

**Piano Nazionale Lauree Scientifiche**  
ITIS Marconi - Verona  
Università degli Studi di Verona



# **Introduzione ai Frattali di tipo IFS**

Diario ed appunti di  
**Sisto Baldo**

## Indice

- 1 Riunione preliminare di progettazione del 20/12/2011 (2 ore) 3**  
*Incontro preliminare dei docenti interessati per la progettazione del laboratorio.*
- 2 Incontro plenario in Aula Magna del Marconi, 31/1/2012 (2 ore) 3**  
*Presentazione dell'argomento alle classi potenzialmente interessate.*
- 3 Riunione di progettazione del 27/2/2012 (2 ore) 3**  
*Incontro tra i docenti interessati per stabilire sommariamente le attività da svolgere e la loro scansione temporale.*
- 4 Incontro del 9/3/2012 (3 ore) 4**  
*Spazi metrici, distanza di Hausdorff, Sistemi di Funzioni Iterate (IFS) e teorema fondamentale sugli attrattori. Esperimenti con Mathematica: il triangolo di Sierpinski.*
- 5 Incontro del 23/3/2012 (3 ore) 9**  
*IFS con trasformazioni affini. Il "gioco del caos": un algoritmo probabilistico per tracciare l'attrattore di un IFS.*
- 6 Incontro del 30/3/2012 (3 ore) 13**  
*Il Teorema del Collage e la compressione frattale di immagini.*
- 7 Incontro del 2/4/2012 (3 ore) 16**  
*Cerchiamo di capire perchè il Teorema Fondamentale sugli IFS ed il Teorema del Collage sono veri! Con una indispensabile digressione sugli spazi metrici completi.*
- 8 Incontro del 4/4/2012 (3 ore) 21**  
*Un algoritmo di compressione frattale delle immagini.*

## **1 Riunione preliminare di progettazione del 20/12/2011 (2 ore)**

*In questo incontro preliminare mi sono trovato con i docenti del Marconi che hanno dato la loro disponibilità per il laboratorio: Elisabetta Adamoli, Alberto Burato, Luciano Corso (che presenziava come osservatore) e Daniela Visigalli.*

*Per cominciare ho messo sul tavolo (o meglio, sulla lavagna interattiva...) un po' di argomenti che ruotano attorno ai sistemi di funzioni iterate (IFS).*

*Ho poi discusso coi colleghi che cosa convenga presentare agli studenti che decideranno di partecipare al laboratorio, e soprattutto come farlo in modo il più possibile accattivante: gli argomenti sono sicuramente affascinanti, grazie soprattutto al grande impatto visivo dei frattali, ma anche piuttosto difficili!*

## **2 Incontro plenario in Aula Magna del Marconi, 31/1/2012 (2 ore)**

In un'affollata Aula Magna del Marconi, nella quale erano presenti gli alunni delle ultime classi, ho proposto una breve introduzione sui frattali e sulle loro origini storiche. Ho poi presentato più specificamente i frattali di tipo IFS, dando un'idea di come questi possano essere usati per comprimere le immagini. Ho poi risposto alle domande degli studenti...ed invitato quelli maggiormente interessati ad iscriversi al laboratorio PLS!

Il file pdf con link interattivi che ho utilizzato per la presentazione è disponibile in rete:

[http://profs.sci.univr.it/~baldo/PLS/Marconi\\_2011/Marconi\\_2012.pdf](http://profs.sci.univr.it/~baldo/PLS/Marconi_2011/Marconi_2012.pdf)

## **3 Riunione di progettazione del 27/2/2012 (2 ore)**

*In quest'occasione mi sono riunito con Alberto Burato e Luciano Corso: abbiamo deciso un po' più nello specifico la tempistica di svolgimento del laboratorio e le attività autonome da proporre agli studenti.*

## 4 Incontro del 9/3/2012 (3 ore)

In questo primo incontro vogliamo introdurre in modo rigoroso i Sistemi di Funzioni Iterate ed i loro attrattori.

Abbiamo già incontrato questi oggetti nell'incontro introduttivo di questo Laboratorio, nel quale ve ne ho mostrato parecchi esempi. Se desiderate rivederli, la mia presentazione è in rete:

[http://profs.sci.univr.it/~baldo/PLS/Marconi\\_2012.pdf](http://profs.sci.univr.it/~baldo/PLS/Marconi_2012.pdf)

La definizione di IFS è la seguente:

**DEFINIZIONE (IFS, Operatore di Hutchinson):** *Un sistema di funzioni iterate (IFS) nel piano è una famiglia finita  $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$  di trasformazioni del piano in se ( $T_i : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $i = 1, \dots, N$ ) che siano contrattive, cioè per le quali esistono delle costanti  $s_i \in (0, 1)$  tali che*

$$|T_i(P) - T_i(Q)| \leq s_i |P - Q| \quad \forall P, Q \in \mathbf{R}^2, \quad i = 1, \dots, N.$$

*Le trasformazioni di un IFS hanno dunque la proprietà di ridurre le distanze di un fattore  $s_i < 1$ .*

*L'operatore di Hutchinson  $\Phi$  associato al sistema di funzioni iterate è l'applicazione che associa ad un sottinsieme  $A \subset \mathbf{R}^2$  l'unione delle sue trasformate secondo il sistema di funzioni iterate, ossia l'insieme*

$$\Phi(A) := T_1(A) \cup T_2(A) \cup \dots \cup T_N(A).$$

Nel nostro incontro introduttivo abbiamo “enunciato” (e verificato sperimentalmente in alcuni casi interessanti) un teorema che afferma le cose seguenti:

- Esiste un unico *punto fisso* di un sistema di funzioni iterate, ossia un insieme  $K$  che viene mandato in se stesso dall'operatore di Hutchinson:

$$K = \Phi(K) = T_1(K) \cup T_2(K) \cup \dots \cup T_N(K).$$

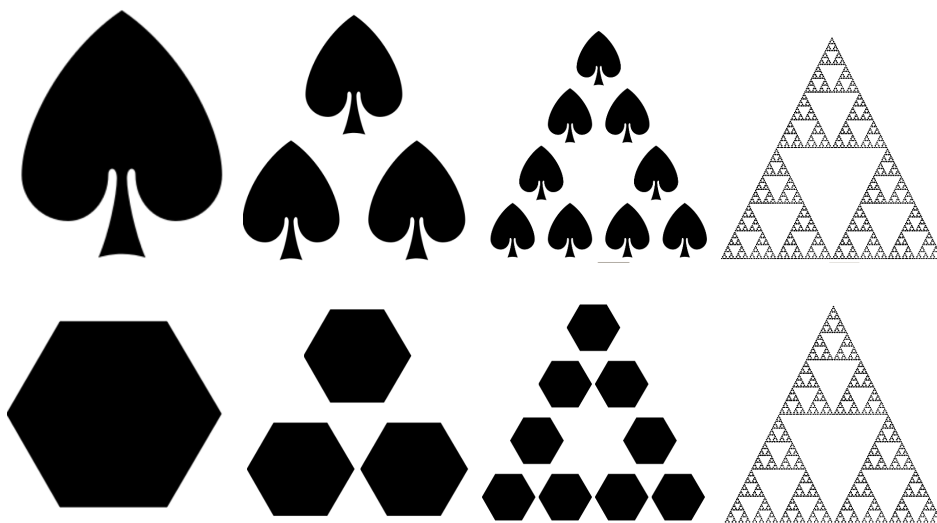
Tale insieme si dice *attrattore* del sistema di funzioni iterate...e in molti casi è un bellissimo frattale!

- L'*attrattore* si chiama così per una ragione ben precisa: se partiamo da un *qualunque* sottinsieme chiuso e limitato  $A_0 \subset \mathbf{R}^2$  e applichiamo ripetutamente l'operatore di Hutchinson ad  $A_0$  (ossia se definiamo ricorsivamente  $A_{n+1} = \Phi(A_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ) otteniamo una successione di insiemi che *almeno dal punto di vista visivo sembra convergere all'attrattore*.

**ESEMPIO:** Consideriamo ad esempio il seguente sistema di funzioni iterate formato da 3 trasformazioni (composte da un'omotetia di rapporto  $1/2$  seguita da una traslazione):

$$T_1(x, y) = (x/2, y/2), T_2(x, y) = (x/2+1/2, y/2), T_3(x, y) = (x/2+1/4, y/2+1/2).$$

Ecco la prima, seconda, ottava iterata dell'operatore di Hutchinson applicato a due diversi insiemi (l'asso di picche e un esagono).



Come si vede, le ottave iterate sono entrambe “visivamente simili” ad un bellissimo e ben noto frattale: il triangolo di Sierpinski.

All'indirizzo

<http://profs.sci.univr.it/~baldo/FRATTALI/HutchinsonOperator.html>

trovate un'applet che mostra le prime iterate dell'operatore di Hutchinson (per questo ed alcuni altri IFS), a partire da diversi insiemi iniziali dalla forma suggestiva: c'è anche il ritratto di Sierpinski, quello del Presidente Napolitano e quello di Marilyn Monroe!



Von Koch Curve Iterations: 4 Ace of Spades

L'enunciato del risultato che abbiamo tratteggiato sopra non è ancora abbastanza *preciso e soddisfacente* dal punto di vista matematico: in che senso possiamo dire che le iterate dell'operatore di Hutchinson "si avvicinano" all'attrattore dell'IFS? E' ben vero che "hanno più o meno lo stesso aspetto", ma vorremmo poterlo dire in modo *quantitativo*!

Ci serve la definizione di una *distanza tra sottinsiemi del piano* che misuri quanto questi siano simili o differenti!

Il concetto giusto è quello di *distanza di Hausdorff*, che è solo un esempio del più generale concetto di distanza:

**DEFINIZIONE (Distanza o metrica su un insieme):** *Sia  $X$  un insieme qualunque. Una distanza o metrica su  $X$  è una funzione  $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  che soddisfa le seguenti proprietà:*

- $d(x, y) \geq 0$  per ogni  $x, y \in X$ . Inoltre  $d(x, y) = 0$  se e solo se  $x = y$  (due punti distinti hanno distanza strettamente positiva!).
- $d(x, y) = d(y, x)$  per ogni  $x, y \in X$  (la distanza è simmetrica).
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$  per ogni  $x, y, z \in X$  (disuguaglianza triangolare).

**ESEMPI:** *La distanza euclidea su  $\mathbf{R}^2$  è una distanza:*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

*Ma lo è anche la city block metric, o metrica del vigile urbano:*

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

*Un'altra distanza su  $\mathbf{R}^2$  è inoltre*

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}.$$

*Una distanza su un insieme  $X$  qualunque è la metrica discreta: per ogni  $x, y \in X$  definiamo*

$$\tilde{d}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y, \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Veniamo ora ad introdurre il concetto di *distanza di Hausdorff*. Consideriamo l'insieme  $\mathcal{H}$  composto da tutti i sottinsiemi non vuoti *chiusi e limitati*

di  $\mathbf{R}^2$ :

$$\mathcal{H} = \{A \subset \mathbf{R}^2 : A \neq \emptyset, A \text{ chiuso e limitato}\}^1.$$

Dato  $A \in \mathcal{H}$ , indichiamo con  $N_r(A)$  il suo *intorno chiuso di raggio  $r$*  (o *ingrassato di raggio  $r$* ), che è per definizione l'insieme dei punti che distano meno di  $r$  da  $A$ :

$$N_r(A) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \text{dist}((x, y), A) \leq r\}.$$

In modo un po' ingenuo ma espressivo, potremmo dire che  $N_r(A)$  è l'insieme che si ottiene se cerchiamo di disegnare  $A$  con un pennarello che traccia segni di raggio  $r$ .

Siamo finalmente in grado di definire la distanza di Hausdorff:

**DEFINIZIONE (distanza di Hausdorff):** Siano  $A, B \in \mathcal{H}$ . Definiamo la predistanza tra  $A$  e  $B$  come segue

$$\delta(A, B) = \min\{r \geq 0 : A \subset N_r(B)\}.$$

Questa predistanza non è in generale simmetrica, ed inoltre due insiemi possono avere distanza 0 pur essendo diversi tra loro: si pensi al caso in cui  $A \subset B$ . Definiamo allora

$$h(A, B) = \max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\} \quad (\text{distanza di Hausdorff}).$$

È un esercizio non difficile far vedere che  $h$  è una distanza sull'insieme  $\mathcal{H}$ : la distanza di Hausdorff è simmetrica per costruzione, mentre la disuguaglianza triangolare è vera perché è facile vedere che essa vale già per la predistanza. Se poi  $h(A, B) = 0$ , abbiamo  $A = B$  perché  $A$  e  $B$  sono *chiusi*. Meno banale è verificare che esistano il minimo nella definizione di  $\delta(A, B)$  (e quello nella definizione di distanza di un punto da un insieme): anche questo dipende dal fatto che  $A$  e  $B$  sono *chiusi e limitati*.

Rifacendoci all'analogia che abbiamo usato sopra, potremmo dire che due insiemi  $A, B \in \mathcal{H}$  tali che  $h(A, B) = r$  sono *indistinguibili* se li disegniamo con un pennarello che traccia segni di raggio  $r$ !

---

<sup>1</sup> Un insieme si dice *limitato* se è contenuto in un quadrato di lato finito. Si dice *chiuso* se contiene tutti i suoi punti di frontiera. Ricordo che un punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  è *di frontiera* per un insieme  $A$  se *qualunque* dischetto centrato in  $(\bar{x}, \bar{y})$  interseca sia  $A$  che il complementare di  $A$ .

<sup>2</sup>La distanza di un punto da un insieme è definita nel modo seguente:  $\text{dist}((x, y), A) = \min\{|(x, y) - (u, v)| : (u, v) \in A\}$ .

Avendo a disposizione la distanza di Hausdorff possiamo enunciare il risultato di prima come preciso teorema matematico:

**TEOREMA (teorema fondamentale sugli IFS):** *Sia  $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$  un sistema di funzioni iterate nel piano,  $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  l'operatore di Hutchinson ad esso associato (quindi  $\Phi(A) := T_1(A) \cup T_2(A) \cup \dots \cup T_N(A)$ ). Allora esiste un unico insieme  $K \in \mathcal{H}$ , detto attrattore dell'IFS, tale che*

$$K = \Phi(K).$$

*Inoltre, se  $A_0 \in \mathcal{H}$  e definiamo ricorsivamente  $A_k = \Phi(A_{k-1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , allora*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} h(A_k, K) = 0 :$$

*iterando l'operatore di Hutchinson a partire da un qualunque insieme di partenza si ottiene una successione di insiemi che converge all'attrattore rispetto alla distanza di Hausdorff.*

Nei nostri prossimi incontri cercherò di convincervi (con un po' di matematica e non solo con qualche esperimento...) che questo teorema è vero!

*Dopo la mia (tediosa?) oretta di spiegazioni, in cui vi ho raccontato queste cose...avete dedicato il resto dell'incontro a scrivere un programmino (Java o Mathematica) che disegnasse un'approssimazione dell'attrattore dell'IFS di pagina 4 (triangolo di Sierpinski). L'algoritmo che avete usato sfruttava l'enunciato del teorema. Infatti avete semplicemente iterato un certo numero di volte l'operatore di Hutchinson, a partire dall'insieme non vuoto più semplice di tutti: un punto del piano  $\mathbf{R}^2$ !*



## 5 Incontro del 23/3/2012 (3 ore)

Abbiamo visto che un IFS è dato da un insieme finito di *mappe contrattive* (o contrazioni)  $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$  del piano in se.

Per ragioni computazionali e di praticità, spesso queste mappe non sono contrazioni del tutto generiche, ma ci si restringe alle *applicazioni affini*: è precisamente quel che faremo in questo laboratorio!

Ricordo che un'applicazione affine dal piano in se è una funzione del tipo

$$T(x, y) = (ax + cy + e, bx + dy + f).$$

Le tre contrazioni che compaiono nell'IFS che ha come attrattore il triangolo di Sierpinski sono evidentemente trasformazioni affini!

**OSSERVAZIONE:** Siccome ci serviranno in seguito, ricordiamo tre cose importanti. La prima è ovvia: una trasformazione affine del piano è individuata dai sei coefficienti reali  $a, b, c, d, e, f$ .

La seconda è meno banale: se fissiamo una terna di punti *distinti e non allineati*  $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), P_3 = (x_3, y_3)$ , una trasformazione affine è univocamente determinata dalle immagini di questi punti. Questo significa che data una *qualunque* altra terna di punti  $Q_1, Q_2, Q_3$ , esiste un'unica trasformazione affine  $T$  tale che  $T(P_1) = Q_1, T(P_2) = Q_2, T(P_3) = Q_3$ .

La terza cosa che voglio ricordarvi è il significato geometrico del determinante della matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Sia  $S$  il parallelogramma che si ottiene trasformando un *quadrato di lato* 1 con la trasformazione affine  $T$ . Allora il modulo di  $\det(A) = ad - bc$  è semplicemente *l'area di*  $S$ , mentre il segno del determinante ci dice se la trasformazione  $T$  conserva o meno l'orientazione del quadrato.

Ricordo che  $T$  è una contrazione se vale la formula

$$(*) \quad |T(x_1, y_1) - T(x_2, y_2)| \leq s |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2,$$

ove  $0 < s < 1$  è una costante.

**OSSERVAZIONE:** Data una trasformazione affine  $T$ , ci si chiederà come calcolare la più piccola costante  $s$  che compare in (\*), in modo da verificare se  $T$  è una contrazione. La cosa *non* è semplicissima, ma se volete proprio saperlo vi dico come fare: si prende la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  e si calcola  $C = A^T A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ . Il quadrato del valore ottimale di  $s$  è il *massimo autovalore* di  $C$ , ossia il numero

$$s^2 = \frac{\alpha + \gamma + \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2}}{2}.$$

Nel primo incontro ci siamo divertiti a disegnare il triangolo di Sierpinski: per farlo abbiamo iterato l'operatore di Hutchinson a partire da un insieme iniziale costituito da un unico punto.

Questo algoritmo ha un evidente svantaggio, che diventa tanto più evidente quante più sono le contrazioni che compongono l'IFS: il numero di punti da tracciare *aumenta in modo esponenziale* con il numero di iterazioni. Infatti, se ci sono  $N$  contrazioni nell'IFS, alla prima iterazione abbiamo da tracciare  $N$  punti, alla seconda  $N^2$ , alla terza  $N^3$  e così via. Diventa quindi impossibile effettuare un numero alto di iterazioni della mappa di Hutchinson, e questo spesso impedisce di ottenere una ragionevole rappresentazione dell'attrattore.

Fortunatamente, esistono altri metodi per tracciare l'attrattore di un IFS: il più semplice ed il più usato è un algoritmo probabilistico noto anche come **gioco del caos**.

Si parte da un punto del piano *scelto a caso nell'attrattore dell'IFS*, e si costruisce una successione di punti con un algoritmo ricorsivo: l' $(n+1)$ -esimo punto è l'immagine dell' $n$ -esimo secondo *una delle trasformazioni dell'IFS, scelta a caso*.

Durante il calcolo della successione, si tracciano tutti i punti ottenuti: si ottiene una successione di insiemi che *converge all'attrattore dell'IFS* rispetto alla metrica di Hausdorff.<sup>3</sup> Spesso bastano poche migliaia di punti per ottenere una ragionevole approssimazione dell'attrattore.

**OSSERVAZIONE:** L'algoritmo probabilistico è molto semplice da implementare...ma abbiamo fatto un'assunzione un po' antipatica sul punto di partenza della ricorrenza: abbiamo richiesto che esso *appartenga all'attrattore*, cosa piuttosto difficile da verificare se non sappiamo a priori come è fatto!

Poco male: in realtà nulla vieta far partire la successione ricorsiva da un *qualunque punto del piano*. I primi punti della successione potrebbero essere piuttosto lontani dall'attrattore, ma *vi si avvicinano rapidamente, con velocità esponenziale*. Basta quindi aver cura di *non tracciare* i primi pochi punti della successione, e il risultato sarà ottimo!

Perché il gioco del caos converga *il più rapidamente possibile* all'attrattore dell'IFS è però necessario precisare meglio la regola secondo la quale, ad ogni passo, si sceglie "a caso" una delle trasformazioni dell'IFS.

A volte, può essere una buona idea fare in modo che alcune trasformazioni vengano scelte *con una probabilità maggiore delle altre*.

---

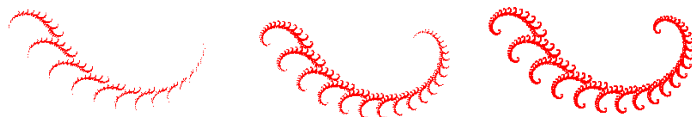
<sup>3</sup>Ma in questo caso la dimostrazione non è affatto facile!

Per fare un esempio, si osservi la seguente figura: rappresenta l'attrattore di un IFS costituito da due sole trasformazioni affini  $T_1, T_2$ . In verde è rappresentata l'immagine dell'attrattore secondo  $T_1$ , in rosso quella secondo  $T_2$ .



In un certo senso, possiamo dire che la mappa  $T_1$  “è più importante”, perché ricopre la stragrande maggioranza dell'attrattore: per essere... democratici, sembrerebbe giusto sceglierla più spesso di  $T_2$  nel gioco del caos.

In effetti la nostra intuizione è corretta: nelle seguenti tre figure si vede quel che si ottiene calcolando i primi 100000 punti con il gioco del caos. Nella prima figura le due trasformazioni avevano uguale probabilità di essere scelte, nella seconda  $T_1$  aveva il 70% di probabilità di essere scelta, nella terza il 90%. È evidente che nel terzo caso si distinguono molti più particolari dell'attrattore!



Scegliere in modo ottimale le probabilità da associare a ciascuna delle trasformazioni dell'IFS non è semplice... ma si ottengono degli ottimi risultati usando la regoletta seguente:

*Dato un IFS composto da trasformazioni affini, la probabilità da associare alla trasformazione  $T(x, y) = (ax + cy + e, bx + dy + f)$  deve essere proporzionale al modulo del determinante della matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Se tale determinante è 0, si assegna lo stesso una piccola probabilità positiva. Ovviamente, le probabilità devono essere normalizzate in modo che la somma faccia 1.*

Questa regola euristica nasce dal significato geometrico del determinante: in un certo senso stiamo decidendo che la probabilità di scegliere  $T$  è proporzionale alla “percentuale di area” dell'attrattore ricoperta da  $T$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Sarebbe necessario essere un po' più precisi, perché disgraziatamente l'attrattore potrebbe avere area 0... Diciamo che la probabilità di scegliere  $T$  è proporzionale al rapporto tra l'area di  $T(Q)$  e l'area di  $Q$ , ove  $Q$  è un *qualunque* insieme di area positiva, per esempio un quadrato.

*Anche questa volta, la seconda parte dell'incontro è stata dedicata all'implementazione dell'algoritmo appreso con Mathematica. Avete applicato il gioco del caos al triangolo di Sierpinski, alla curva di Von Koch e all'obbrobrio spiraleggiante della pagina precedente!*

## 6 Incontro del 30/3/2012 (3 ore)

Negli incontri precedenti abbiamo potuto verificare come un IFS abbia un attrattore (punto fisso) che è spesso un bel frattale, e abbiamo visto un paio di metodi per disegnare al computer questo attrattore.

Ma è possibile creare un IFS il cui attrattore “assomigli” ad *un insieme di nostra scelta*?

Possiamo rispondere a questa domanda grazie al seguente teorema, che ci permette di misurare quanto l'attrattore di un IFS  $\{T_1, \dots, T_N\}$  sia vicino ad un certo insieme  $A_0$ .

Abbiamo visto infatti che se partiamo da un insieme chiuso e limitato  $A_0$  e definiamo ricorsivamente  $A_{k+1} = T_1(A_k) \cup T_2(A_k) \cup \dots \cup T_N(A_k)$ , otteniamo una successione di insiemi che converge all'attrattore dell'IFS nella metrica di Hausdorff. È abbastanza ragionevole supporre che  $A_0$  sarà tanto più simile all'attrattore, quanto più vicini *tra di loro* sono gli insiemi di questa successione!

**TEOREMA (del Collage):** Sia  $\{T_1, \dots, T_N\}$  un IFS ove le  $T_i : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) sono contrazioni, cioè soddisfano

$$|T_i(x_1, y_1) - T_i(x_2, y_2)| < s_i |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2,$$

e le costanti  $s_i$  sono tutte minori di 1. Sia  $s$  la più grande di queste costanti:

$$s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_N\},$$

$K$  l'attrattore dell'IFS e  $A_0$  un sottinsieme non vuoto, chiuso e limitato di  $\mathbf{R}^2$ . Sia poi  $A_1 = T_1(A_0) \cup T_2(A_0) \cup \dots \cup T_N(A_0)$  l'immagine di  $A_0$  secondo l'IFS. Allora si ha

$$h(A_0, K) \leq \frac{1}{1-s} h(A_0, A_1),$$

ove  $h$  è la distanza di Hausdorff.

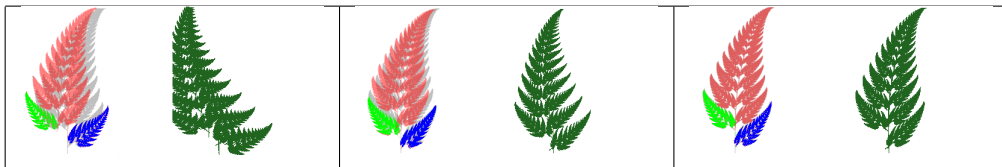
In parole povere, il teorema ci dice che un insieme  $A_0$  sarà tanto più vicino all'attrattore di un certo IFS, quanto più esso è vicino alla *propria immagine* secondo quell'IFS. Per riprodurre fedelmente  $A_0$  sarà perciò necessario scegliere delle contrazioni  $T_1, \dots, T_N$  che ci permettano di “riprodurre”  $A_0$  *il più accuratamente possibile* come collage delle immagini ridotte che si ottengono applicandovi le trasformazioni stesse!

Inoltre, la stima della distanza di Hausdorff tra l'immagine da approssimare e l'attrattore è tanto migliore quanto più le trasformazioni dell'IFS *riducono le distanze*, cioè quanto più la costante  $s$  è vicina a 0. Al contrario, se  $s$  è vicina a 1, a piccole variazioni di  $h(A_0, A_1)$  possono corrispondere grandi variazioni di  $h(A_0, K)$ !

Illustriamo questo teorema prendendo come insieme  $A_0$  la celebre felce di Barnsley:

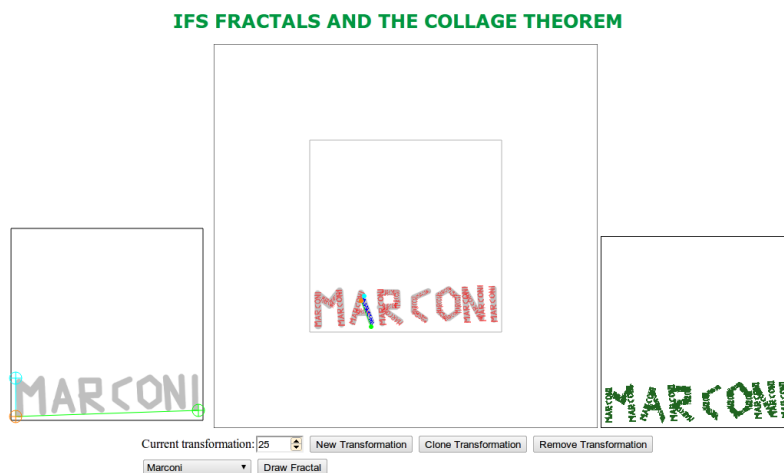


Nelle figure seguenti, vediamo cosa succede applicando tre differenti IFS alla felce. Nella parte sinistra di ogni coppia vediamo la felce (in grigio), sovrapposta al collage delle sue immagini secondo le trasformazioni dell'IFS in esame. A destra è raffigurato l'attrattore di quell'IFS.



Come si vede, l'attrattore è tanto più somigliante alla felce originale, quanto più il collage delle sue trasformate la “ricopre” in modo efficiente!

Per fare qualche esperimento col Teorema del Collage, ho realizzato un applet<sup>5</sup> apposito in cui si possono costruire degli IFS basati su trasformazioni affini allo scopo di approssimare un'immagine data.



<sup>5</sup><http://profs.sci.univr.it/~baldo/FRATTALI/Collage.html>

Oltre a permettere di costruire il collage e a raffigurare l'attrattore dell'IFS, l'applet esporta anche i coefficienti delle trasformazioni affini in un box di testo. Potete importare questi coefficienti in Mathematica per utilizzarli con il codice che avete realizzato le volte scorse!

*L'incontro si è concluso utilizzando l'applet e facendo esperimenti numerici con le trasformazioni affini così individuate...*

## 7 Incontro del 2/4/2012 (3 ore)

*All'inizio dell'incontro abbiamo fatto un breve riassunto della puntata precedente, a beneficio di quelli che mancavano perché in gita scolastica... Dopo-diché ho avvertito gli studenti che stava per cominciare una parte un po' più teorica e piuttosto pesantina.*

*Ho quindi lasciato libertà ai meno interessati o "deboli di stomaco" di dedicarsi ad attività meno indigeste... per esempio continuando i loro esperimenti al computer. La totalità dei presenti, però, ha coraggiosamente deciso di sentire quel che segue: ovviamente, non posso sapere quanti se ne siano pentiti!*

Dopo tanti esperimenti, è venuto il momento di fare qualche conto per cercare di capire perché i teoremi enunciati fino ad ora sono veri!

Gli ingredienti necessari sono essenzialmente due: il primo è molto semplice, ed è la *somma di una progressione geometrica* (forse la conoscete già!). Il secondo è *decisamente più delicato*, ed è la *completezza dello spazio metrico dei sottinsiemi chiusi e limitati di  $\mathbf{R}^2$  con la metrica di Hausdorff*.

Cominciamo dalle cose semplici! Una *progressione geometrica di ragione*  $s$  è una somma di potenze consecutive di  $s$ , cioè una somma del tipo  $1 + s + s^2 + s^3 + \dots + s^n$ . Questa somma è in realtà molto semplice da calcolare: chiamiamola provvisoriamente  $x$  e moltiplichiamo per  $(1 - s)$ . Otteniamo, con una facile semplificazione

$$x(1 - s) = (1 + s + s^2 + \dots + s^n)(1 - s) = 1 - s^{n+1},$$

da cui

$$1 + s + s^2 + \dots + s^n = x = \frac{1 - s^{n+1}}{1 - s}.$$

Veniamo ora alle cose più difficili! Può essere, anche se non ne sono affatto sicuro, che abbiate sentito dire che la retta  $\mathbf{R}$  dei numeri reali è *completa*: è una proprietà un po' tecnica ma estremamente importante (garantisce, per esempio, l'esistenza della radice quadrata di un numero non negativo, delle funzioni trigonometriche, di esponenziali e logaritmi... Garantisce anche che possiamo identificare i numeri reali con i *numeri decimali, eventualmente con infinite cifre dopo la virgola...*).

Ci sono vari modi di enunciare la completezza di  $\mathbf{R}$ : solitamente si ricorre all'assioma di Dedekind, oppure all'esistenza dell'estremo superiore. Ma un modo relativamente soft di vederla è attraverso le *successioni di Cauchy*. Saprete certamente che una successione di numeri reali può avere limite finito,



può avere limite infinito o può non avere affatto limite: ad esempio,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{n} &= 3, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - n^2 + n}{3 + n} &= -\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) &\text{ non esiste.}\end{aligned}$$

Che cosa distingue le ultime due successioni (cattive!) dalla prima (buona!)? Come fare a distinguere una successione che ammette limite finito?

Ebbene, se una successione tende ad un limite finito, allora per  $n$  abbastanza grande i suoi termini sono molto vicini al limite... e in particolare *sono anche molto vicini tra di loro!* Questa proprietà è chiaramente falsa sia per una successione che tende all'infinito che per una successione che non ha limite perché oscilla: in effetti, se la precisiamo un po' meglio, essa individua *esattamente* quali successioni hanno limite finito.

**DEFINIZIONE (Successione di Cauchy):** Una successione di numeri reali  $\{a_n\}$  si dice di Cauchy se i suoi termini sono arbitrariamente vicini tra di loro a patto di prendere indici abbastanza grandi.

In formule, per ogni  $\varepsilon > 0$  deve esistere  $\bar{n} \in \mathbf{N}$  tale che

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}.$$

**TEOREMA:** Una successione di numeri reali converge se e solo se essa è di Cauchy.

L'ultimo teorema è *equivalente* all'assioma di completezza di  $\mathbf{R}$ ...e quindi non ve lo posso dimostrare perché non conoscete l'assioma di completezza! Però converrete che l'enunciato è *molto ragionevole*, per cui sono sicuro che siete disposti a crederci. Per convincervene ancora di più, proviamo a fare un ragionamento euristico: pensiamo ad una successione di Cauchy di numeri reali come a una successione di numeri decimali. Scegliamo  $\varepsilon = 1/1000000$ : la definizione di successione di Cauchy ci assicura che *da un certo punto in poi* i termini della successione differiscono tra loro meno di un milionesimo, cioè *coincidono fino alla quinta cifra dopo la virgola*. Ma allora abbiamo identificato il limite fino alla quinta cifra dopo la virgola!<sup>6</sup> Per conoscere più cifre del limite (potenzialmente, *qualunque* cifra del limite) ci basterà prendere  $\varepsilon$  sempre più piccolo!

<sup>6</sup>Questo ragionamento in realtà andrebbe precisato un po' meglio, perché purtroppo ci sono due modi diversi di scrivere i numeri decimali finiti: per esempio  $2.234 = 2.233\bar{9}$ .

L'enunciato rimane vero anche per successioni di  $\mathbf{R}^2$ : una successione di punti del piano converge ad un punto del piano se e solo se essa è di Cauchy. Questo è abbastanza ovvio: una successione di punti del piano è di Cauchy se e solo se le successioni delle coordinate  $x$  e  $y$  di questi punti sono di Cauchy in  $\mathbf{R}$ !

La nozione di successione di Cauchy è una delle più importanti di tutta l'analisi matematica moderna perché si presta a facili generalizzazioni. Infatti essa ha perfettamente senso *in un qualunque spazio metrico*: dato un insieme  $X$  dotato di una distanza  $d$ , una successione  $\{x_n\}$  di punti di  $X$  si dirà di Cauchy se questi punti sono *arbitrariamente vicini tra loro* a patto di prendere indici *sufficientemente grandi*, cioè se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{n} \in \mathbf{N}$  tale che  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  per ogni  $m, n \geq \bar{n}$ .

Uno spazio metrico  $X$  si dice *completo* se tutte le sue successioni di Cauchy convergono.

Vi ricordo che c'è uno spazio metrico che abbiamo imparato ad amare in questa nostra avventura sui frattali:

**TEOREMA:** *Lo spazio metrico  $\mathcal{H}$  dei sottinsiemi non vuoti, chiusi e limitati di  $\mathbf{R}^2$ , dotato della distanza di Hausdorff  $h$ , è completo. In altre parole, ogni successione  $\{A_n\}$  di sottinsiemi del piano che sia di Cauchy rispetto alla distanza di Hausdorff, converge ad un sottinsieme  $A$  del piano rispetto a tale distanza.*

La dimostrazione del teorema precedente non è semplicissima, per cui lo prenderemo per buono: il lettore interessato può trovarla per esempio nello splendido libro di Barnsley.<sup>7</sup> Vi basti sapere che per portarla a termine si usa soltanto la completezza di  $\mathbf{R}^2$ : data una successione  $\{A_n\}$  come nell'enunciato del teorema, l'insieme limite  $A$  è identificato come l'insieme di tutti i limiti di tutte le successioni  $(x_n, y_n) \in A_n$  che sono di Cauchy...

La buona notizia, però, è che se siamo disposti a credere alla completezza dello spazio  $\mathcal{H}$  con la distanza di Hausdorff, la dimostrazione del Teorema Fondamentale sugli IFS (pag. 7) e del Teorema del Collage (pag. 11) diventa davvero semplice!

**Dimostrazione del Teorema Fondamentale (pag. 7):**<sup>8</sup> Sia  $A_k$  la successione di insiemi nell'enunciato del teorema: dimostreremo che si tratta di

<sup>7</sup>M. Barnsley: "Fractals Everywhere", Morgan Kaufmann, S. Francisco, 1993.

<sup>8</sup>Questa stessa dimostrazione funziona con minime modifiche in uno spazio metrico completo qualunque: permette di far vedere che una contrazione ha uno ed un solo punto fisso (teorema delle contrazioni di Banach).

una successione di Cauchy in  $\mathcal{H}$ , che quindi converge ad un certo insieme  $K$ . Faremo poi vedere che questo  $K$  è un attrattore, e che questo è unico.

Sia  $s$  una costante con  $0 < s < 1$  tale che

$$|T_i((x_1, y_1)) - T_i(x_2, y_2)| \leq s|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|$$

per ogni  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$ ,  $i = 1, \dots, N$  (per esempio, si può prendere la costante  $s$  nell'enunciato del Teorema del Collage, pag. 11).

Se ricordiamo la definizione della distanza di Hausdorff, ci convinciamo subito che la mappa di Hutchinson  $\Phi$  è una contrazione con costante  $s$  nello spazio metrico  $(\mathcal{H}, h)$ : per ogni coppia di insiemi  $A, B \in \mathcal{H}$  vale

$$h(\Phi(A), \Phi(B)) \leq s h(A, B).^9$$

Si noti che la disuguaglianza appena dimostrata ci dice in particolare che la mappa di Hutchinson  $\Phi$  è *continua* rispetto alla distanza di Hausdorff: se  $A_k \rightarrow K$ , ossia se  $\lim_{k \rightarrow +\infty} h(A_k, K) = 0$ , si ha anche  $\Phi(A_k) \rightarrow \Phi(K)$ , vale a dire  $\lim_{k \rightarrow +\infty} h(\Phi(A_k), \Phi(K)) = 0$ .

Inoltre, poiché per definizione si ha  $A_{k+1} = \Phi(A_k)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) possiamo stimare la distanza tra  $A_k$  e  $A_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} h(A_{k+1}, A_k) &= h(\Phi(A_k), \Phi(A_{k-1})) \leq s h(A_k, A_{k-1}) = s h(\Phi(A_{k-1}), \Phi(A_{k-2})) \leq \\ &s^2 h(A_{k-1}, A_{k-2}) \leq \dots \leq s^k h(A_1, A_0). \end{aligned}$$

Più in generale, la disuguaglianza triangolare ci permette di stimare la distanza tra  $A_k$  ed un *qualunque* termine della successione di indice maggiore:

$$\begin{aligned} h(A_{k+r}, A_k) &\leq h(A_k, A_{k+1}) + h(A_{k+1}, A_{k+2}) + \dots + h(A_{k+r-1}, A_{k+r}) \leq \\ &(s^k + s^{k+1} + \dots + s^{k+r-1})h(A_1, A_0) = s^k(1 + s + s^2 + \dots + s^{r-1})h(A_1, A_0) = \\ &s^k \frac{1 - s^r}{1 - s} h(A_1, A_0) \leq \frac{s^k}{1 - s} h(A_1, A_0). \quad (*) \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza dipende da  $k$  ma non da  $r$ : poiché  $s^k \rightarrow 0$ , abbiamo in realtà dimostrato che la successione  $A_k$  è di Cauchy. Grazie alla completezza dello spazio  $\mathcal{H}$  possiamo allora concludere che esiste  $K \in \mathcal{H}$  tale che  $A_k \rightarrow K$  (convergenza rispetto alla distanza di Hausdorff).

Dico che  $K$  è l'attrattore dell'IFS: infatti, passando al limite nella relazione  $A_{k+1} = \Phi(A_k)$  (e ricordando che la mappa di Hutchinson è continua) si ottiene  $K = \Phi(K)$ , che è quanto volevamo.

---

<sup>9</sup>È infatti chiaro, da semplici considerazioni geometriche, che  $h(T_i(A), T_i(B)) \leq s h(A, B)$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

L'attrattore è poi unico: se  $\tilde{K}$  è un altro attrattore, abbiamo

$$h(K, \tilde{K}) = h(\Phi(K), \Phi(\tilde{K})) \leq s h(K, \tilde{K})$$

da cui  $(1-s)h(K, \tilde{K}) \leq 0$ , cioè  $h(K, \tilde{K}) = 0$  (perché  $(1-s) > 0$  e la distanza è non negativa). I due attrattori sono in realtà lo stesso insieme!

**Dimostrazione del Teorema del Collage (pag. 11):** Il Teorema del Collage si ottiene quasi gratis dalla dimostrazione appena fatta!

Riprendiamo la disuguaglianza (\*) con  $k = 0$ : per ogni  $r = 1, 2, 3, \dots$  abbiamo

$$h(A_r, A_0) \leq \frac{1}{1-s} h(A_1, A_0).$$

Per  $r \rightarrow +\infty$  sappiamo che la successione di insiemi  $A_r$  tende all'attrattore  $K$  dell'IFS. Allora, passando al limite nella nostra disuguaglianza otteniamo

$$h(K, A_0) \leq \frac{1}{1-s} h(A_1, A_0),$$

come volevasi dimostrare.<sup>10</sup>

*Al termine di questo lungo sproloquio sin troppo denso di matematica, i partecipanti hanno continuato gli esperimenti al calcolatore sul Teorema del Collage.*

---

<sup>10</sup>Si noti che dalla disuguaglianza (\*), passando al limite per  $r \rightarrow +\infty$ , si ottiene anche

$$h(A_n, K) \leq \frac{s^n}{1-s} h(A_1, A_0),$$

una stima della velocità (esponenziale) di convergenza di  $A_n$  all'attrattore del IFS.

## 8 Incontro del 4/4/2012 (3 ore)

Il Teorema del Collage, come abbiamo visto, ci fornisce un metodo piuttosto efficace per “realizzare” una figura piana come attrattore di un IFS. La procedura, però, non è facile da automatizzare!

In quest’ultimo incontro, voglio mostrarvi il funzionamento di un algoritmo di compressione delle immagini che invece è facilmente automatizzabile, anche se i rapporti di compressione che permette di ottenere non sono elevatissimi. L’algoritmo in esame è dovuto essenzialmente a A. Jacquin<sup>11</sup>. Per la presentazione mi sono ispirato anche a un bell’articolo divulgativo di E. Vrscay<sup>12</sup>. Dai tempi dell’articolo di Jacquin, gli algoritmi di compressione frattale si sono molto evoluti, diventando molto più efficaci... ma anche parecchio più complicati! Questa è la ragione per cui ci limiteremo a studiare la versione originale del metodo.

Supponiamo di avere una immagine grayscale: dal punto di vista matematico, questa è una funzione  $f : Q \rightarrow [0, 1]$ , dove  $Q$  è un quadrato o un rettangolo che contiene l’immagine ed i valori di  $f$  sono i *livelli di grigio*: al valore 0 corrisponde il nero, al valore 1 il bianco, ai valori intermedi le varie tonalità di grigio.

Il *grafico* della funzione  $f$  sarà un sottinsieme di  $\mathbf{R}^3$ : l’idea di base è cercare di realizzare questo insieme come attrattore di un IFS.

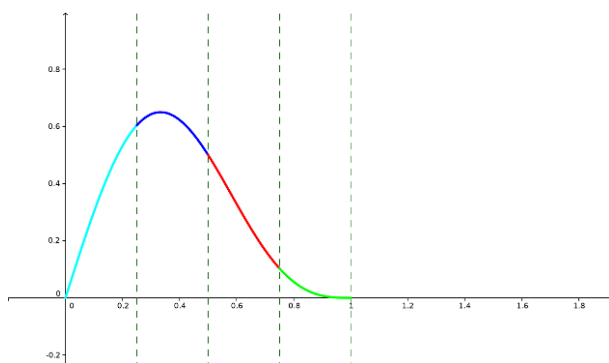
D’altra parte, abbiamo visto che questo non sempre è facile! Per capire come fare, proviamo ad affrontare un problema un po’ più semplice: cerchiamo di comprimere un’immagine (o meglio un segnale) *unidimensionale*, cioè una funzione  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Il vantaggio è che in questo caso il suo grafico è un sottinsieme del piano ed è più facile fare i disegni!

Supponiamo per esempio di voler realizzare il seguente grafico come attrattore di un IFS, e di volerlo fare in modo automatico:

---

<sup>11</sup>A.E. Jacquin, “Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformations”, IEEE Transactions on Image Processing 1 (1992), p. 18-30.

<sup>12</sup>E.R. Vrscay, “A Hitchhiker’s Guide to Fractal-Based function approximation and image compression”, published on the UW Faculty of Mathematics alumni newspaper “Math Ties”, february-august 1995.



La scelta delle trasformazioni dell'IFS non è affatto ovvia! Per semplificarci il compito, l'idea è di

- ridurre assai drasticamente l'insieme delle trasformazioni ammissibili;
- cercare di realizzare il nostro grafico non più come collage di copie ridotte di se stesso, ma come collage di copie ridotte di *porzioni* di se stesso: cerchiamo di sfruttare delle autosimilarità *locali* piuttosto che globali.

Precisamente, dividiamo il nostro grafico in un certo numero di porzioni fissate, che chiameremo “*blocchi genitori*”: nel nostro esempio si tratta delle porzioni colorate, che corrispondono ad una suddivisione in quattro parti uguali del dominio della funzione. Scegliendo un numero maggiore di suddivisioni si otterrebbe un'approssimazione migliore, al prezzo di un rapporto di compressione più basso.

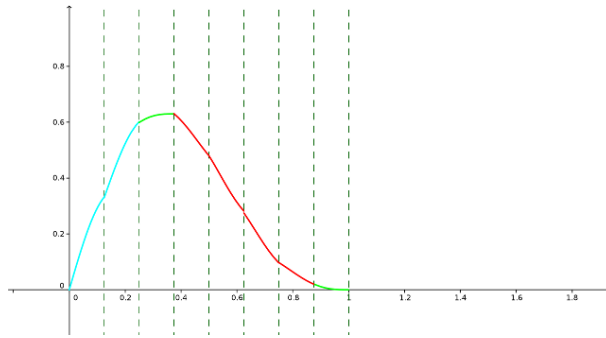
Vogliamo riprodurre il nostro grafico, nel modo più preciso possibile, come collage di copie ridotte dei “*blocchi genitore*”. Decidiamo però a priori che ciascuna copia ridotta (“*blocco figlio*”) avrà come dominio esattamente la metà di quello di un blocco genitore (quindi avremo 8 blocchi figli). Per approssimare ciascun blocco figlio scegliamo un blocco genitore, lo riscaliamo di un fattore  $1/2$  lungo l'asse delle  $x$  in modo da dimezzarne il dominio e lo trasliamo orizzontalmente per sovrapporlo al dominio del blocco figlio. Infine lo riscaliamo e trasliamo lungo l'asse delle  $y$  in modo da rendere la più piccola possibile la distanza tra il grafico trasformato ed il grafico originale (i coefficienti ottimali si ottengono di solito con il metodo dei minimi quadrati). In quest'ultima fase, ammettiamo anche riflessioni del grafico trasformato sia in orizzontale che in verticale, nel caso queste consentano di ridurre la distanza tra il blocco figlio ed il trasformato del blocco genitore<sup>13</sup>.

Ovviamente, il genitore di ciascun figlio andrà scelto in modo da minimizzare la distanza tra i grafici: l'algoritmo di scelta è basato sulla forza bruta,

<sup>13</sup>In questo caso si utilizza una opportuna distanza integrale, la distanza  $L^1$ .

semplicemente provando tutti e 4 i possibili genitori con e senza riflessione orizzontale e/o verticale (per un totale di 16 scelte possibili)!

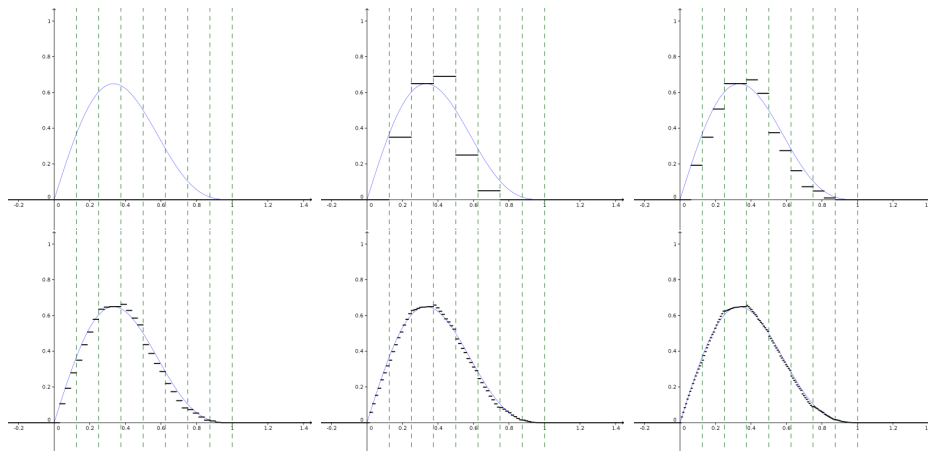
Ecco quel che si ottiene applicando queste trasformazioni al grafico del nostro esempio:



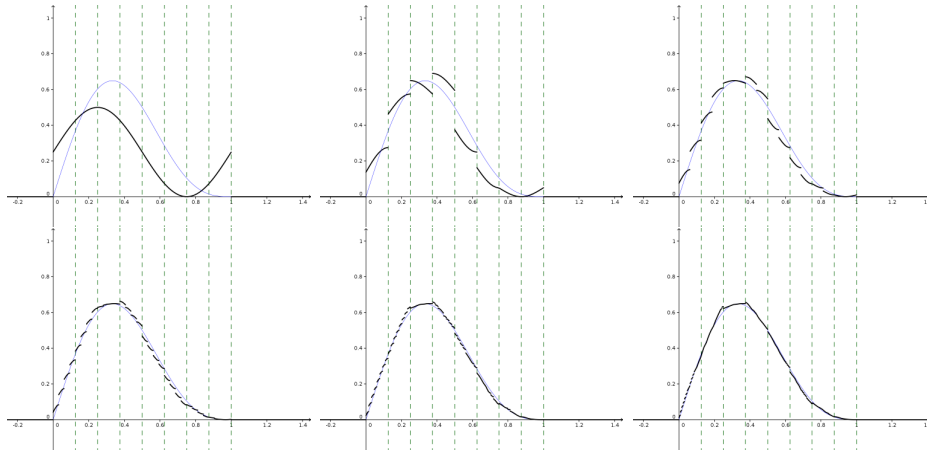
come si vede abbiamo ottenuto una ragionevole approssimazione! Gli otto “blocchi figlio” sono colorati con lo stesso colore del loro “genitore”. Le trasformazioni che abbiamo trovato formano un oggetto noto come LIFSM (Local IFS with grayscale Maps, le “grayscale maps” sono i riscalamenti e le traslazioni che operiamo lungo l’asse  $y$ ).

Utilizzando un’appropriata versione del teorema fondamentale sugli IFS e del teorema del Collage, si vede che la famiglia di trasformazioni che abbiamo costruito ha un unico *attrattore*: se partiamo da una *qualsiasi* funzione e iteriamo più volte le nostre trasformazioni, otteniamo una successione di funzioni che converge al punto fisso del LIFSM, cioè ad una funzione che viene lasciata in se dalla famiglia di trasformazioni. Inoltre, la distanza tra l’attrattore e l’immagine originale si stima con la distanza tra l’immagine originale e la sua trasformata secondo il LIFSM.

Ecco quel che si ottiene iterando il LIFSM dell’esempio a partire dalla funzione identicamente nulla:



Come si vede, otteniamo una buona approssimazione della funzione originale!  
Anche partendo da una funzione iniziale completamente diversa si ottiene una rapida convergenza all'attrattore:



Questo algoritmo si generalizza in modo ovvio alle immagini bidimensionali: un bell'applet che illustra come avviene la compressione si trova in rete all'indirizzo

<http://www.eurecom.fr/~image/DEMOS/FRACTAL/english/codeur.html>.

Peccato soltanto che l'applet gemello, che illustra la decompressione, abbia qualche baco, per cui spesso non viene inizializzato correttamente.

*Il tempo rimanente è stato dedicato dai partecipanti alla rifinitura del codice Mathematica per realizzare attrattori e collage di vario genere.*