Esame di Ricerca Operativa - 3 febbraio 2011
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (2+1 punti):
Data una sequenza $val_1, val_2, \ldots, val_n$ di valori reali, formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di una sottosequenza strettamente crescente costituita dal massimo possibile numero di elementi (ossia di massima cardinalità). Sapresti formulare come un problema di PLI anche la variante dove invece del numero di elementi presi si fosse interessati a massimizzarne la somma?

svolgimento.
Abbiamo una variabile $x_i \in \{0,1\}$ per $i = 1, 2, \ldots, n$, con l'idea che 1 significa "elemento incluso nella sottosequenza soluzione" e 0 significa "elemento NON incluso nella sottosequenza soluzione".
Volendo massimizzare la cardinalità adotteremo la seguente funzione obiettivo:

$$\max \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Volendo massimizzare la somma dei pesi adotteremo invece la seguente funzione obiettivo:

$$\max \sum_{i=1}^{n} val_i x_i$$

In entrambi i casi, oltre ai vincoli $x_i \in \{0,1\}$ che forzano la scelta binaria sulla presa o meno degli oggetti, avremo un'unica famiglia di vincoli che impone la proprietà di monotonia richiesta:

$$x_i + x_j \leq 1 \text{ per ogni coppia } i, j = 1, 2, \ldots, n \text{ con } i < j \text{ e } val_i \geq val_j.$$

Problema 2 (4 punti):
La ditta Puzzon produce un olio mefitico parzialmente incombusto tra i suoi materiali di scarto. Questo olio viene riutilizzato da tre aziende alimentari: la BonSaori, la TutGrasCheCola, e la ParaZo. Esse richiedono giornalmente le seguenti quantità d'olio (in chili):

BonSaori	TutGrasCheCola	ParaZo
500	800	2900

La ditta Puzzon ha impianti distribuiti in tre diverse regioni e quindi due vasche di raccolta e sedimentazione dell'olio. Da queste due vasche V_1 e V_2 risulta ogni giorno possibile prelevare fino a 1200 e 3100 chili rispettivamente. Trasportare olio da una sorgente ad un'azienda comporta i seguenti costi espressi in (cents/chilo):

	BonSaori	TutGrasCheCola	ParaZo
V_1	10	15	20
V_2	8	14	7

Formulare come un problema di PL il problema di pianificare il trasporto dell'olio alle tre aziende alimentari minimizzando i costi complessivi di trasporto.

svolgimento.
Le variabili di decisione sono la quantità d'olio da inviare dalla generica vasca alla generica azienda, come esplicitamente nominate dalla seguente tabella.

	BonSaori	TutGrasCheCola	ParaZo
S_1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$x_{1,3}$
S_2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$x_{2,3}$

Il problema è quello di minimizzare i costi comportati dal trasporto dell'olio.

$$\min C = 10\,x_{1,1} + 15\,x_{1,2} + 20\,x_{1,3} + 8\,x_{2,1} + 14\,x_{2,2} + 7\,x_{2,3}\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3} \geq 0.$$

vincoli sulla capacitá delle vasche

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} \leq 1200.$$
$$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} \leq 3100.$$

vincoli di fabbisogno

$$x_{1,1} + x_{2,1} \geq 500.$$
$$x_{1,2} + x_{2,2} \geq 800.$$
$$x_{1,3} + x_{2,3} \geq 2900.$$

Problema 3 (4 punti):
Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–8.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	R	·	·	·	·	·	·	•
B	·	•	·	·	•	•	·	·
C	·	·	·	·	·	·	·	·
D	·	·	•	·	·	·	•	·
E	·	·	·	·	•	·	·	·
F	·	·	·	·	·	·	•	·
G	·	·	·	·	•	·	·	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili?

2.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

2.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

2.2 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

2.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–8 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	44	26	26	10	2	2	2	•
B	18	•	16	8	•	•	2	1
C	18	11	8	8	5	3	1	1
D	7	3	•	3	2	2	•	1
E	4	3	2	1	•	2	1	1
F	1	1	1	1	1	1	•	1
G	0	0	0	0	•	1	1	H

Per rispondere alle altre due domande compilo un'ulteriore tabella.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1	1	1	1	1	1	1	•
B	1	•	1	2	•	•	1	1
C	1	1	2	4	4	4	5	6
D	1	2	•	4	8	12	•	6
E	1	3	3	7	•	12	12	18
F	1	4	7	14	14	26	•	18
G	1	5	12	26	•	26	26	44

Ritrovare il valore 44 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.
L'ultima domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A–1 → G–8	44
B–3 → G–8	16
A–1 → F–6	26
passaggio per D–5	16

Problema 4 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = TTCTCACAATGCTTCTA$ e $t = CTATCAGTCAACCTAT$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di s e t.

3.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'A'?

3.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il suffisso $t_9 = TCAACCTAT$ di t?

3.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il suffisso $s_8 = TGCTTCTA$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
parte con 'A'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

```
s\t  c  t  a  t  c  a  g  t  c  a  a  c  c  t  a  t
----------------------------------------------------
t   11 11 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  4  3  2  0
t   11 11 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  4  3  2  0
c   11 10 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  4  3  2  0
t   10 10 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  3  3  2  0
c    9  9  9  9  9  8  7  7  7  6  5  4  3  3  2  0
a    8  8  8  8  8  8  7  7  7  6  5  4  3  3  2  0
c    8  7  7  7  7  7  7  7  7  6  5  4  3  2  2  0
a    7  7  7  6  6  6  6  6  6  6  5  4  3  2  2  0
a    7  7  7  6  6  6  5  5  5  5  5  4  3  2  2  0
t    6  6  6  6  5  5  5  5  4  4  4  4  3  2  1  0
g    6  5  5  5  5  5  5  4  4  4  4  4  3  2  1  0
c    6  5  5  5  5  4  4  4  4  4  4  4  3  2  1  0
t    5  5  5  5  4  4  4  4  3  3  3  3  3  2  1  0
```

t	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	2	1	0	0
c	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	1	0	0
t	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0	0
a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	11	C T C A C A A C C T A
parte con 'A'	8	A C A A C C T A
tra s e t_9	8	T C A A C C T A
tra s_8 e t	6	T G C C T A

Problema 5 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

24	17	19	14	18	34	41	65	17	38	66	21	44	32	59	61	22	20	15	38	63	26	43	55	27

5.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(2pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 22. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

Crescente

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
7	8	7	8	7	6	5	2	6	5	1	5	4	4	3	2	4	4	4	3	1	3	2	1	1
24	17	19	14	18	34	41	65	17	38	66	21	44	32	59	61	22	20	15	38	63	26	43	55	27
1	1	2	1	2	3	4	5	2	4	6	3	5	4	6	7	4	4	2	5	8	5	6	7	5
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

Crescente

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	8	17, 19, 34, 41, 44, 59, 61, 63
Z-sequenza	11	17, 19, 34, 41, 65, 66, 21, 22, 59, 61, 63
crescente con 22	7	14, 17, 21, 22, 38, 43, 55

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga V-sequenza oppure la più lunga V-sequenza (si veda il tema precedente per le definizioni)?

Provare per esercizio a determinare la più lunga V-sequenza.

Problema 6 (8 punti):

$$\max\ 30x_1 - 5x_2 - 3x_3$$
$$\begin{cases} -20x_1 + \ 5x_2 - \ 3x_3 \leq \ 15 \\ \ 10x_1 - \ \ x_2 + \ 2x_3 \leq \ 12 \\ \ 10x_1 - \ 5x_2 + \ \ x_3 \leq -15 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1.1(1pt) Impostare il problema ausiliario.

1.2(2pt) Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

1.3(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

1.4(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

1.5(2pt) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

svolgimento.

Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile "di colla" x_0. Del problema originario ci interessa solamente investigare l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$\max\ -x_0$$
$$\begin{cases} -20x_1 + \ 5x_2 - \ 3x_3 - \ x_0 \leq \ 15 \\ \ 10x_1 - \ \ x_2 + \ 2x_3 - \ x_0 \leq \ 12 \\ \ 10x_1 - \ 5x_2 + \ \ x_3 - \ x_0 \leq -15 \\ x_0, x_1, x_3, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Si ha che il problema originario era ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$\max\ -x_0$$
$$\begin{cases} w_1 = \ 15 + \ 20x_1 - \ 5x_2 + \ x_3 + \ x_0 \\ w_2 = \ 12 - \ 10x_1 + \ x_2 - \ 2x_3 + \ x_0 \\ w_3 = -15 - \ 10x_1 + \ 5x_2 - \ x_3 + \ x_0 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tecnicamente, anche il problema ausiliario non è ad origine ammissibile, ma riusciamo facilmente a procurarci una soluzione di base ammissibile in un singolo pivot: facciamo entrare

x_0 in base settandone il valore a 15 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facciamo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo.

$$\max \ -15 - 10x_1 + 5x_2 - x_3 - w_3$$
$$\begin{cases} w_1 = 30 + 30x_1 - 10x_2 + 4x_3 + w_3 \\ w_2 = 27 - 4x_2 - x_3 + w_3 \\ x_0 = 15 + 10x_1 - 5x_2 + x_3 + w_3 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione di base attuale non è ancora ottima: il coefficiente della x_2 nella funzione obiettivo vale $5 > 0$, quindi portiamo la x_2 in base. Ad arrestare la crescita della x_2 sono la x_0 e la w_1 che si annullano entrambe contemporaneamente per $x_2 = 3$. In situazioni come questa, per fare posto in base alla x_2 conviene portare fuori base la x_0 dato che essa ormai si annulla (il problema originario era cioè ammissibile dacchè basta zero colla). Effettuiamo questo ultimo pivot per il problema ausiliario avendo cura di portare la x_0 fuori base non appena essa si annulla così che un dizionario ammissibile per il problema originario potrà essere facilmente ottenuto.

$$\max \ -x_0$$
$$\begin{cases} w_1 = 10x_1 + 2x_3 - w_3 + 2x_0 \\ w_2 = 15 - 8x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_3 + \frac{4}{5}x_0 \\ x_2 = 3 + 2x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_3 - \frac{1}{5}x_0 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

Ora che x_0 è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla x_0 per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario. In tale dizionario, la scrittura per la funzione obiettivo è stata ottenuta partendo dalla funzione obiettivo originaria ed utilizzando le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base.

$$\max \ 30x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -15 + 20x_1 - 4x_3 - w_3$$
$$\begin{cases} w_1 = 10x_1 + 2x_3 - w_3 \\ w_2 = 15 - 8x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_3 \\ x_2 = 3 + 2x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_3 \\ x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della x_1 nella funzione obiettivo è positivo. Portano in base x_1 esce w_2 ed otteniamo il seguente dizionario.

$$\max \ \frac{45}{2} - \frac{5}{2}w_2 - \frac{17}{2}x_3 - \frac{1}{2}w_3$$
$$\begin{cases} w_1 = \frac{75}{4} - \frac{5}{4}w_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}w_3 \\ x_1 = \frac{15}{8} - \frac{1}{8}w_2 - \frac{9}{40}x_3 + \frac{1}{40}w_3 \\ x_2 = \frac{27}{4} - \frac{1}{4}w_2 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}w_3 \\ x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia ora ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi) e quindi in questo caso non sono necessari ulteriori passi di pivot.

In termini delle variabili di decisione originarie la soluzione ottima è data da $x_1 = \frac{15}{8}$, $x_2 = \frac{27}{4}$, $x_3 = 0$ cui corrisponde un valore di $\frac{45}{2}$ per la funzione obiettivo. É facile verificare che tale soluzione risulta in effetti ammissibile per il problema originario (sostituzione) e che sommando il secondo vincolo moltiplicato per $\frac{5}{2}$ (perché questo valore?) ed il terzo vincolo per $\frac{1}{2}$ (perché questo valore?) si scopre che nessuna soluzione ammissibile puó totalizzare piú di $\frac{45}{2}$. Quindi le soluzioni (primale e duale) offerte dall'ultimo dizionario si autocertificano.

Per ogni unità di incremento del termine noto del secondo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{5}{2}$ (almeno per piccoli incrementi). Per ogni unità di incremento del termine noto del terzo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{1}{2}$ (almeno per piccoli incrementi). Non saremmo invece disposti a pagare nulla per incrementare il termine noto del primo vincolo.

Per capire fino a dove saremmo disposti a pagare tali prezzi ombra devo ricomputare l'ultimo dizionario sotto l'assunzione che la quantitá di risorsa disponibile sul secondo vincolo sia $12 + t_2$ (invece di 12) e che la quantitá di risorsa disponibile sul terzo vincolo sia $-15 + t_3$ (invece di -15). Pertanto solo due valori del problema originale (solo due valori della colonna dei termini noti del problema iniziale) sono ora cambiati. Mi interessa comprendere come i vari valori dell'ultimo dizionario vadano riveduti. Poiché il dizionario finale é stato ottenuto dal dizionario iniziale tramite dei passi di pivot, che altro non sono che operazioni di riga (moltiplicare una riga per uno scalare od aggiungere un multiplo di una riga ad un'altra), ne consegue che solo i valori della colonna k dei termini noti vanno eventualmente rivisti. Per ricomputarli in modo agevole (senza ripercorrere i vari passi) mi avvalgo della "prova del nove" del tableau e riconsidero quindi l'ultimo dizionario cui si era pervenuti dando per incogniti i valori K, k_2, k_3 e k_1 della colonna k dei termini noti

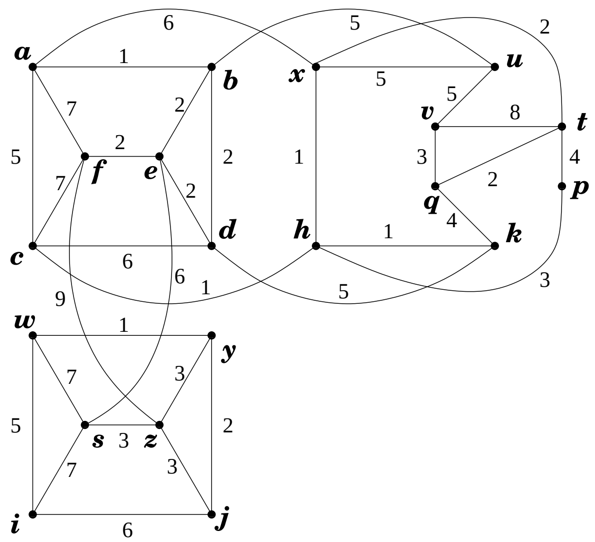
$$\begin{array}{cccccc} & k & w_3 & w_2 & x_3 \\ z & K & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{17}{2} \\ w_1 & k_1 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ x_1 & k_2 & \frac{1}{40} & -\frac{1}{8} & -\frac{9}{40} \\ x_2 & k_3 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}$$

con la soluzione di base iniziale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $z = 0$, $w_1 = 15$, $w_2 = 12 + t_2$, $w_3 = -15 + t_3$ come associata al tableau iniziale del problema modificato (il tableau di definizione delle variabili di slack). Si perviene cosí alle seguenti equazioni di controllo:

$$\begin{array}{rcl} (0) & = & K - \frac{1}{2}(t_3 - 15) - \frac{5}{2}(t_2 + 12) - \frac{17}{2}(0) \longrightarrow K = \frac{45}{2} + \frac{5}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_3 \\ (0) & = & k_1 - \frac{3}{4}(t_3 - 15) - \frac{5}{4}(t_2 + 12) - \frac{1}{4}(0) \longrightarrow k_1 = \frac{75}{4} + \frac{5}{4}t_2 + \frac{3}{4}t_3 \\ (0) & = & k_2 + \frac{1}{40}(t_3 - 15) - \frac{1}{8}(t_2 + 12) - \frac{9}{40}(0) \longrightarrow k_2 = \frac{15}{8} + \frac{1}{8}t_2 - \frac{1}{40}t_3 \\ (0) & = & k_3 + \frac{1}{4}(t_3 - 15) - \frac{1}{4}(t_2 + 12) - \frac{1}{4}(0) \longrightarrow k_3 = \frac{27}{4} + \frac{1}{4}t_2 - \frac{1}{4}t_3 \end{array}$$

La prima equazione (valore di K) conferma l'interpretazione economica (prezzi ombra) delle variabili duali esprimendo il valore della funzione obbiettivo per quella soluzione di base al variare di t_2 e t_3. Poiché tutti gli altri coefficienti della funzione obbiettivo restano negativi, questa soluzione di base (intesa come partizionamento tra la variabili in base e quelle fuori base) rimarrá sempre ottima. Dobbiamo solo andare a studiare per quali valori di t_2 e t_3 essa resti ammissibile. Imponiamo quindi le tre condizioni di ammissibilitá $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$, $k_3 \geq 0$. Otteniamo che t_2 puó crescere a piacere (ossia non ci sono limiti all'acquisto in risorsa 1 al suo prezzo ombra) mentre $t_3 \leq 27$ (ossia oltre le 27 unitá extra in risorsa 2 il valore marginale di quella risorsa diminuisce). Piú precisamente $t_3 \leq 27 + t_2$.

Problema 7 (14 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

5.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo ottenuto da G sostituendo l'arco hx con un arco qx è planare oppure no.

5.3.**(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

5.4.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

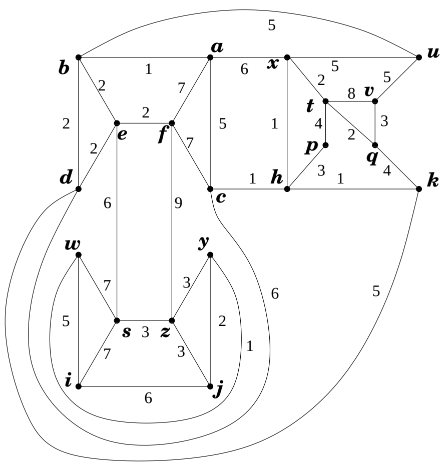
5.5.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.6.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

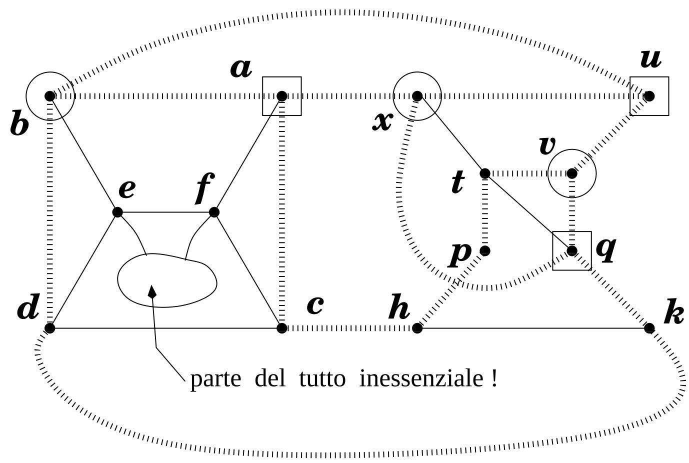
5.7.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

5.8.**(1+1pt)** Fornire (con certificato di ottimalità) il flusso massimo dal nodo s al nodo q.

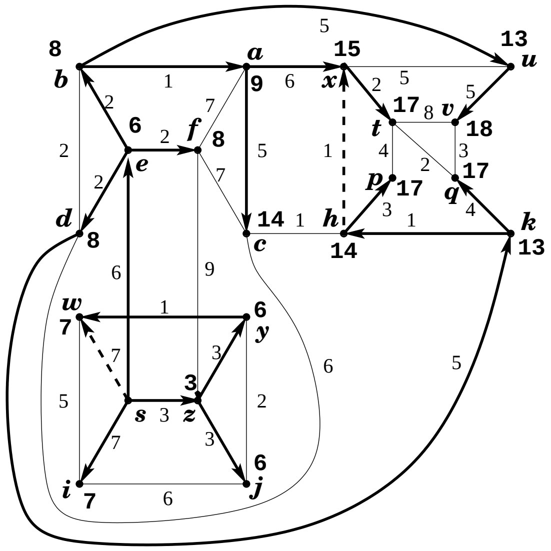
risposte.
Il fatto che G sia planare è messo in evidenza dal planar embedding fornito in figura.



Per la ricerca di alberi ricoprenti di peso minimo e di flussi massimi converrà lavorare sul planar embedding. E forse anche per osservare che il grafo modificato non è planare. Il certificato è la suddivisione del $K_{3,3}$ esibita in figura.

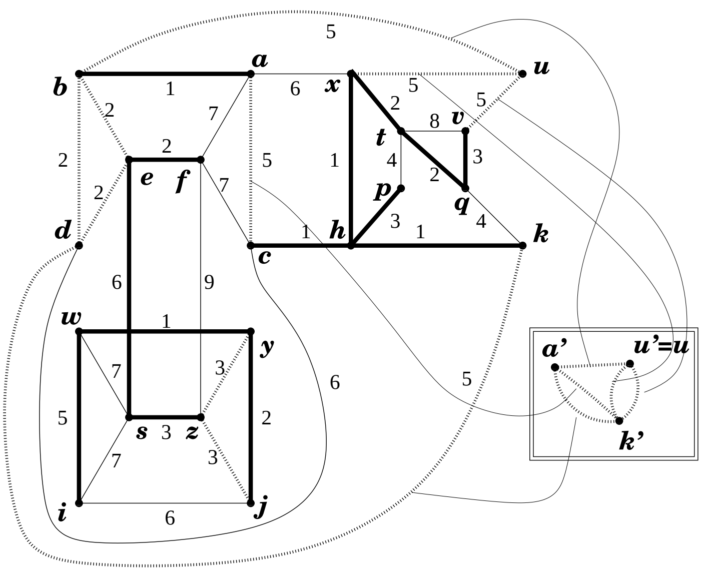


Un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo è rappresentato in figura dagli archi in linea spessa (sia tratteggiata che continua).

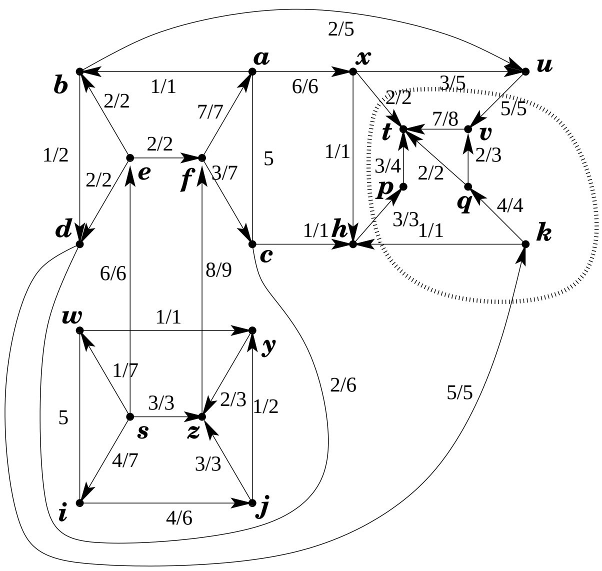


Ovviamente ogni arco del grafo non contenuto nell'albero dei cammini minimi (ossia ogni arco in linea non spessa) può essere rimosso senza allontanare alcun nodo dal nodo s. Inoltre, anche i tre archi in linea spessa ma tratteggiata possono essere rimossi poichè sostituibili con altri archi (sempre in linea tratteggiata). Ci sono quindi $2^3 = 8$ alberi di cammini minimi dal nodo s: sono ottenuti aggiungendo all'albero fornito sopra un qualsiasi sottoinsieme dell'insieme di archi in linea tratteggiata e rimuovendo quegli archi in linea spessa che si trovino ad entrare in nodi dove ora entra un arco in linea tratteggiata.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 3 \cdot 8 = 48$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 14 archi in linea spessa e nera, più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 2 in linea spessa e sfumata (2 scelte), più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 3 in linea spessa e sfumata (3 scelte), più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 5 ed in linea sfumata spessa nella parte alta (2 scelte), più 2 dei 5 archi di peso 5 ed in linea sfumata spessa (8 possibili scelte che possono essere meglio comprese se collassiamo le componenti connesse in macronodi come illustrato in figura.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 12 e satura l'insieme degli archi (due soli archi) che attraversano la curva sfumata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 2 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 12 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto. (Sia il flusso che il taglio sarebbero stati più immediati a vedersi e verificarsi nel planar embedding. Puoi provare a rappresentarteli lì).

Il massimo flusso da s a q a valore 9 e la stella di q è un taglio che ne certifica l'ottimalitá. A parte questa strozzatura, vi è altrimenti ampio margine nell'inviare flusso da s a q ed evitiamo quindi di fornire descrizione di una tale soluzione ammissibile di valore 9 (cosa che ovviamente voi non potete mai fare: se volete totalizzare i rispettivi punti dovete innanzitutto fronirmi le soluzioni/certificati!). Essa può comunque essere facilmente prodotta con ovvie modifiche partendo dal flusso di valore 12 dato in figura.