Esame di Ricerca Operativa - 22 febbraio 2011
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (7+4+2+1+? punti):

Per il prossimo anno, il piano di produzione della Miraprimule prevede una produzione di d_t unitá di prodotto nel mese t, $t = 1, \ldots, 12$. Ciascun operaio é in grado di produrre k unitá di prodotto in un mese. Lo stipendio mensile di ciascun operaio é pari a s. Assumere e licenziare personale ha dei costi, e precisamente: assumere un operaio costa p, mentre licenziarne uno costa q. Supponendo che inizialmente vi siano g_0 operai, ed assumendo che le assunzioni ed i licenziamenti abbiano luogo solo a inizio mese, vorreste determinare il numero di operai che devono essere presenti durante ciascun mese in modo da riuscire sempre a produrre la domanda richiesta e da minimizzare il costo complessivo (stipendi, assunzioni, licenziamenti).

(7 punti). Riusciresti a mettere a punto un algoritmo di programmazione dinamica che risolva all'ottimo questa tipologia di problema?

(4 punti). Formulare come problema di programmazione lineare o come problema di programmazione lineare intera.

(2 punti). Argomentare il perché sia tutto sommato possibile omettere i vincoli di interezza sulle variabili scelte nella formulazione di cui sopra, ad esempio spiegando (e dimostrando) nel dettaglio come una generica soluzione ammissibile frazionaria possa sempre essere "arrotondata" ad una soluzione intera di costo strettamente minore (purché $s, p, q > 0$).

(1 punto). Se avrai argomentato in modo pulito, saprai dirmi quali delle seguenti condizioni siano sufficienti al concludere che ogni soluzione ottima ritornata dal *linear solver engine* sará di suo intera. Ecco le tre possibilitá che ti chiedo di catalogare:

A. $s, p \geq 0$, $q > 0$;

B. $s \geq 0$, $p, q > 0$;

C. $s > 0$, $p, q \geq 0$.

(+? punti). Se alcune delle condizioni sopra (A, B, o C) non ti appaiono sufficienti, ricevi 1 punto per ogni condizione che fai fuori (dead) con un controesempio.

svolgimento.

Sia $G = \max \left\{ \left\lceil \frac{d_i}{k} \right\rceil \right\}$. Per $\overline{t} = 1, \ldots, 12$, e per $\overline{g} = 0, 1, 2, \ldots, G$, sia $c(\overline{t}, \overline{g})$ il minimo costo che verrebbe speso dal manager che gestisse all'ottimo la situazione se chiamato a dirigere la Miraprimule a partire dal mese $\overline{t}$ ed assumendo che al suo arrivo al timone egli si trovi un parco di $\overline{g}$ operai. Abbiamo definito la famiglia di problemi, e da questo, come tipico della programmazione dinamica, disegue poi tutto. Quindi ripropongo come esercizio che proviate a sviluppare da qui, limitandomi a fornire traccia a quello che deve essere il modo di procedere. Si osservi che tale famiglia di problemi é chiusa rispetto ad induzione. (Si individuino anche i casi base e si specifichi come vanno gestiti). Il numero di problemi diversi ricompresi nella famiglia non sará in genere poi cosí elevato, il che rende efficiente un approccio di programmazione dinamica, lo si visualizzi e, se si vuole, lo si formalizzi. Un'ulteriore nota: A rigore non possiamo dire che il numero di problemi nella famiglia é al piú polinomiale poiché la magnitudo di G dipende dalla magnitudo dei numeri d_i, e non solo dal numero di mesi. Si potrebbe osservare ed argomentare tuttavia che i valori di $\overline{g}$ davvero pertinenti sono al piú quanti sono i d_i in input piú g_0, in questo caso 13. (I soli $\overline{g}$ da considerarsi davvero appartengono tutti all'insieme $G = \{g_0\} \cup \left\{ \left\lceil \frac{d_i}{k} \right\rceil \right\}$. Riesci a vederne il perché? Riesci a dimostrarlo formalmente?). Quindi la programmazione dinamica risulta il modo piú efficiente per gestire questo tipo di problema.

Vediamo ora come si comporta la programmazione lineare (e/o lineare intera).

Le variabili di decisione sono il numero di operai disponibili in ciascun mese, indichiamoli con g_t, $t = 1, \dots, 12$. Per esprimere la funzione obiettivo viene peró comodo introdurre anche altre variabili, benché ridondanti, che rappresentino il numero di unitá di personale assunte e licenziate all'inizio del mese t. Precisamente, A_t e L_t indicano rispettivamente il numero di persone che sono assunte e licenziate all'inizio del mese t. A questo punto, la funzione obiettivo é semplicemente

$$\min \sum_{t=1}^{12} (s\, g_t + p\, A_t + q\, L_t)$$

Veniamo ora ai vincoli. Se nel mese t abbiamo a disposizione g_t unitá di personale, sará possibile produrre fino a kg_t. Per soddisfare la domanda dovrá valere, per ogni t:

$$g_t \geq \frac{d_t}{k}$$

Ora manca solo precisare il legame che lega tra loro le varie variabili g_t, A_t e L_t (esternare quella ridondanza cui si era accennato sopra):

$$g_{t+1} = g_t + A_t - L_t$$

In definitiva, una formulazione completa di PLI sarebbe:

$$\begin{array}{llr}
\min & \sum_{t=1}^{12}(s\, g_t + p\, A_t + q\, L_t) & (1) \\
 g_t \geq \frac{d_t}{k} & t = 1, \dots, 12 & (2) \\
 g_{t+1} = g_t + A_t - L_t & t = 1, \dots, 12 & (3) \\
 g_t \text{ é un numero naturale} & t = 1, \dots, 12 & (4)
\end{array}$$

Vogliamo ora commentare che il Vincolo (4) puó essere rilassato ad un vincolo meno restrittivo dove alle variabili g_t viene solo richiesto di essere non negative. Il manager dirá: ma io non posso assumere $1/3$ di operaio! Niente paura: anche se si imporrá questo vincolo meno restrittivo, ció nonostante le soluzioni restituite dall'LP solver saranno di loro intere. Se cosí, questa riformulazione presenta il vantaggio che il problema si rivela come un problema di PL (e quindi in P, per il quale conosciamo algoritmi risolutivi efficienti) e non un problema di PLI (e quindi NP-completo, no hope).

La differenza é sostanziale; dimostriamolo quindi: mostreremo che nessuna soluzione frazionaria puó essere ottima. Si noti che, assumendo $p, q \geq 0$, allora ogni soluzione (g, A, L) puó essere trasformata in una soluzione di costo non-maggiore dove $A_t \cdot L_t = 0$ per ogni t. (Ossia non ha senso assumere mentre si licenzia). Sapresti come argomentarlo nel dettaglio? Se una soluzione frazionaria risponde a questa struttura (rispetta questa semplice regola) allora, in considerazione del Vincolo (3) dovrá necessariamente proporre un $g_{t'}$ frazionario. Inoltre, limitandoci a soluzioni con questa struttura, é chiaro che il vettore g basta a determinare univocamente l'intera tripla (g, A, L). Sia t' il minimo indice per il quale $g_{t'}$ si presenta frazionario. Si noti che non solo l'aumento, ma nemmeno la riduzione di $g_{t'}$ a $\lfloor g_{t'} \rfloor$, puó portare ad una violazione dei vincoli di tipo (2). Se $g_{t'-1} < g_{t'}$ allora sostituendo $g_{t'}$ con $\lfloor g_{t'} \rfloor$ otteniamo una nuova soluzione ammissibile che, se $s > 0$, presenta costo strettamente inferiore. Sia t'' l'ultimo indice successivo a t' per il quale $g_{t'} = g_{t'+1} = \cdots = g_{t''}$. Si consideri la soluzione ammissibile ottenuta ridefinendo $g_t := \lfloor g_{t'} \rfloor$ per ogni $t = t', t'+1, \dots, t''$. Se questa soluzione non presenta costo strettamente inferiore a quella in esame allora la soluzione ammissibile ottenuta ridefinendo $g_t := \lfloor g_{t'} \rfloor + 1$ per ogni $t = t', t'+1, \ldots, t''$ presenta costo strettamente inferiore a quella in esame.

L'ipotesi che $s > 0$ gioca ovviamente un ruolo cruciale: un controesempio che esclude A. e B. é il seguente: $p = q = 1$, $s = 0$, $g_0 = 0$, due soli mesi con $d_1 = 0$ e $d_2 = 1$, la soluzione frazionaria $g_1 = \frac{1}{2}$, $g_2 = 1$ é ottima.

Problema 2 (4 punti):

Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–8.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	R	·	·	·	·	·	·	•
B	·	·	·	·	•	•	·	·
C	·	·	·	·	·	·	·	·
D	·	·	•	·	·	·	•	·
E	·	·	·	·	•	·	·	·
F	·	·	·	·	·	·	•	·
G	·	·	·	·	•	·	·	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili?

2.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

2.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

2.2 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

2.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–8 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	98	53	26	10	2	2	2	•
B	45	27	16	8	•	•	2	1
C	18	11	8	8	5	3	1	1
D	7	3	•	3	2	2	•	1
E	4	3	2	1	•	2	1	1
F	1	1	1	1	1	1	•	1
G	0	0	0	0	•	1	1	H

Per rispondere alle altre due domande compilo un'ulteriore tabella.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1	1	1	1	1	1	1	$\bullet$
B	1	2	3	4	$\bullet$	$\bullet$	1	1
C	1	3	6	10	10	10	11	12
D	1	4	$\bullet$	10	20	30	$\bullet$	12
E	1	5	5	15	$\bullet$	30	30	42
F	1	6	11	26	26	56	$\bullet$	42
G	1	7	18	44	$\bullet$	56	56	98

Ritrovare il valore 98 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.
L'ultima domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A–1 → G–8	98
B–3 → G–8	16
A–1 → F–6	56
passaggio per D–5	40

Problema 3 (4 punti):
Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = GTCTCACAATGCGTCTA$ e $t = CTAGCAGTCAACGTAT$. Fare lo stesso con alcuni prefissi di s e t.

3.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'C'?

3.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il prefisso $t_9 = CTAGCAGTC$ di t?

3.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il prefisso $s_8 = GTCTCACA$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
termina con 'C'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

s\t	-	c	t	a	g	c	a	g	t	c	a	a	c	g	t	a	t
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
t	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
c	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
t	0	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4
c	0	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
a	0	1	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5
c	0	1	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6
a	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7
a	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	7	7	7	7	7	7
t	0	1	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8
g	0	1	2	3	4	4	5	6	6	6	6	7	7	8	8	8	8
c	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8
g	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	9	9	9	9
t	0	1	2	3	4	5	5	6	7	7	7	7	8	9	10	10	10
c	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	10
t	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	11
a	0	1	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	9	9	10	11	11

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	11	CTCACAACGTA
termina con 'C'	8	CTCACAAC
tra s e t_9	8	CTACAGTC
tra s_8 e t	7	TCTCACA

Problema 4 (5 punti):
Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\min\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2\,x_2 + x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

4.1(2pt) Senza determinare esplicitamente la soluzione ottima, ma comunque certificando la risposta, si vuole sapere se il valore della soluzione ottima sia minore, maggiore, o eguale a 1.

4.2(2pt) Scrivere il problema duale.

4.3(1pt) Fornire certificato immediato (che non richieda riferimento esplicito al duale) per la tua risposta di cui al punto 1.

svolgimento.

La seconda domanda potrebbe di fatto essere un suggerimento su come affrontare il primo punto (nell'ipotesi che l'ottimo sia minore di 1 siamo chiamati ad un ruolo che é quello del duale).

Scriviamo pertanto il duale, e, visto che l'ispezione del primale non ci offre risposte immediate nonostante le ridotte dimensioni del problema, tifiamo un pó anche sul duale in cerca di indicazioni:

$$\max \ \lambda_1 + 2\,\lambda_2$$
$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \ \ \lambda_2 \leq 2 \\ \lambda_1 + \ 2\lambda_2 \leq 3 \\ \lambda_1 \qquad\quad \leq 4 \\ \qquad\quad \lambda_2 \leq 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 \text{ libere in segno.} \end{cases}$$

Nel tifare per il duale, viene naturale spingere sulla λ_2 che nella funzione obiettivo paga maggiormante, e cosí mi salta fuori la soluzione $\lambda_2 = 1$ (di piú non puó per il quarto vincolo) e riesco ancora a farci stare un $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. (Si noti che anche se sprecavo, accontentandomi di $\lambda_1 = 0$, comunque portavo giá 2 a casa in termini di funzione obiettivo, il che bastava a rispondere al primo quesito). Ho la netta sensazione che dal punto di vista del duale ho gestito le cose al meglio, ossia di essere all'ottimo con questa soluzione $\left(\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = 1, \max = \frac{5}{2}\right)$. Per assicurarmene, guardo al mondo dal punto di vista del primale, con in piú il suggerimento scarto-complementare di spingere sulla x_4 (ricordiamo di come la nostra ingordigia di spingere sulla λ_2 sia stata placcata dal quarto vincolo) e di dover tenere di necessitá spente la x_3 e la x_2. Ne disegue $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ e $x_4 = \frac{3}{2}$, con $\max = \frac{5}{2}$ che chiude il cerchio alla botte (anche se non ci pagava nessuno per metterci il coperchio é comunque stato un piacere il farlo along-our-way).

Veniva invece richiesto di fornire un certificato "immediato", ossia il piú possibile nella lingua di Re Artú, o del nostro boss cui meno gliene frega.

Il certificato (valore delle variabili duali sopra reperito), espresso nel modo piú piano, potrebbe essere:

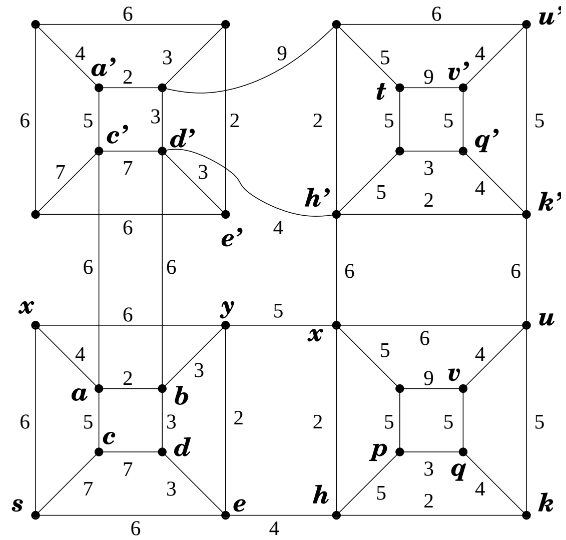
$$\begin{aligned} z &= 2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 + x_4 \\ &\geq \frac{1}{2}(2x_1 + x_2 + x_3) + (x_1 + 2x_2 + x_4) \\ &\geq \frac{1}{2}(1) + (2) = \frac{5}{2}\,. \end{aligned}$$

Resta il discorso che per dimostrare quanto richiesto non si presentava la necessitá di spingere anche sulla λ_1. Allora, forse, al nostro boss cui meno gliene frega consegneremmo:

$$\begin{aligned} z &= 2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 + x_4 \\ &\geq x_1 + 2x_2 + x_4 \\ &\geq 2\,. \end{aligned}$$

come output del nostro umile lavoro, dove la prima diseguaglianza puó essere facilmente giustificata sulla base della non-negativitá delle variabili, e la seconda si giustifica con la richiesta di soddisfare ogni vincolo fornito col problema (primale), incluso il secondo.

Problema 5 (16 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

5.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'a$ con un arco $c'x$ e l'arco $d'b$ con un arco $d'y$ è planare oppure no.

5.3.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no.

5.4.**(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

5.5.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.6.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.7.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.8.**(3pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

risposte. Ormai lo storico di correzioni accumulate su questa tipologia di problemi é ampio, e mi eviteri quindi di comporre lo svolgimento. (Mi trovo coi tempi stretti per fare un buon lavoro, ed invero non ho nulla da aggiungere sul piano metodologico). Credo infatti possa essere importante lasciarvi invece anche degli esercizi per i quali non vi é fornita la soluzione giá fatta, e non conoscete le risposte, sia come stimolo al fare senza indugi, e magari anche al confrontarvi tra di voi, che come palestra alla situazione esistenziale tipica del non avere certezze.