Esame di Ricerca Operativa - 14 febbraio 2012
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

La VaSu&Zo produce scarponi da sci. Nella prossima stagione invernale essa deve far fronte a una domanda variabile di mese in mese ma comunque accuratamente stimata come da seguente tabella.

	novembre	dicembre	gennaio	febbraio
domanda (numero paia)	10000	25000	20000	10000
costi di produzione (Eurocent/paio)	600	800	720	600
costi di stoccaggio (Eurocent/paio)	80	100	90	500

Nella tabella sono inoltre riportati, mese per mese, i costi unitari di produzione, cioé per singolo paio di scarponi prodotto in quel mese. Inoltre, ad ogni fine mese, si incorre in un costo di stoccaggio per ogni paio di scarponi attualmente invenduto giacente in magazzino. Il magazzino ha una capacitá massima pari a 3000 paia di scarponi e si assume che a fine ottobre (inizio della stagione) il magazzino sia completamente vuoto. Formulare come problema di programmazione lineare intera il problema di pianificare la produzione mensile in modo da minimizzare il costo complessivo (costo di produzione piú costo di stoccaggio).

svolgimento.

Per $i = 0, 1, 2, 3, 4,$ una variabile x_i indica il numero di paia di scarponi presenti in magazzino al termine del mese di ottobre (0), novembre (1), dicembre (2), gennaio (3), febbraio (4). Inoltre, anche se non necessaria, vien forse comodo introdurre, per $i = 1, 2, 3, 4$, una variabile y_i che indichi il numero di paia di scarponi prodotti durante il mese di novembre (1), dicembre (2), gennaio (3), febbraio (4).

Un primo vincolo é dato dalla condizione iniziale del magazzino

$$x_0 = 0\,,$$

ed esprimiamo la nostra esigenza di contenere i costi tramite la funzione obbiettivo:

$$\min \sum_{i=1}^{n} 80\,x_1 + 100\,x_2 + 90\,x_3 + 500\,x_4 + 600\,y_1 + 800\,y_2 + 720\,y_3 + 600\,y_4\,.$$

Avremo una famiglia di vincoli dovuti alla capacitá massima del magazzino.

$$x_i \leq 3000 \text{ per ogni } i = 1, 2, 3, 4.$$

Avendo deciso di introdurre un set di variabili “ridondanti”, ossia le y, siamo chiamati a specificare i vincoli che le definiscono.

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 - x_0 + 10000 \\
y_2 &= x_2 - x_1 + 25000 \\
y_3 &= x_3 - x_2 + 20000 \\
y_4 &= x_4 - x_3 + 10000
\end{aligned}$$

Ed é bene non dimenticare i vincoli di non-negativitá ed interezza.

$$x_i \geq 0 \text{ ed intera per ogni } i = 1, 2, 3, 4,$$
$$y_i \geq 0 \text{ per ogni } i = 1, 2, 3, 4.$$

Problema 2 (2+2+3 punti):
Vogliamo fornire un modello generale per il problema delle scorte. Abbiamo T periodi, e durante il periodo $i = 1, 2, \ldots, T$, siamo tenuti ad evadere una domanda che vale d_i, e siamo soggetti ad un costo di produzione unitario che vale p_i. Inoltre, al termine del periodo $i = 0, 1, 2, \ldots, T$, siamo tenuti a pagare m_i per ogni paio giacente in magazzino, e questo numero di colli non puó eccedere B_i. All'inizio del periodo 1 nel magazzino sono stoccati C colli. Si assuma che i valori d_i, p_i, m_i siano tutti degli interi non negativi.
(**2pt**) Formulare come problema di programmazione lineare intera il problema di pianificare la produzione mensile in modo da minimizzare il costo complessivo (costo di produzione piú costo di stoccaggio).
(**2pt**) Se omettessimo i vincoli di interezza, rischieremmo che il modello abbia soluzioni ottime frazionarie? (Per ottenere i punti bisogna fornire evidenza).
(**3pt**) Se omettessimo i vincoli di interezza, siamo comunque garantiti che almeno una soluzione ottima sia intera? Se sí, indicare come produrre una soluzione ottima intera partendo da una qualsiasi soluzione ottima frazionaria.

svolgimento.
Per $i = 0, 1, 2, \ldots T$, abbiamo una variabile intera x_i che indica il numero di colli presenti in magazzino al termine del periodo i. Inoltre, anche se non necessaria, vien forse comodo introdurre, per $i = 1, 2, \ldots T$, una variabile y_i che indichi il numero di colli prodotti durante il periodo i.
Un primo vincolo é dato dalla condizione iniziale del magazzino

$$x_0 = C\,,$$

ed esprimiamo la nostra esigenza di contenere i costi tramite la funzione obbiettivo:

$$\min \sum_{i=0}^{T} m_i\, x_i + \sum_{i=1}^{T} p_i\, y_i\,.$$

Avremo una famiglia di vincoli dovuti alla capacitá massima del magazzino.

$$x_i \leq B_i \text{ per ogni } i = 1, 2, \ldots T.$$

Avendo deciso di introdurre un set di variabili "ridondanti", ossia le y, siamo chiamati a specificare i vincoli che le definiscono.

$$y_i = x_i - x_{i-1} + d_i \text{ per ogni } i = 1, 2, \ldots T.$$

Ed é bene non dimenticare i vincoli di non-negativitá ed interezza.

$$x_i \geq 0 \text{ ed intera per ogni } i = 1, 2, \ldots T,$$
$$y_i \geq 0 \text{ per ogni } i = 1, 2, \ldots T.$$

La seguente istanza ammette soluzioni ottime frazionarie:

$$T = 2, C = 0, d_1 = 0, d_2 = 1, p_1 = 1, p_2 = 2, m_1 = 1, m_2 = 0, B_1 = B_2 = 1$$

Con soluzione ottima

$$x_0 = x_2 = 0, x_1 = y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$$

Ma comunque assegnata una soluzione frazionaria é facile ricavarne una intera altrettanto buona in termini di funzione obiettivo agendo come segue:

> Sia $\bar{i}$ il pipiccolo indice per il quale $y_{\bar{i}}$ é frazionaria. Si noti che anche $x_{\bar{i}}$ é frazionaria mentre tutti gli x_j ed y_j sono interi per ogni $j < \bar{i}$. Si osservi che la soluzione ottenuta con la semplice modifica locale $x'_{\bar{i}} \leftarrow \lfloor x_{\bar{i}} \rfloor$, $y'_{\bar{i}} \leftarrow \lfloor y_{\bar{i}} \rfloor$, e $y'_{\bar{i}+1} \leftarrow y_{\bar{i}+1} + (y_{\bar{i}} - \lfloor y_{\bar{i}} \rfloor)$ é anche essa ammissibile. Lo stesso dicasi per la soluzione ottenuta con la semplice modifica locale $x'_{\bar{i}} \leftarrow \lceil x_{\bar{i}} \rceil$, $y'_{\bar{i}} \leftarrow \lceil y_{\bar{i}} \rceil$, e $y'_{\bar{i}+1} \leftarrow y_{\bar{i}+1} + (y_{\bar{i}} - \lceil y_{\bar{i}} \rceil)$. Poiché la soluzione frazionaria originaria é combinazione convessa di queste due ed ottima, anche queste due debbono essere ottime. Se sostituiamo la soluzione frazionaria originaria con una di queste due allunghiamo il prefisso non-frazionario e quindi, eventualmente iterando il processo al piú T volte, termineremo infine con una soluzione intera altrettanto buona.

Problema 3 (3+1+4+2 punti):
Si fornisca un algoritmo di programmazione dinamica per il modello di cui al problema precedente (modello delle scorte).
(**3pt**) Si definisca la famiglia dei problemi;
(**1pt**) Si indichino quali problemi della famiglia sono considerati problemi base, specificando come calcolarne direttamente la soluzione;
(**4pt**) Fornire la ricorrenza per il computo di tutti gli altri problemi della famiglia.

(**2pt**) Si utilizzi questo approccio per risolvere all'ottimo l'istanza ricompresa nel Problema 1.

Problema 4 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = \mathrm{C\,A\,G\,A\,G\,T\,G\,T\,T\,A\,C\,G\,C\,A\,G\,A\,T}$ e $t = \mathrm{G\,A\,T\,C\,G\,T\,C\,A\,G\,T\,T\,G\,C\,A\,T\,A}$. Fare lo stesso con alcuni prefissi di s e t.

3.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'C'?

3.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il prefisso $t_9 = \mathrm{G\,A\,T\,C\,G\,T\,C\,A\,G}$ di t?

3.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il prefisso $s_8 = \mathrm{C\,A\,G\,A\,G\,T\,G\,T}$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
termina con 'C'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

s⌒	-	G	A	T	C	G	T	C	A	G	T	T	G	C	A	T	A
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
G	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
A	0	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4
G	0	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
T	0	1	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5
G	0	1	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6
T	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7
T	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	7	7	7	7	7	7
A	0	1	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8
C	0	1	2	3	4	4	5	6	6	6	6	7	7	8	8	8	8
G	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8
C	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	9	9	9	9
A	0	1	2	3	4	5	5	6	7	7	7	7	8	9	10	10	10
G	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	10
A	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	11
T	0	1	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	9	9	10	11	11

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	11	G A G T G T T G C A T
termina con 'C'	11	G A G T G T T G C A A
tra s e t_9	8	G A T G T C A G
tra s_8 e t	7	A G A G T G T

Problema 5 (11 punti):
Con riferimento al seguente problema di PL

$$\max\ 2\,x_{A1} + 2\,x_{A2} + 2\,x_{A3} + 2\,x_{B1} + 1\,x_{B2} + 1\,x_{B3} + 6\,x_{C1} + 7\,x_{C2} + 6\,x_{C3}$$
$$\begin{cases} x_{L1} + \quad x_{L2} + \quad x_{L3} \ \le \ 1 \text{ per } L = A, B, C \\ x_{Ai} + \quad x_{Bi} + \quad x_{Ci} \ \le \ 1 \text{ per } i = 1, 2, 3 \\ x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{C1}, x_{C2}, x_{C3} \ge 0 \end{cases}$$

dai nostri executive managers ci sono state proposte le seguenti soluzioni:
(s1) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A3} = x_{B2} = x_{C1} = 1$ (s2) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A1} = x_{B2} = x_{C3} = 1$;
(s3) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A2} = x_{B1} = x_{C3} = 1$ (s4) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A1} = x_{B1} = x_{C3} = 1$;
(s5) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A3} = x_{A1} = x_{C2} = 1$ (s6) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A2} = x_{B3} = x_{C1} = 1$;
(s7) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A3} = x_{B1} = x_{C2} = -1$ (s8) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A3} = x_{B1} = x_{C2} = 1$;
(s9) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A2} = x_{C3} = 1$ (s10) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A2} = x_{B1} = 1$;
(s11) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A1} = x_{B2} = 1$ (s12) $x \equiv 0$ eccetto $x_{C3} = 2$.

5.1(1pt) Determinare quali siano ammissibili.

5.2(3pt) Determinare quale delle soluzioni proposte sia ottima e fornire certificato di ottimalità.

5.3(1pt) Fornire tutte le soluzioni ottime al problema od argomentare l'unicitá della soluzione ottima.

5.4(2pt) Per ciascuno dei 6 vincoli, specificare quanto saremmo disposti a pagare per incrementare l'availability su quel vincolo.

5.5(2pt) Dire quali delle soluzioni proposte siano di base.

5.6(2pt) Dire quali delle soluzioni di base proposte siano adiacenti (raggiungibili con un solo pivot) dalla s2.

Le soluzioni proposte sono tutte ammissibili eccetto

(s4) che viola la seconda famiglia di vincoli,

(s5) che viola la prima famiglia di vincoli.

(s12) che viola entrambe le famiglie di vincoli.

(s7) che viola i vincoli di non-negativitá.

É facile verificare per sostituzione nella funzione obbiettivo che la soluzione ammissibile tra quelle proposte che totalizza più di tutte (le altre proposte) é la (s8). Pertanto, giocheremo gli scarti complementari per la (s8). Cosí' facendo si scopre che la (s8) é effettivamente ottima e, del caso, se ne ottiene anche certificato di ottimalitá.

Il problema duale é

$$\min\ y_A + y_B + y_C + y_1 + y_2 + y_3$$
$$\begin{cases} y_A + y_1\ geq & 2 \\ y_A + y_2\ geq & 2 \\ y_A + y_3\ geq & 2 \\ y_B + y_1\ geq & 2 \\ y_B + y_2\ geq & 1 \\ y_B + y_3\ geq & 1 \\ y_C + y_1\ geq & 6 \\ y_C + y_2\ geq & 7 \\ y_C + y_3\ geq & 6 \\ y_A, y_B, y_C, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

e dalle condizioni degli scarti complementari otteniamo

$$y_A + y_3 = 2 \quad y_B + y_1 = 2 \quad y_C + y_2 = 7\,.$$

Una soluzione ammissibile (e di base) che rispetti tali condizioni é:

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0, \quad y_A = 2 \quad y_B = 2 \quad y_C = 7\,.$$

Se ne verifichi l'ammissibilità per convincersi che la (s8) é effettivamente ottima.

La soluzione duale ottima proposta non é unica ma l'unicitá della soluzione ottima primale (s8) puó essere dedotta applicando gli scarti complementari alla soluzione duale e scoprendo che questa volta la soluzione primale ne resta univocamente determinata.

Dalla soluzione ottima del duale proposta sopra possiamo dedurre che non saremmo disposti a pagare nulla per incrementare la costante 1 dei vincoli associati ad y_1, y_2, y_3. Un'altra soluzione ottima di base per il duale é:

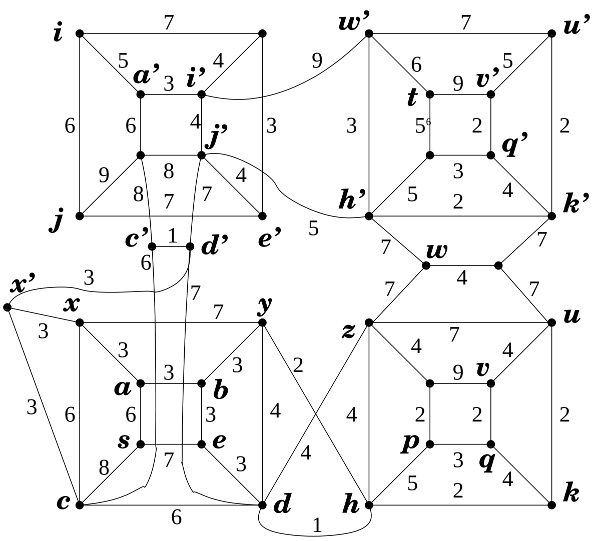
$$y_1 = y_3 = 2. \quad y_2 = 3, \quad y_A = y_B = 0 \quad y_C = 4\,.$$

Da questa soluzione ottima del duale possiamo dedurre che non saremmo disposti a pagare nulla nemmeno per i vincoli associati ad y_A ed y_B, mentre per y_C non saremmo mai disposti a pagare più di 4. In effetti 4 é esattamente quanto saremmo disposti a pagare. Come argomentarlo? Provare ad esibire una soluzione primale (per il problema modificato con $x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} \leq 1 + t$) che lo argomenti.

Problema 5 (18 punti):

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

5.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.



5.2.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'c$ con un arco $c'x$ e l'arco $d'd$ con un arco $d'y$ è planare oppure no. Se non planare, rimuovere il minimo numero di archi per planarizzarlo.

5.3.**(1+1+1pt)** Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no. Ove non bipartito, rimuovere il minimo numero di archi per bipartizzarlo.

5.4.**(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

5.5.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.6.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.7.**(2pt)** Per i seguenti archi dire, certificandolo, in quale categoria ricadano (contenuti in ogni/nessuna/qualcuna-ma non-tutte le soluzioni ottime): zu, $h'w$, xx'.

5.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

L'unica domanda che risulta decisamente nuova é la (5.7) ed é bene che io la svolga per illustrare come andava ben affrontata (quale sia la tipologia dei certificati).

ij contenuto in nessuna soluzione ottima in quanto arco di peso strettamente massimo nel ciclo $ia'i'j'e'j$.

ab contenuto in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso strettamente minimo nel taglio di archi $ab, se, cd, xy, j'h', i'w'$ dagli altri nodi del grafo.

$h'w$ contenuto in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio che separa gli 8 nodi dei due cubi in alto da tutti gli altri nodi sotto, ma non contenuto in tutte in quanto arco di peso massimo nel ciclo $wzdd'j'h'$.