo risalire alla distanza dei satelliti (che si trovano in posizione nota) e risalire alla nostra posizione. Un risultato accurato richiede misure delle differenze di tempo con una precisione entro il centinaio di nanosecondi.

Il GPS: correzioni relativistiche...

D'altra parte, i satelliti del GPS orbitano ad una velocità di circa 14000 Km/h. La teoria della Relatività Speciale prevede allora che sui satelliti il tempo vada più lento e gli orologi rimangano indietro, rispetto a quelli terrestri, di circa 7 microsecondi al giorno.
D'altra parte, nello spazio l'attrazione gravitazionale della Terra è più debole: per la teoria della Relatività Generale lo spaziotempo sulle orbite dei satelliti ha una curvatura minore... e il tempo scorre più veloce, di circa 45 microsecondi al giorno.
Mettendo assieme questi effetti, otteniamo che gli orologi atomici sui satelliti GPS anticipano di circa 38 microsecondi (38000 nanosecondi) al giorno rispetto a quelli sulla Terra.
Se non ne tenessimo conto, la posizione determinata dal GPS diventerebbe tanto imprecisa da essere inutile dopo pochi minuti!

Copyright animazioni e immagini. . .

Le animazioni che ho realizzato sono tutte liberamente scaricabili e modificabili con licenza Creative Commons CC BY-SA 4.0. Le animazioni WebGL sono rilasciate sotto GPL e sono liberamente scaricabili e modificabili.
Le immagini non direttamente realizzate da me sono, a mia conoscenza, quasi tutte di Dominio Pubblico tranne:

- La Proiezione di Mercatore nelle relative animazioni GeoGebra, da Wikimedia Commons e rilasciata sotto CC BY-SA 3.0.
- Le immagini della banconota da 10 DM con l'effige di Gauss, retto e rovescio, da Wikimedia Commons e rilasciate sotto CC BY-SA 4.0.
- Immagine per illustrare i raggi di curvatura, elaborata da foto satellitare di Google Maps (i credits sono nella didascalia come da linee guida di Google).

Fine. . .

GRAZIE PER LA PAZIENZA!