La matematica delle dinamiche socio-economiche

Giacomo Albi

Dipartimento di Informatica
Università di Verona

giacomo.albi@univr.it
www.giacomoalbi.com

27 settembre 2018

Outline

Probabilità

...nella Teoria dei giochi

Nella realtà l'ipotesi di *razionalità*, *informazione perfetta* e *completa* sono ipotesi forti che molto spesso non sono soddisfatte.
Da questo è nata una branca della *Teoria dei Giochi* che studia giochi dove i giocatori non sono perfettamente razionali e dove l'informazione che i singoli agenti hanno è asimmetrica.
Per sopperire a questa mancanza di informazioni si vanno a "pescare" gli strumenti nella *Teoria delle probabilità*.

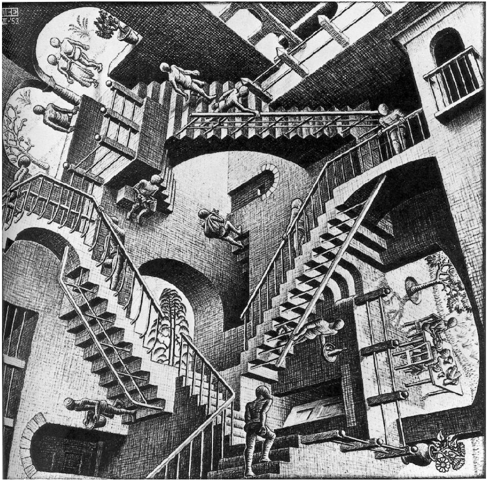
...nella realtà

La *Probabilità* è qualcosa con cui ognuno di noi ha a che fare tutti giorni, anche se "probabilmente" non ci facciamo caso.
Ad esempio nel processo che ci porta a una determinata conclusione, mettiamo inevitabilmente in gioco la credenza (la speranza) che determinati eventi si realizzi o meno. E noi facciamo scelte in ogni momento.

Cosa è la probabilità

La *probabilità* È quella disciplina matematica che affronta lo studio di tutti gli *esperimenti (casuali)*, il cui esito non è prevedibile con certezza, ma su cui siamo interessati a dare giudizio.

Paradossi apparenti



Paradosso del compleanno

Qual è la probabilità che in questa aula di N persone, ce ne siano almeno due che compiano gli anni lo stesso giorno?
Osservazione banale, ma non troppo, se il gruppo di persone è superiore a 365 l'evento ha probabilità 1 (detto anche *Lemma dei cassetti*).
Una domanda interessante è come cresce questa probabilità al crescere del numero di persone, da due sole a 365.

Paradosso del compleanno

Per risolvere il problema facciamo la seguente osservazione:
Calcolare la probabilità dell'evento $A = \{$ avere almeno due persone con lo stesso giorno$\}$ è pari a calcolare la probabilità dell'evento complementare e toglierlo a 1, ovvero:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\Omega \setminus A^c) = \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c).$$

L'evento complementare è $A^c = \{$ nessuno compie gli anni lo stesso giorno$\}$.
Quindi abbiamo spostato il nostro problema a calcolare la probabilità di A^c

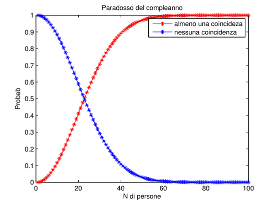
Prendiamo *due persone* del nostro gruppo allora entrambe avranno $\mathbb{P}(A^c) = 364/365$ probabilità di non compiere gli anni lo stesso giorno.
Prendiamo *tre persone*, rispetto alle due già considerate la terza avrà $363/365$ probabilità di non compiere gli anni lo stesso giorno delle altre due, quindi $\mathbb{P}(A^c) = 364/365 \cdot 363/365$.
Prendiamo una quarta, una quinta e via così finché non abbiamo considerato tutte le N persone del nostro gruppo.

Paradosso del compleanno

Ragionevolmente ognuna delle nostre date di compleanno è *indipendente* dall'altra, a meno che non ci sia una coppia di gemelli tra noi, quindi la probabilità di A^c nel caso di N persone è:

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365 - N + 1}{365}.$$

Quindi $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$. Con sole 23 persone abbiamo già più del 50%:

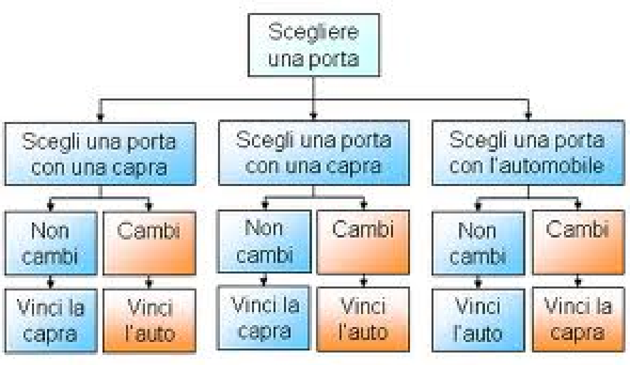


Il Paradosso di Monty Hall

Supponi di partecipare a un gioco a premi, in cui puoi scegliere tra tre porte:dietro una di esse c'è un'automobile, dietro le altre, capre.
Scegli una porta, diciamo la numero 1, e il conduttore del gioco a premi, che sa cosa si nasconde dietro ciascuna porta, ne apre un'altra, diciamo la 3, rivelando una capra.
Quindi ti domanda: "Vorresti scegliere la numero 2?"
Ti conviene cambiare la tua scelta originale?
Quanto è la probabilità di vincere ora?

Soluzione:

La risposta si trova disegnando l'*albero del gioco*:



quindi *Cambiare* la porta dà i 2/3 di probabilità di vincere mentre *Tenere* 1/3.
Osservazione: In termini di TdG la strategia *Cambiare* domina fortemente *Tenere* la scelta .

Teorema di Bayes

Dati due eventi A e B possiamo calcolare la probabilità di *A dato B* conoscendo la probabilità di *B dato A* e viceversa.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

:

con Bayes:

Definiamo i seguenti eventi: $A_1 = \{$ L'auto si trova dietro la porta 1 $\}$ e $C = \{$ Il presentatore apre una porta con una capra $\}$.
Vogliamo calcolare la probabilità che $\mathbb{P}(A_2|C) = 1 - \mathbb{P}(A_1|C)$ ovvero la probabilità di trovare un auto cambiando scelta.
Osserviamo che $\mathbb{P}(A_1) = 1/3$ e $\mathbb{P}(C) = 1$ (Il conduttore conosce cosa c'è dietro le singole porte).
Usiamo il teorema di Bayes:

$$\mathbb{P}(A_1|C) = \frac{\mathbb{P}(C|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1 \cdot 1/3}{1} = \frac{1}{3}.$$

Dove $\mathbb{P}(C|A_1) = \mathbb{P}(C) = 1$ dato che i due eventi sono indipendenti.
Quindi: $\mathbb{P}(A_2|C) = 1 - \mathbb{P}(A_1|C) = 2/3$.

Il Lotto alle otto

Vengono estratti 5 numeri tra l'1 e il 90 senza reimmissione, nel senso che un numero una volta estratto non viene reimesso nell'urna.
Il gioco consiste nell'indovinare una combinazione (singolo, ambo, terna quaterna, cinquina) estratta giocando 5 numeri. Qual è la probabilità di vincita nei diversi casi, su una ruota?

- La probabilità di indovinare un numero su cinque giocati è: $\frac{5}{90}$.
- La probabilità di fare ambo è: $\frac{5}{90} \cdot \frac{4}{89} = \frac{2}{801}$.
- La probabilità di fare terna è: $\frac{5}{90} \cdot \frac{4}{90} \cdot \frac{3}{88} = \frac{1}{11748}$.
- La probabilità di fare quaterna è: $\frac{5}{90} \cdot \frac{4}{90} \cdot \frac{3}{88} \cdot \frac{2}{87} = \frac{1}{511038}$
- La probabilità di fare quaterna è: $\frac{5}{90} \cdot \frac{4}{90} \cdot \frac{3}{88} \cdot \frac{2}{87} \cdot \frac{1}{86} = \frac{1}{43949268}$

Tassa sulla speranza

Nel gioco del Lotto in caso di vincita prevede il seguente sistema di vincite, a fornte di un euro giocato:

Numeri indovinati	Vincita Lorda	Probabilità
1	11,23	1/18
2	250,00	1/400.5
3	4500,00	1/11748
4	120000,00	1/511038
5	6000000,00	1/43949268

Il gioco del Lotto è un chiaro esempio di *gioco non equo*.
Per essere equo a fronte di una vincita di ambo il giocatore dovrebbe ricevere $400,5$ euro (netti). Invece ne riceve $250,00$ a cui va tolto anche il 6%.
Il matematico e statistico *Bruno de Finetti*, a proposito del lotto e dei giochi basati sulla sorte, li definì come una *"tassa sulla speranza"*.

Gioco Equo

In probabilità, prende il nome di *gioco equo* quel gioco di probabilità che paga al vincitore una vincita equa, cioè pari all'importo giocato moltiplicato per il reciproco della probabilità di vittoria.
In termini di *vincita attesa* un gioco è un *gioco equo* se la vincita attesa è zero.
Se p è la probabilità di vincere il gioco e $q = 1 - p$ la probabilità di perdere e S la somma che paghiamo per giocare la vincita attesa è:

$$0 = V(p, q) = (V_e - S) \cdot p - S(1 - p) \longrightarrow V_e = S/p$$

Dove V_e è la *vincita equa*

Scommessa equa

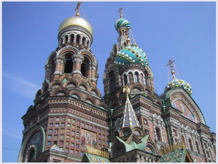
Due giocatori A e B fanno una scommessa e puntano rispettivamente S_A e S_B. La probabilità che vinca A è p e la probabilità che vinca B invece è $q = 1 - p$.

$$0 = V_A(p, q) = S_B \cdot q - S_A \cdot p \longrightarrow S_A/S_B = (1 - p)/p$$

Paradosso di San Pietroburgo

Un giocatore gioca paga una quota Q per giocare al seguente gioco: viene lanciata una moneta non truccata fino a che non esce testa.
Se ciò accade all'n -esimo lancio, il banco paga al giocatore 2^n euro.

- Quant'è *vincita attesa*?
- Qual è la *somma equa* che il giocatore deve pagare per giocare?
- Quanto sareste disposti, voi, a pagare per partecipare a questo gioco?



Vincita attesta:

Per calcolare la *vincita attesa* dobbiamo chiederci qual è la probabilità di vincere 2 o 4 o 8 o $\ldots 2^n$,il che equivale a chiederci quale è la probabilità che la sequenza di lanci sia T, CT, CCT,..., $CC\cdots CT$.
Le probabilità si calcolano nel modo seguente:
$\mathbb{P}(T) = 1/2$, $\mathbb{P}(CT) = 1/4$, $\mathbb{P}(CCT) = 1/8$, ..., $\mathbb{P}(CC\cdots CT) = 1/2^n$.La *vincita attesa* si calcola quindi come la seguente somma:

$$V = -Q + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2^2}\cdot 2^2 + \ldots + \frac{1}{2^n}\cdot 2^n + \ldots$$

Ovvero:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cdot 2^n - Q = \sum_{n=1}^{\infty} 1 - Q = \infty$$

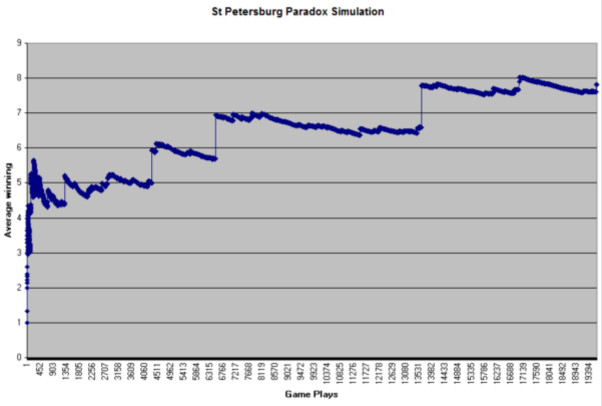
.

Quota equa

La *somma equa* che il giocatore dovrebbe giocare è *infinito*!!
Ma proprio per questo come giocatori dovremmo essere disposti a giocare qualsiasi cifra, comunque ci guadagneremmo.
E voi quanto giochereste?
Quanto vi aspettate di vincere in media giocando un "tot" di partite?

Vincita media

Il seguente grafico ci dice mostra la progressione delle *vincite medie*:



La vincita media cresce molto lentamente, dopo 20.000 giocate la nostra vincita media non siamo ancora sopra a 8.

Osservazioni:

Leggiamo le seguenti affermazioni fatte da due matematici famosi, dopo diverse riflessioni riguardo il *Paradosso di San Pietroburgo*:

"La determinazione del valore di un oggetto deve essere basata non sul suo prezzo, ma piuttosto sulla utilità che può procurare ... Non c'è dubbio che un guadagno di mille ducati ha più valore per un povero che per un ricco, nonostante entrambi guadagnino la stessa quantità."
Daniel Bernoulli

"I matematici stimano il denaro in proporzione alla sua quantità, mentre un uomo di buon senso lo stima in proporzione all'uso che può farne."
Albert Cramer

Come possiamo *matematecizzare* questa idea?

Funzione di utilità

L'idea è di cambiare il nostro modo di valutare il nostro guadagno sulla base della *utilità* che ne ricaviamo.
Consideriamo la *funzione logaritmo* $u(x) = log(x)$ e valutiamo i guadagni che riceviamo dal gioco di San Pietroburgo tramite questa funzione.
La *vincita attesa* risulta in questo caso:

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} log(2^k) \cdot \frac{1}{2^k}$$

Usando le proprietà del logaritmi la vincita risulta,

$$V = log(2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

tale somma risulta essere un numero finito (esattamente uguale a $log(4)$), a differenza del caso precedente che era infinito!

Giochi casuali

Passeggiata casuale

Supponiamo di fare N lanci di una moneta che ha probabilità p di fare Testa e probabilità $1-p$ di fare Croce.

1. Supponiamo di scommettere 1 euro su l'uscita di Testa, e continuando a giocare, alla lunga, quanto ci aspettiamo di vincere?
2. Quale è la *probabilità* di avere una sequenza con k Teste e $N-k$ Croci:

$$\underbrace{TTCT\dots CTTTCTCCT}_{N}$$

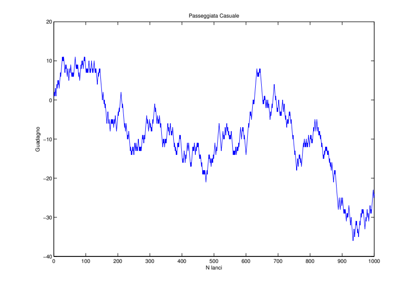
3. Quale è la media delle volte che è uscita Testa dopo N lanci?

Passeggiata casuale

In accordo con il punto uno se tracciassimo il grafico dei lanci di moneta in questo modo: Partendo dall'origine degli assi, ad ogni lancio,

- saliamo di $+1$ se esce Testa.
- scendiamo di -1 se esce Croce.

Quello che risulta è un grafico di questo tipo:



detto appunto *Passeggiata Casuale*. Ci fornisce una rappresentazione dell'evoluzione del *guadagno* nel gioco proposto.

Probabilità di fare k Teste

Riscrivendo la seconda domanda in modo equivalente:
Qual è la probabilità di avere un certo guadagno, G, dopo N lanci?
La prima *osservazione*, non banale, è che il guadagno non potrà essere inferiore a $-N$ (tutte Croci) ma nemmeno superiore a N (tutte Teste).
Ciascuna di queste due configurazioni, se p è diverso da 0 o 1, hanno .
Per esempio nel caso di N Teste la probabilità di una successione di N teste è:

$$\mathbb{P}(\#T = N) = p^N$$

Quindi il guadagno è $G = N$ il massimo ottenibile.
Notare che la probabilità che ad ogni lancio esca Testa viene moltiplicata: ogni lancio è *indipendente* dagli altri.

Probabilità di fare k Teste

In generale se vogliamo calcolare la probabilità di avere un certo guadagno al lancio N dovremo capire in quanti modi possibili possiamo arrivare a quel valore, ovvero in quanti modi possibili possiamo ottenere k Teste in N lanci.
Il valore si ottiene calcolando:

$$\mathbb{P}(\#T = k) = \#\{\texttt{sequenze con k Teste su N lanci}\}\cdot$$
$$\cdot\mathbb{P}(\{\texttt{esce k volte Testa }\})\cdot\mathbb{P}(\{\texttt{esce N-k volte Croce }\}).$$

Dove il simbolo $\#$ indica *numero di...*.
La precedente formula risulta essere:

$$\mathbb{P}(\#T = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Dove $\binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!k!}$ è detto *coefficiente binomiale* e $N! = N\cdot(N-1)\cdot(N-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ è il *fattoriale*, con la convenzione che $0! = 1$.

Coefficiente binomiale

"A parole" è il numero di modi con in cui possiamo suddividere un insieme di N elementi *indistinguibili* in k possibili sottoinsiemi.
Ovvero nel nostro caso: il numero di modi in cui i nostri N lanci possono essere suddivisi in k Teste (o $N - k$ Croci).
Vediamo graficamente la relazione tra il *triangolo di Tartaglia* e i valori del *coefficiente binomiale*.

$$
\begin{array}{c}
\bullet \\
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}
\end{array}
$$

Legge dei grandi numeri

È impossibile sapere all'inizio il nostro guadagno dopo N lanci, però possiamo interrogarci dove è più probabile che termini.
Studiamo le seguenti quantità:

- la *percentuale di teste* e *croci*,

$$T_N = \frac{\#\{\texttt{Teste dopo N lanci}\}}{\#\{\texttt{Teste dopo N lanci}\} + \#\{\texttt{Croci dopo N lanci}\}}$$

$$C_N = \frac{\#\{\texttt{Croci dopo N lanci}\}}{\#\{\texttt{Teste dopo N lanci}\} + \#\{\texttt{Croci dopo N lanci}\}}$$

- *la media*:

$$\mathbb{M}_N = (+1) \cdot T_N + (-1) \cdot C_N$$

  Osservazione: il guadagno dopo N lanci è dato da $G = N \cdot \mathbb{M}_N$.

Possiamo dire qualcosa all'aumentare del numero di lanci, anzi quando il numero di lanci *N tende all'infinito*?

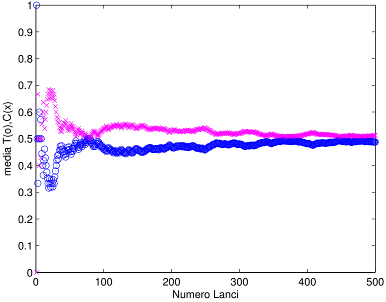
Legge dei grandi numeri

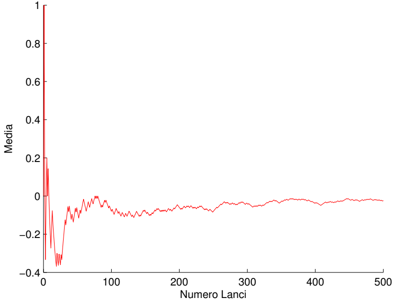
Se $N \longrightarrow \infty$ valgono i seguenti risultati:

- La percentuale di teste
$$T_N \longrightarrow \mathbb{P}(T) = p$$
- la percentuale di croci:
$$C_N \longrightarrow \mathbb{P}(C) = (1-p)$$
- la media risulta:
$$\mathbb{M}_N \longrightarrow (+1)p + (-1)(1-p) = 2p - 1.$$
Ovvero la *media esatta*.

Quindi la media empirica della *Passeggiata casuale* "converge" alla sua *media esatta* per un'infinito numero di lanci.
Questo risultato ricade nella cosiddetta *Legge dei Grandi Numeri*.

Simulazione di 500 lanci di una moneta non truccata $p = 0.5$.





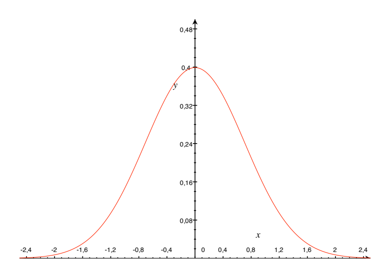
Plot a sinistra T_N e C_N convergono a $p = 0.5$. Plot a destra la media $\mathbb{M}_N$ converge a 0.

dal Caos all'Ordine

Campana di Gauss

La *funzione gaussiana*, o *funzione normale*, nella sua formulazione più semplice può essere scritta come:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



descrive una *distribuzione di probabilità* (l'area sottesa dalla curva è 1).

Teorema del limite centrale

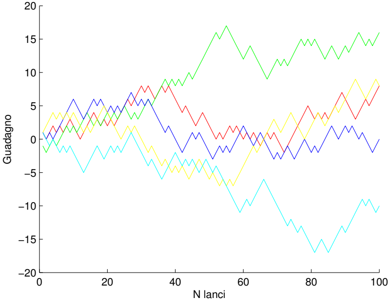
Rivediamo la *Macchina di Galton* con seguente simulazione che mostra bene lo stesso risultato:
L'esperimento è strettamente legato alla *passeggiata casuale*, in questo modo:

1. `for i=1:M`
    - *Passeggiata casuale*: `lanciamo` N `volte una moneta, segnando` ± 1 `a secondo se esce Testa o Croce.`
    - `Registriamo il valore finale nella variabile` G_i

   `end for`
2. `Crea l'istogramma di frequenza del vettore:`

$$G = [G_1, G_2, \dots, G_M]$$

Le palline che cadono nella *Macchina di Galton* sono come i lanci successivi della nostra moneta:



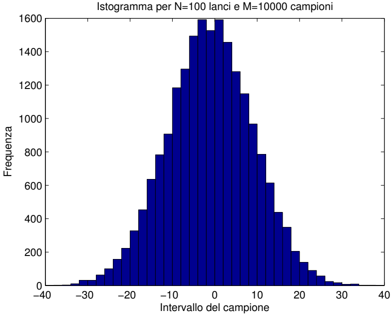
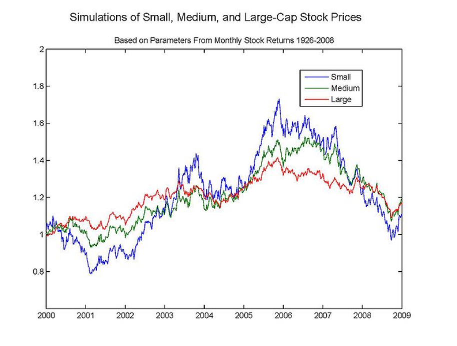


Figura: A sx diverse passeggiate casuali a dx istogramma di frequenza del guadagno dopo $N = 100$ passi calcolato su $M = 20000$ passeggiate casuali.

Gaussiana nella realtà

La *Gaussiana* trova una vasta gamma di applicazioni nella realtà, due esempi:

- In *Fisica*: La diffusione del calore in un mezzo metallico si propaga come una gaussiana.
- In *Finanza*, l'equazione di *Black-Scholes-Merton* è l'equazione più risolta al mondo, la sua soluzione è ancora una gaussiana.



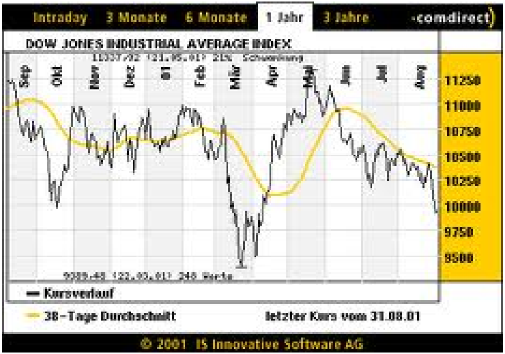
Ma è tutto normale?

Abbiamo visto che per eventi casuali, come il lancio di una moneta, la distribuzione limite della media è una gaussiana.
Ci chiediamo: tutti i fenomeni casuali, sono riconducibili ad una gaussiana?
Traducendo: per qualsiasi fenomeno casuale, possiamo capire come evolverà il *comportamento medio*?

Econofisica

Econofisica

Il termine *econofisica* designa un ambito di ricerca interdisciplinare, caratterizzato dall'applicazione di tecniche e metodi in origine sviluppati nel campo della *fisica* a problemi propri dell'*economia*, e che in genere includono aspetti probabilistici e statistici.



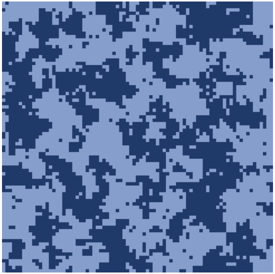
Econofisica: La storia

- L'idea che le ipotesi dell'*economia classica* fossero troppo semplici fu presentata già nei primi *anni '60* da *Benoit Mandelbrot*.
- Un suo primo tentativo di rivoluzione nei modelli dell'economica classica era quello di applicare le sue prime idee sui *frattali* per descrivere complessi fenomeni economici. (Nascita della *Finanza frattale*).
- Negli *anni '70 e '80* tuttavia questo approccio innovativo, fu tralasciato data la diffusione dalle teorie finanziarie elaborate da *Markowitz, Sharpe, Bachelier*,(Nobel nel '90) ed infine *Black, Scholes e Merton* (Nobel nel '97) , con la loro formula per la valutazione delle *opzioni*.
- A partire degli *anni '90* la disponibilità di *grossi set di dati finanziari*, pubblici e facilmente accessibili, rilanciò lo sviluppo dell' *econofisica*.
- Sul *finire degli anni novanta* da diversi fisici con interessi nel campo della *meccanica statistica* decisero spontaneamente di affrontare i complessi problemi posti dall'economia, specialmente nell'ambito della finanza, applicando strumenti e metodi della fisica.

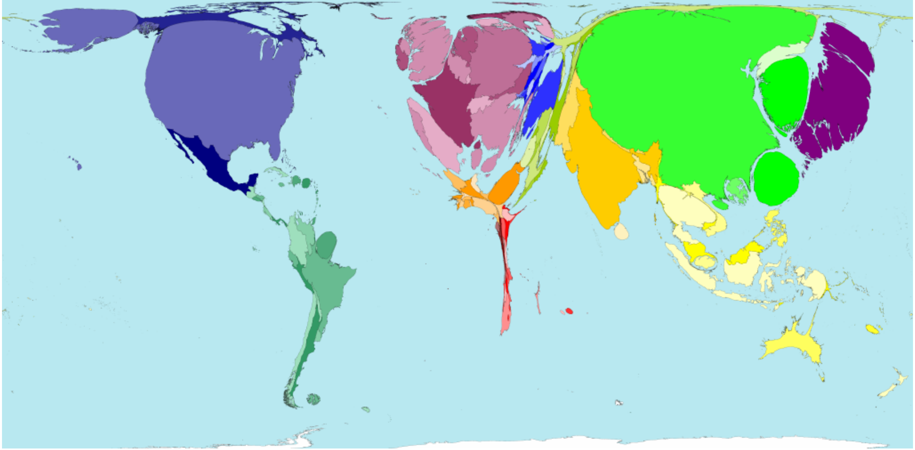
Econofisica: Applicazioni

Vediamo alcuni esempi di modelli fisici e strumenti matematici utilizzati in *econofisica*:

- modelli derivati dalla geometria *frattale* per spiegare le *fluttuazioni dei mercati finanziari*,
- impiego di modelli di *arresto cardiaco*, e di previsione dei *terremoti*, per comprendere e spiegare i *crash del mercato azionario*.
- Elettori in *governi bipolari* studiati come spin in un *sistema ferromagnetico* (Modello di Ising).



Distribuzione di ricchezza



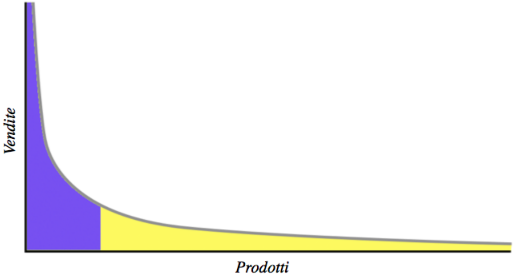
http://www.worldmapper.org/

Distribuzione di Pareto

L'economista *Wilfred Pareto* nel secolo scorso osservò che le società tendono ad assumere tutte la stessa distribuzione di ricchezza.
Indichiamo con $\mathbb{P}(X \geq r)$ la probabilità di avere ricchezza maggiore di r allora la variabile X segue l'andamento della funzione:

$$f(r) = Cr^{-(\alpha+1)}$$

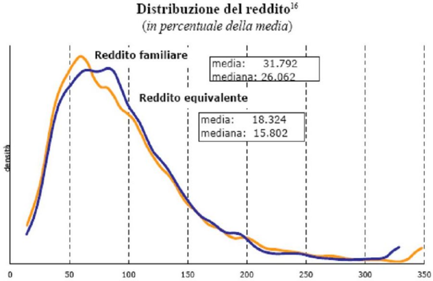
Con $0 < \alpha \leq 2$, $f(r)$ è una *Legge di potenza*.Pareto sosteneva che α fosse un valore universale, pari a 1.5.



Empiricamente...

I dati reali dimostrano che la funzione della distribuzione dei redditi tra gli abitanti di un paese è costituita da tre fasi:

- è crescente per bassi redditi;
- raggiunto un massimo per redditi modesti, decresce esponenzialmente;
- per redditi molto elevati decresce con pendenza meno ripida, tipica di una potenza con esponente negativo, la *power-law* o anche *Pareto heavy-tails*.



E la Teoria dei Giochi?

La prima parte del corso trattava delle dinamiche tra singoli agenti economici, visti come giocatori in un gioco, quindi ad un livello *microscopico*.
Se vogliamo analizzare la realtà ad un livello più *complesso*, dobbiamo considerare che N giocatori giochino uno o più giochi molte più volte, non necessariamente con gli stessi giocatori.
Ci interesseremo a questo punto dello studio di determinate quantità *macroscopiche* che emergono dalle interazioni globali.

Micro e Macro economia

La microeconomia punta a spiegare i comportamenti dei singoli operatori economici.
La macroeconomia considera le interazioni tra macrovariabili, ciascuna delle quali è il risultato della somma di singoli comportamenti individuali.

Modello: Particelle ed agenti economici

Vediamo il *complesso sistema economico* (composto da un numero sufficientemente grande di agenti) come un *sistema fisico di particelle* con le caratteristiche di un gas.

Distribuzioni di ricchezza

In un gas, le *collisioni casuali* tra molecole, danno origine a proprietà quali *temperatura e pressione*.
Allo stesso modo incontri casuali tra individui all'interno di un sistema economico possono determinare fenomeni su larga scala quali la *distribuzione della ricchezza*.
Quindi l'idea di simulare l'economia con un sistema di particelle di un gas ideale non sembra così stravagante.

Il modello

- *Le collisoni* casuali tra particelle ci danno un sistema basato su un mercato libero di pure transazioni;
- *La ricchezza*: La ricchezza viene vista come una quantità che si conserva, in analogia con l'energia o il momento nelle interazioni fisiche e un individuo diventa più ricco solo se un altro si impoverisce.

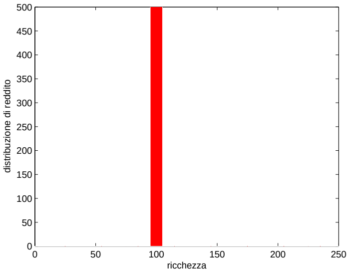
$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2^2$$
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

Modello di reddito

Consideriamo un sistema economico composto da N agenti, che intrattengono tra loro transazioni di scambio di denaro. Le variabili in gioco:

- $i = 1, \ldots, N$ gli *agenti*,
- R la *ricchezza totale* del sistema,
- $r_i(t)$, la *ricchezza individuale* al tempo t,

Al tempo $t = 0$ la ricchezza è equidistribuita tra gli agenti, quindi: $r_i(0) = R/N$.
In figura: l'istogramma della distribuzione iniziale di reddito.



Dinamica di interazione

Ad ogni istante di tempo i nostri agenti interagiranno due a due, casualmente, secondo una determianta *dinamica di interazione*.
Siano i e j due agenti, la dinamica è la seguente:

$$(r_i, r_j) \longrightarrow (r_i - \Delta r, r_j + \Delta r) = (r_i', r_j')$$

Dove Δr fornisce l'effettiva *quantità scambiata*.

$$\Delta r = (1-\gamma)[\varepsilon r_i - (1-\varepsilon) r_j]$$

γ, ε sono due parametri a valori $[0, 1]$.

- γ è un *fattore di risparmio*, $1-\gamma$ ci dice quanta ricchezza personale verrà messa in gioco.
- ε ci dà la *porzione di ricchezza scambiata*.

Osserviamo che la *dinamica* conserva la ricchezza totale del sistema nel tempo, per ogni coppia (i, j) vale che :

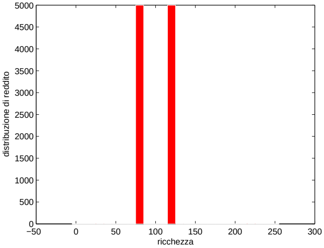
$$r_i' + r_j' = r_i - \Delta r + r_j + \Delta r = r_i + r_j$$

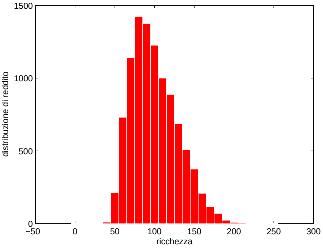
la ricchezza totale, R, è conservata.

Simulazione

Prendiamo un sistema di $N = 500$ agenti, la ricchezza totale iniziale è $R = 50000$.
Il fattore di risparmio è dato da $\gamma = 0.5$ e la porzione di *quantità scambiata* è $\varepsilon = 0.3$.
Tenendo conto di 100 passi temporali otteniamo le seguenti soluzioni di distribuzioni di reddito:

- tempo $t = 1$ gli agenti hanno interagito una sola volta, c'è chi ha guadagnato e chi ha perso.
- tempo $t = 100$ dove è raggiunta la soluzione di *equilibrio*.





Magari non per gli studenti a scuola...

Quello che osserviamo è l'evoluzione statistica di una dinamica di scambio binario.
Quindi osserviamo l'evoluzione della densità $f = f(r,t)$, tramite l'equazione

Equazione di Boltzmann omogenea

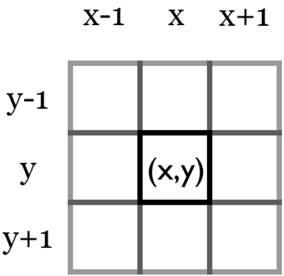
$$\partial_t f(r,t) = Q(f,f)(r,t)$$

dove l'operatore quadratico di interazione $Q(\cdot,\cdot)$ è tale che

$$Q(f,f)(r,t) = \int_{\mathbb{R}_+} B('r \to r) f('r_*,t) f('r,t) - B(r \to r')(r,r_*) f(r_*,t) f(r,t)\, dr_*$$

Ludwig E. Boltzmann,
Vienna, 20 febbraio 1844
Duino, 5 settembre 1906

Progetti di lavoro



Automa cellulare: Dilemma del Prigioniero

```
a=0 Coopera
a=1 Non coopera
Ogni cella, a seconda del suo stato,
interagisce con le sue cellule vicine in
base ad una REGOLA. Essere vicini o meno
ad una cella dipende da come e' definito
l'INTORNO della cella.
REGOLA
- Se la cella a=0(Coopera), mantiene
la sua strategia solo se il payoff
che ricava dall'interazione con i suoi
vicini e' maggiore di zero.
- Se la cella a=1 (Non coopera), cambia
la sua strategia solo se il numero dei
vicini che Cooperano e' maggiore del
numero di vicini che Non cooperano
```

Risorse sul web

- Pagina vecchio corso PLS: laboratoriopls.wordpress.com/
- Teoria dei Giochi: www.gametheory.net
- Libro: La saggezza della folla, Surowiecki, 2005.