Esame di Ricerca Operativa - 24 gennaio 2012
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

14	7	9	4	8	24	31	55	7	28	56	11	34	22	49	51	12	10	5	28	53	16	33	45	17	19	18

1.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

1.2(2pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

1.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 12. Specificare quanto è lunga e fornirla.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	8	7, 9, 24, 31, 34, 49, 51, 53
Z-sequenza	11	4, 8, 24, 31, 55, 56, 11, 34, 49, 51, 53
crescente con 12	7	4, 7, 11, 12, 28, 33, 45

Problema 2 (1+1+4 punti):
Data una sequenza $val_1, val_2, \ldots, val_n$ di valori reali, formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di una sottosequenza strettamente crescente costituita dal massimo possibile numero di elementi (ossia di massima cardinalità). Sapresti formulare come un problema di PLI anche la variante dove invece del numero di elementi presi si fosse interessati a massimizzarne la somma? E sapresti formulare come un problema di PLI anche la ricerca di una Z-sequenza (si veda l'esercizio precedente per una definizione) costituita dal massimo possibile numero di elementi?

svolgimento.
Abbiamo una variabile $x_i \in \{0, 1\}$ per $i = 1, 2, \ldots, n$, con l'idea che 1 significa "elemento s_i della sequenza s incluso nella sottosequenza soluzione" mentre 0 significa la negazione di quanto sopra.

Volendo massimizzare la cardinalità della sottosequenza crescente riscontrata adotteremo la seguente funzione obiettivo:

$$\max \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Volendo invece massimizzare la somma della sottosequenza adotteremo allora la seguente funzione obiettivo:

$$\max \sum_{i=1}^{n} val_i x_i$$

Avremo una famiglia di vincoli intesi ad imporre la stretta crescenza: di fatto una sequenza é crescente se e solo se non contiene due elementi di cui il primo ecceda il secondo, ed é questa condizione "locale" che non risulta difficile formulare tramite i seguenti vincoli.

$$x_i + x_j \leq 1 \text{ per ogni coppia } i, j = 1, 2, \ldots, m \text{ con } i < j \text{ tale che } s_i \geq s_j.$$

Nel caso della Z-sottosequenza, oltre alle varibili x introduciamo delle variabili y come segue: per $i = 1, 2, \ldots, n$, abbiamo le variabili $x_i, y_i \in \{0, 1\}$ con l'idea che $x_i = 1$ ($y_i = 1$) significa "elemento s_i della sequenza s incluso nella prima metà (seconda metà) della Z-sottosequenza soluzione" mentre 0 significa la negazione di quanto sopra.

Volendo massimizzare la cardinalità della sottosequenza crescente riscontrata adotteremo la seguente funzione obiettivo:

$$\max \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Avremo due famiglie di vincoli intese ad imporre la stretta crescenza su entrambe le metà: di fatto una sequenza é crescente se e solo se non contiene due elementi di cui il primo ecceda il secondo, e sono queste condizioni "locali" che non risulta difficile formulare tramite i seguenti vincoli.

$$x_i + x_j \leq 1 \text{ per ogni coppia } i, j = 1, 2, \ldots, m \text{ con } i < j \text{ tale che } val_i \geq val_j.$$
$$y_i + y_j \leq 1 \text{ per ogni coppia } i, j = 1, 2, \ldots, m \text{ con } i < j \text{ tale che } val_i \geq val_j.$$

Infine, occorre affermare che la seconda metà segue la prima, ossia:

$$y_i + x_j \leq 1 \text{ per ogni coppia } i, j = 1, 2, \ldots, m \text{ con } i \leq j.$$

Problema 3 (13 punti):

Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, intende portarsi nella sua home H situata nella cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	1	3	0	1	1	0	0	•
B	2	2	0	•	1	•	0	0	0
C	2	0	0	1	0	0	1	1	1
D	0	0	•	0	0	0	•	0	0
E	0	0	1	1	•	1	2	0	2
F	0	1	1	1	2	1	•	•	1
G	3	3	0	1	•	0	0	1	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Supponete poi che il robot, ad ogni passo, decida a caso e con probabilitá uniforme (lancio moneta non truccata) quale movimento base effettuare ogniqualvolta possa scegliere. Quale é la probabilitá che arrivi a casa? Infine, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un valore intero che esprime un guadagno che viene ottenuto se il robot passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare il guadagno complessivo raccolto con la traversata. E come ti organizzeresti per determinare il numero di cammini diversi che ottengano di fatto il massimo guadagno possibile?

3.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

3.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

3.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

3.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–9 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

3.5(4pt) Quale la probabilità che il robot giunga a casa?

3.6(1pt) Quale é il massimo guadagno raccoglibile nella traversata da A–1 a G–9?

3.7(2+2pt) Determinazione numero di cammini ottimi: Quale é il problema generico nel tuo approccio di programmazione dinamica (definizione semantica) e quale la ricorrenza (computo)?

consegna	numero percorsi
A–1 → G–9	
B–3 → G–9	
A–1 → F–6	
passaggio per D–5	
probab. goes home	
massimo valore	

definizione famiglia problemi (1pt) e ricorrenza (1pt)

2+2/30

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	94	51	28	18	11	11	11	4	•
B	43	23	10	•	7	•	7	4	1
C	20	13	10	10	7	5	3	3	1
D	7	3	•	3	2	2	•	2	1
E	4	3	2	1	•	2	1	1	1
F	1	1	1	1	1	1	•	•	1
G	0	0	0	0	•	1	1	1	H

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella A–1 alla cella C.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	1	1	1	1	1	1	•
B	1	2	3	•	1	•	1	2	2
C	1	3	6	6	7	7	8	10	12
D	1	4	•	6	13	20	•	10	22
E	1	5	5	11	•	20	20	30	52
F	1	6	11	22	22	42	•	•	52
G	1	7	18	40	•	42	42	42	94

Ritrovare il valore 94 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.
La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio. Per rispondere alla 5 domanda mi chiedo quale sia la probabilitá complementare che, nell'atterrare sull'ultima riga, il robot cada in una delle celle morte G1, G2, G3, G4.

	1	2	3	4	5
A	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
B	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	•	
C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	
D	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	•	$\frac{3}{32}$	
E	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	•
F	$\frac{1}{32}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{13}{128}$	$\frac{25}{256}$	
G	$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{13}{256}$	$\frac{25}{512}$	•

Quindi la probailitá di arrivare a casa é $1 - \frac{1}{64} - \frac{7}{128} - \frac{13}{256} - \frac{25}{512}$. Si noti che nel computo dell'ultima riga la regola era diversa in quanto volevamo calcolare la probabilitá di atterrare su una data casella dell'ultima riga senza provenire dalla casella alla sua sinistra.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il massimo valore di un percorso che va dalla cella A–1 alla cella C. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di massimo valore.

Per ogni cella, il massimo valore é dato dal valore contenuto nella cella stessa sommato al massimo tra il massimo valore per la cella sopra e per la cella a sinistra. Per ogni cella, il numero di percorsi di massimo valore é pari al numero di percorsi di massimo valore per quella cella (sopra od a sinistra) che ha vinto il confronto nella valutazione del massimo qui sopra. In caso di pareggio, bisogna allora sommare questi due numeri.

Problema 4 (8 punti):

$$\max\ 6x_1 - 5x_2 - 3x_3$$
$$\begin{cases} -4x_1 + \ 5x_2 - \ 3x_3 \leq \ 5 \\ \ 2x_1 - \ 5x_2 + \ x_3 \leq -5 \\ \ 2x_1 - \ x_2 + \ 2x_3 \leq \ 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1.1(1pt) Impostare il problema ausiliario.

1.2(2pt) Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

1.3(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

1.4(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

1.5(2pt) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

svolgimento.

Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile "di colla" x_0. Del problema originario ci interessa solamente investigare l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$\max\ -x_0$$
$$\begin{cases} -4x_1 + \ 5x_2 - \ 3x_3 - \ x_0 \leq \ 5 \\ \ 2x_1 - \ 5x_2 + \ x_3 - \ x_0 \leq -5 \\ \ 2x_1 - \ x_2 + \ 2x_3 - \ x_0 \leq \ 4 \\ x_0, x_1, x_3, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Si ha che il problema originario era ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$\max\ -x_0$$
$$\begin{cases} w_1 = \ 5 + \ 4x_1 - \ 5x_2 + \ x_3 + \ x_0 \\ w_2 = -5 - \ 2x_1 + \ 5x_2 - \ x_3 + \ x_0 \\ w_3 = \ 4 - \ 2x_1 + \ x_2 - \ 2x_3 + \ x_0 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tecnicamente, anche il problema ausiliario non è ad origine ammissibile, ma riusciamo facilmente a procurarci una soluzione di base ammissibile in un singolo pivot: facciamo entrare x_0 in base settandone il valore a 15 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facciamo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo.

$$\begin{array}{l} \max \ -5 - 2x_1 + 5x_2 - x_3 - w_2 \\ \left\{ \begin{array}{rcrrrrr} w_1 & = & 10 + & 6x_1 - & 10x_2 + & 4x_3 + & w_2 \\ x_0 & = & 5 + & 2x_1 - & 5x_2 + & x_3 + & w_2 \\ w_3 & = & 9 & - & 4x_2 - & x_3 + & w_2 \\ \multicolumn{7}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0} \end{array} \right. \end{array}$$

La soluzione di base attuale non è ancora ottima: il coefficiente della x_2 nella funzione obiettivo vale $5 > 0$, quindi portiamo la x_2 in base. Ad arrestare la crescita della x_2 sono la x_0 e la w_1 che si annullano entrambe contemporaneamente per $x_2 = 1$. In situazioni come questa, per fare posto in base alla x_2 conviene portare fuori base la x_0 dato che essa ormai si annulla (il problema originario era cioè ammissibile dacchè basta zero colla). Effettuiamo questo ultimo pivot per il problema ausiliario avendo cura di portare la x_0 fuori base non appena essa si annulla così che un dizionario ammissibile per il problema originario potrà essere facilmente ottenuto.

$$\begin{array}{l} \max \ -x_0 \\ \left\{ \begin{array}{rcrrrrr} w_1 & = & & 2x_1 + & 2x_3 - & w_2 + & 2x_0 \\ x_2 & = & 1 + & \frac{2}{5}x_1 + & \frac{1}{5}x_3 + & \frac{1}{5}w_2 - & \frac{1}{5}x_0 \\ w_3 & = & 5 - & \frac{8}{5}x_1 - & \frac{9}{5}x_3 + & \frac{1}{5}w_2 + & \frac{4}{5}x_0 \\ \multicolumn{7}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0} \end{array} \right. \end{array}$$

Ora che x_0 è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla x_0 per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario. In tale dizionario, la scrittura per la funzione obiettivo è stata ottenuta partendo dalla funzione obiettivo originaria ed utilizzando le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base.

$$\begin{array}{l} \max \ 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -5 + 4x_1 - 4x_3 - w_2 \\ \left\{ \begin{array}{rcrrrr} w_1 & = & & 2x_1 + & 2x_3 - & w_3 \\ x_2 & = & 1 + & \frac{2}{5}x_1 + & \frac{1}{5}x_3 + & \frac{1}{5}w_2 \\ w_3 & = & 5 - & \frac{8}{5}x_1 - & \frac{9}{5}x_3 + & \frac{1}{5}w_2 \\ \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0} \end{array} \right. \end{array}$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della x_1 nella funzione obiettivo è positivo. Portano in base x_1 esce w_3 ed otteniamo il seguente dizionario.

$$\begin{array}{l} \max \ \frac{15}{2} - \frac{5}{2}w_2 - \frac{17}{2}x_3 - \frac{1}{2}w_3 \\ \left\{ \begin{array}{rcrrrr} w_1 & = & \frac{25}{4} - & \frac{5}{4}w_3 - & \frac{1}{4}x_3 - & \frac{3}{4}w_2 \\ x_2 & = & \frac{9}{4} - & \frac{1}{4}w_3 - & \frac{1}{4}x_3 + & \frac{1}{4}w_2 \\ x_1 & = & \frac{25}{8} - & \frac{5}{8}w_3 - & \frac{9}{8}x_3 + & \frac{1}{8}w_2 \\ \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0} \end{array} \right. \end{array}$$

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia ora ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi) e quindi in questo caso non sono necessari ulteriori passi di pivot.

In termini delle variabili di decisione originarie la soluzione ottima è data da $x_1 = \frac{25}{8}$, $x_2 = \frac{9}{4}$, $x_3 = 0$ cui corrisponde un valore di $\frac{15}{2}$ per la funzione obiettivo. É facile verificare che tale soluzione risulta in effetti ammissibile per il problema originario (sostituzione) e che sommando il secondo vincolo moltiplicato per $\frac{5}{2}$ (perché questo valore?) ed il terzo vincolo per $\frac{1}{2}$ (perché questo valore?) si scopre che nessuna soluzione ammissibile puó totalizzare piú di $\frac{15}{2}$. Quindi le soluzioni (primale e duale) offerte dall'ultimo dizionario si autocertificano.

Per ogni unità di incremento del termine noto del secondo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{1}{2}$ (almeno per piccoli incrementi).Per ogni unità di incremento del termine noto del terzo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{5}{2}$ (almeno per piccoli incrementi). Non saremmo invece disposti a pagare nulla per incrementare il termine noto del primo vincolo.

Per capire fino a dove saremmo disposti a pagare tali prezzi ombra devo ricomputare l'ultimo dizionario sotto l'assunzione che la quantitá di risorsa disponibile sul terzo vincolo sia $4 + t_3$ (invece di 4) e che la quantitá di risorsa disponibile sul secondo vincolo sia $-5 + t_2$ (invece di -5). Pertanto solo due valori del problema originale (solo due valori della colonna dei termini noti del problema iniziale) sono ora cambiati. Mi interessa comprendere come i vari valori dell'ultimo dizionario vadano riveduti. Poiché il dizionario finale é stato ottenuto dal dizionario iniziale tramite dei passi di pivot, che altro non sono che operazioni di riga (moltiplicare una riga per uno scalare od aggiungere un multiplo di una riga ad un'altra), ne consegue che solo i valori della colonna k dei termini noti vanno eventualmente rivisti. Per ricomputarli in modo agevole (senza ripercorrere i vari passi) mi avvalgo della "prova del nove" del tableau e riconsidero quindi l'ultimo dizionario cui si era pervenuti dando per incogniti i valori K, k_2, k_3 e k_1 della colonna k dei termini noti

	k	w_2	w_3	x_3
z	K	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{17}{2}$
w_1	k_1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_2	k_3	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_1	k_2	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{9}{8}$

con la soluzione di base iniziale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $z = 0$, $w_1 = 5$, $w_2 = -5+t_2$, $w_3 = 4+t_3$, come associata al tableau iniziale del problema modificato (il tableau di definizione delle variabili di slack). Si perviene cosí alle seguenti equazioni di controllo:

$$
\begin{aligned}
(0) &= K - \frac{1}{2}(t_2 - 5) - \frac{5}{2}(t_3 + 4) - \frac{17}{2}(0) \longrightarrow K = \frac{15}{2} + \frac{5}{2}t_3 + \frac{1}{2}t_2 \\
(0) &= k_1 - \frac{3}{4}(t_2 - 5) - \frac{5}{4}(t_3 + 4) - \frac{1}{4}(0) \longrightarrow k_1 = \frac{25}{4} + \frac{5}{4}t_3 + \frac{3}{4}t_2 \\
(0) &= k_2 + \frac{1}{40}(t_2 - 5) - \frac{1}{8}(t_3 + 4) - \frac{9}{40}(0) \longrightarrow k_2 = \frac{5}{8} + \frac{1}{8}t_3 - \frac{1}{40}t_2 \\
(0) &= k_3 + \frac{1}{4}(t_2 - 5) - \frac{1}{4}(t_3 + 4) - \frac{1}{4}(0) \longrightarrow k_3 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}t_3 - \frac{1}{4}t_2
\end{aligned}
$$

La prima equazione (valore di K) conferma l'interpretazione economica (prezzi ombra) delle variabili duali esprimendo il valore della funzione obbiettivo per quella soluzione di base al variare di t_3 e t_2. Poiché tutti gli altri coefficienti della funzione obbiettivo restano negativi, questa soluzione di base (intesa come partizionamento tra la variabili in base e quelle fuori base) rimarrá sempre ottima. Dobbiamo solo andare a studiare per quali valori di t_3 e t_2 essa resti ammissibile. Imponiamo quindi le tre condizioni di ammissibilitá $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$, $k_3 \geq 0$. Otteniamo che t_3 puó crescere a piacere (ossia non ci sono limiti all'acquisto in risorsa 1 al suo prezzo ombra) mentre $t_2 \leq 9$ (ossia oltre le 9 unitá extra in risorsa 2 il valore marginale di quella risorsa diminuisce). Piú precisamente $t_2 \leq 9 + t_3$.

Problema 5 (10 punti):
Con riferimento al seguente problema di PL

$$\max\ 5\,x_{A1} + 6\,x_{A2} + 5\,x_{A3} + 2\,x_{B1} + 1\,x_{B2} + 1\,x_{B3} + 2\,x_{C1} + 2\,x_{C2} + 2\,x_{C3}$$
$$\begin{cases} x_{L1} + \ \ x_{L2} + \ \ x_{L3} \ \leq \ 1 \text{ per } L = A, B, C \\ x_{Ai} + \ \ x_{Bi} + \ \ x_{Ci} \ \leq \ 1 \text{ per } i = 1, 2, 3 \\ x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{C1}, x_{C2}, x_{C3} \geq 0 \end{cases}$$

dai nostri executive managers ci sono state proposte le seguenti soluzioni:
(s1) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A1} = x_{B2} = x_{C3} = 1$
(s2) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A3} = x_{B2} = x_{C1} = 1$;
(s3) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A1} = x_{B1} = x_{C3} = 1$
(s4) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A2} = x_{B1} = x_{C3} = 1$;
(s5) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A2} = x_{B3} = x_{C1} = 1$
(s6) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A3} = x_{A1} = x_{C2} = 1$;
(s7) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A3} = x_{B1} = x_{C2} = 1$
(s8) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A3} = x_{B1} = x_{C2} = -1$;
(s9) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A2} = x_{B1} = 1$
(s10) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A2} = x_{C3} = 1$;
(s11) $x \equiv 0$ eccetto $x_{C3} = 2$
(s12) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A1} = x_{B2} = 1$.

5.1(1pt) Determinare quali siano ammissibili.

5.2(2pt) Determinare se una delle soluzioni proposte sia ottima (siate un minimo furbi: non potete farvi gli scarti complementari per ciascuna delle soluzioni proposte).

5.3(1pt) Fornire certificato di ottimalità.

5.4(2pt) Per ciascuno dei 6 vincoli, specificare quanto saremmo disposti a pagare per incrementare l'availability su quel vincolo.

5.5(2pt) Dire quali soluzioni siano di base.

5.6(2pt) Dire quali delle soluzioni di base proposte siano adiacenti (raggiungibili con un solo pivot) dalla s1.

Le soluzioni proposte sono tutte ammissibile eccetto

(s3) che viola la seconda famiglia di vincoli,

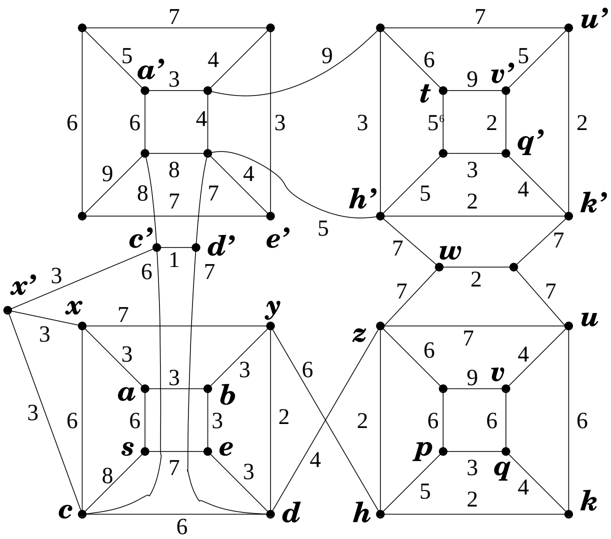
(s6) che viola la prima famiglia di vincoli.

(s11) che viola entrambe le famiglie di vincoli.

(s8) che viola i vincoli di non-negativitá.

É facile verificare per sostituzione nella funzione obbiettivo che la soluzione ammissibile tra quelle proposte che totalizza più di tutte (le altre proposte) é la (s4). Pertanto, giocheremo gli scarti complementari per la (s4). Cosí' facendo si scopre che la (s4) é effettivamente ottima e se ne ottiene certificato di ottimalitá.

Problema 5 (18 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

5.2.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'c$ con un arco $c'x$ e l'arco $d'd$ con un arco $d'y$ è planare oppure no. Se non planare, rimuovere il minimo numero di archi per planarizzarlo.

5.3.**(1+1+1pt)** Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no. Ove non bipartito, rimuovere il minimo numero di archi per bipartizzarlo.

5.4.**(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

5.5.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.6.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.7.**(2pt)** Per i seguenti archi dire, certificandolo, in quale categoria ricadano (contenuti in ogni/nessuna/qualcuna-ma non-tutte le soluzioni ottime): zu, $h'w$, xx'.

5.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

L'unica domanda che risulta decisamente nuova é la (5.7) ed é bene che io la svolga per illustrare come andava ben affrontata (quale sia la tipologia dei certificati).

zu contenuto in nessuna soluzione ottima in quanto arco di peso strettamente massimo nel ciclo $zhku$.

$h'w$ contenuto in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio che separa gli 8 nodi dei due cubi in alto da tutti gli altri nodi sotto, ma non contenuto in tutte in quanto arco di peso massimo nel ciclo $wzdd' \bullet h'$.

xx' contenuto in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso strettamente minimo nel taglio che separa x, y, a, b, s, e, d dagli altri nodi del grafo.