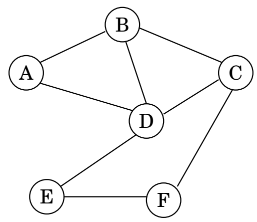
Esame di Ricerca Operativa - 28 giugno 2010
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (2+2 punti):

Un MATCHING in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme di archi $M \subseteq E$ tale che ogni nodo in V è estremo di al più un arco in M. Un matching di G è detto massimale se non esiste un altro matching di G che lo contenga propriamente.

Ad esempio, $\{AB, DE\}$ e $\{DC, EF\}$ sono due matchings non-massimali mentre $\{BC, DE\}$ e $\{AB, DE, CF\}$ sono due matchings massimali per il grafo G in figura.

Quando ad ogni arco e è associato un costo w_e, allora il costo di $X \subseteq E$ è espresso da $val(X) := \sum_{e \in X} w_e$.



	AB	AD	BC	BD	CD	CF	DE	EF
Costo	12	13	15	14	11	16	17	18

Nelle applicazioni siamo solitamente interessati a trovare matching massimali di costo minimo.

Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo per il grafo G in figura.

Mostrare come sia più in generle possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo su un grafo $G = (V, E)$ generico.

svolgimento.

Abbiamo una variabile $x_i \in \{0, 1\}$ per $i = AB, AD, BC, BD, CD, CF, DE, EF$, con l'idea che 1 significa "arco incluso nel matching massimale" e 0 significa "arco non incluso nel matching massimale".

Volendo minimizzare il costo del matching massimale, la funzione obbiettivo sarà:

$$\min 12\, x_{AB} + 13\, x_{AD} + 15\, x_{BC} + 14\, x_{BD} + 11\, x_{CD} + 16\, x_{CF} + 17\, x_{DE} + 18\, x_{EF}$$

Abbiamo due insiemi di vincoli.

matching. Dobbiamo imporre che la soluzione sia un matching. Predisponiamo dei vincoli che corrispondono ai nodi.

nodo A: $x_{AB} + x_{AD} \leq 1$;

nodo B: $x_{AB} + x_{BC} + x_{BD} \leq 1$;

nodo C: $x_{BC} + x_{CD} + x_{CF} \leq 1$;

nodo D: $x_{AD} + x_{BD} + x_{CD} + x_{DE} \leq 1$;

nodo E: $x_{DE} + x_{EF} \leq 1$;

nodo F: $x_{EF} + x_{CF} \leq 1$.

massimalità. Dobbiamo imporre che il matching sia massimale. Predisponiamo dei vincoli che corrispondono agli archi.

arco AB**:** $x_{AB} + x_{AD} + x_{BC} + x_{BD} \geq 1$;

arco AD**:** $x_{AD} + x_{AB} + x_{BD} + x_{CD} + x_{DE} \geq 1$;

arco BD**:** $x_{BD} + x_{AB} + x_{BC} + x_{AD} + x_{CD} + x_{DE} \geq 1$;

arco BC**:** $x_{BC} + x_{AB} + x_{BD} + x_{CD} + x_{CF} \geq 1$;

arco CD**:** $x_{CD} + x_{BC} + x_{CF} + x_{AD} + x_{BD} + x_{DE} \geq 1$;

arco CF**:** $x_{CF} + x_{BC} + x_{CD} + x_{EF} \geq 1$;

arco DE**:** $x_{DE} + x_{AD} + x_{BD} + x_{CD} + x_{EF} \geq 1$;

arco EF**:** $x_{EF} + x_{DE} + x_{CF} \geq 1$.

Nel caso di un grafo $G = (V, E)$ generico introduciamo una variabile $x_{uv} \in \{0, 1\}$ per ogni arco $uv \in E$, con l'idea che 1 significa "arco incluso nel matching massimale" e 0 significa "arco non incluso nel matching massimale".

Otteniamo quindi la seguente formulazione PLI per il problema del MAXIMAL-MATCHING di costo minimo.

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{uv \in E} C_{uv} x_{uv}\,, \\
\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \text{ per ogni nodo } v \in V, \\
x_{uv} + \sum_{e \in \delta(u) \setminus \{uv\}} + \sum_{e \in \delta(v) \setminus \{uv\}} \geq 1 \text{ per ogni arco } uv \in E, \\
x_{uv} \in \{0, 1\} \text{ per ogni arco } uv \in E.
\end{aligned}
$$

Problema 2 (4 punti):

La rete idrica del basso Tagliamento deve soddisfare il fabbisogno di tre centri abitati che richiedono giornalmente la seguente quantità d'acqua (in Gigalitri):

Flaibano	Sedegliano	Codroipo
50	80	290

I tre centri possono essere riforniti da due sorgenti S_1 e S_2, aventi capacità giornaliera di 160 e 310 Gl rispettivamente. Trasportare acqua da una sorgente a un centro comporta le perdite indicate nella seguente tabella (hl/Gl)

	Flaibano	Sedegliano	Codroipo
S_1	10	15	20
S_2	8	14	7

Formulare come PL il problema di pianificare il trasporto d'acqua ai tre centri abitati minimizzando le perdite. Si tenga presente che l'acquedotto dalla sorgente S_1 verso Codroipo porta massimo 150 Gl al giorno.

svolgimento.

Le variabili di decisione sono la quantità d'acqua da far pervenire lungo i vari aquedotti, definite come da seguente tabella.

	Flaibano	Sedegliano	Codroipo
S_1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$x_{1,3}$
S_2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$x_{2,3}$

Il problema è quello di minimizzare la dissipazione totale d'acqua.

$$\min C = 10\,x_{1,1} + 15\,x_{1,2} + 20\,x_{1,3} + 8\,x_{2,1} + 14\,x_{2,2} + 7\,x_{2,3}\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3} \geq 0.$$

vincoli di capacitá degli aquedotti

$$x_{1,3} \leq 150.$$

vincoli sulla capacitá delle sorgenti

$$\begin{aligned} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} &\leq 160. \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} &\leq 310. \end{aligned}$$

vincoli di fabbisogno

$$\begin{aligned} x_{1,1} + x_{2,1} &\geq 50. \\ x_{1,2} + x_{2,2} &\geq 80. \\ x_{1,3} + x_{2,3} &\geq 290. \end{aligned}$$

Problema 3 (4 punti):

Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–8.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	R	·	·	·	·	·	•	·
B	·	·	·	•	•	·	·	·
C	·	·	·	·	·	·	·	·
D	·	•	·	·	·	•	·	·
E	·	·	·	•	·	·	·	·
F	·	·	·	·	·	·	·	·
G	·	·	·	•	·	·	·	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili?

2.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

2.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

2.2 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

2.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–8 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	257	128	50	11	11	11	•	1
B	129	78	39	•	•	11	6	1
C	51	39	39	25	15	5	5	1
D	12	•	14	10	10	•	4	1
E	12	8	4	•	10	6	3	1
F	4	4	4	4	4	3	2	1
G	0	0	0	•	1	1	1	1

Per rispondere alle altre due domande compilo un'ulteriore tabella.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1	1	1	1	1	1	•	0
B	1	2	3	•	•	1	1	1
C	1	3	6	6	6	7	8	9
D	1	•	6	12	18	•	8	17
E	1	1	7	•	18	18	26	43
F	1	2	9	9	27	45	71	114
G	1	3	12	•	27	72	143	257

Ritrovare il valore 257 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.

L'ultima domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A–1 $\rightarrow$ G–8	257
B–3 $\rightarrow$ G–8	39
A–1 $\rightarrow$ F–6	45
passaggio per D–5	180

Problema 4 (4 punti):
Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = CCACAGAGGCTACCACG$ e $t = ACGCAGTCAGGAACGC$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di s e t.

3.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'G'?

3.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il suffisso $t_9 = CAGGAACGC$ di t?

3.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il suffisso $s_8 = CTACCACG$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
parte con 'G'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

```
s\t  a  c  g  c  a  g  t  c  a  g  g  a  a  c  g  c
----------------------------------------------------
c   11 11 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  4  3  2  0
c   11 11 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  4  3  2  0
a   11 10 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  4  3  2  0
c   10 10 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  3  3  2  0
a    9  9  9  9  9  8  7  7  7  6  5  4  3  3  2  0
g    8  8  8  8  8  8  7  7  7  6  5  4  3  3  2  0
a    8  7  7  7  7  7  7  7  7  6  5  4  3  2  2  0
g    7  7  7  6  6  6  6  6  6  6  5  4  3  2  2  0
g    7  7  7  6  6  6  5  5  5  5  5  4  3  2  2  0
c    6  6  6  6  5  5  5  5  4  4  4  4  3  2  1  0
```

t	6	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	3	2	1	0
a	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	2	1	0
c	5	5	5	5	4	4	4	4	3	3	3	3	3	2	1	0
c	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	2	1	0	0
a	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	1	0	0
c	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0	0
g	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	11	A C A G A G G A A C G
parte con 'G'	8	G A G G A A C G
tra s e t_9	8	C A G G A A C G
tra s_8 e t	6	C T A A C G

Problema 5 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

15	8	10	5	9	25	32	56	8	29	57	12	35	23	50	52	13	11	6	29	54	17	34	46	18

5.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(2pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 13. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

CRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
7	8	7	8	7	6	5	2	6	5	1	5	4	4	3	2	4	4	4	3	1	3	2	1	1
15	8	10	5	9	25	32	56	8	29	57	12	35	23	50	52	13	11	6	29	54	17	34	46	18
1	1	2	1	2	3	4	5	2	4	6	3	5	4	6	7	4	4	2	5	8	5	6	7	5
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

CRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	8	8, 10, 25, 32, 35, 50, 52, 54
Z-sequenza	11	8, 10, 25, 32, 56, 57, 12, 23, 50, 52, 54
crescente con 13	7	5, 8, 12, 13, 29, 34, 46

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga V-sequenza oppure la più lunga V-sequenza (si veda il tema precedente per le definizioni)?

Provare per esercizio a determinare la più lunga V-sequenza.

Problema 6 (6 punti):

Si consideri la soluzione $x_5 = x_6 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 7$, $x_4 = 5$ del seguente problema.

$$\max\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 11x_4 + C_5x_5 + C_6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 18 \\ x_4 + x_5 \leq 5 \\ x_3 + x_6 \leq 7 \\ x_1 + x_3 + x_5 \leq 10 \\ x_2 + x_4 + x_6 \leq \frac{15}{2} \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

1.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

1.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

1.3.**(1pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

1.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

1.5.**(2pt)** Per quali valori dei parametri C_5 e C_6 la soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

svolgimento. Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$\begin{cases} (3) + \left(\frac{5}{2}\right) + (7) + (5) + (0) + (0) = \frac{35}{2} \leq 18 \\ (5) + (0) = \mathbf{5} \leq 5 \\ (7) + (0) = \mathbf{7} \leq 7 \\ (3) + (7) + (0) = \mathbf{10} \leq 10 \\ \left(\frac{5}{2}\right) + (5) + (0) = \mathbf{\frac{15}{2}} \leq \frac{15}{2} \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente.

$$\min\ 18\,y_1 + 5\,y_2 + 7\,y_3 + 10\,y_4 + \frac{15}{2}\,y_5$$
$$\begin{cases} y_1 + y_4 \geq 1 \\ y_1 + y_5 \geq 7 \\ y_1 + y_3 + y_4 \geq 6 \\ y_1 + y_2 + y_5 \geq 11 \\ y_1 + y_2 + y_4 \geq C_5 \\ y_1 + y_3 + y_5 \geq C_6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

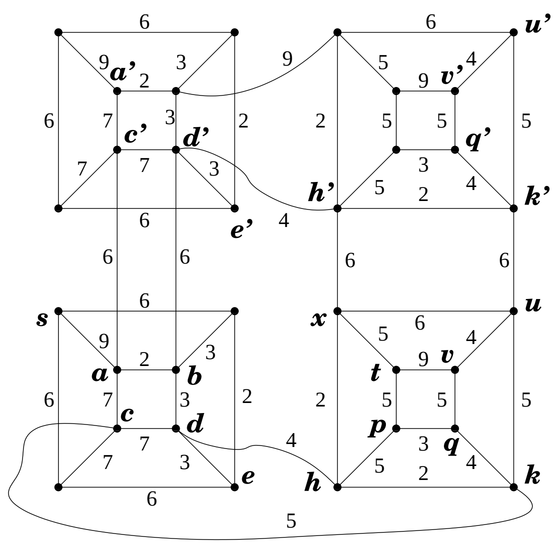
Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_1 = 0$ poichè il vincolo 1 del primale non è soddisfatto ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$, i vincoli 1,2,3 e 4 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} & & + & y_4 & & = & 1 \\ & & & & + \; y_5 & = & 7 \\ & y_3 & + & y_4 & & = & 6 \\ y_2 & & & & + \; y_5 & = & 11 \end{array}\right.$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $(0, 4, 5, 1, 7)$. Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. È evidente che tutte le variabili assumono valore non negativo, ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 5 e 6).

La soluzione primale assegnata sarà ottima se e solo se la soluzione duale ad essa complementare soddisfa tutti i vincoli, ed in particolare anche i vincoli 5 e 6, ossia se vale che $y_2 + y_4 = 5 \geq C_5$ (quinto vincolo) e $y_3 + y_5 = 12 \geq C_6$ (sesto vincolo). Possiamo concludere che la soluzione primale assegnata **è ottima se e solo se** $C_5 \leq 5$ e $C_6 \leq 12$.

Problema 7 (14 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

5.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo ottenuto da G sostituendo l'arco $h'x$ con un arco $q'x$ è planare oppure no.

5.3.**(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

5.4.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

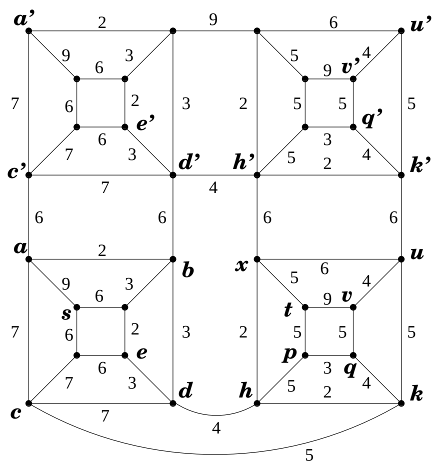
5.5.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.6.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

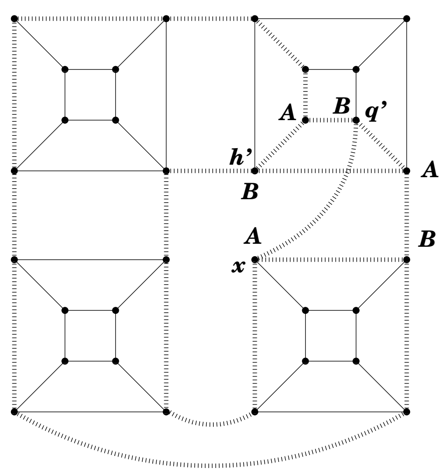
5.7.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

5.8.**(1+1pt)** Fornire (con certificato di ottimalità) il flusso massimo dal nodo s al nodo q.

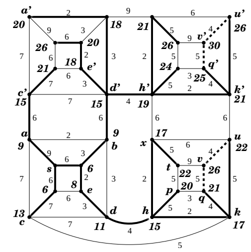
risposte.
Il fatto che G sia planare è messo in evidenza dal planar embedding fornito in figura.



Per la ricerca di alberi ricoprenti di peso minimo e di flussi massimi converrà lavorare sul planar embedding. E forse anche per osservare che il grafo modificato non è planare. Il certificato è la suddivisione del $K_{3,3}$ esibita in figura.

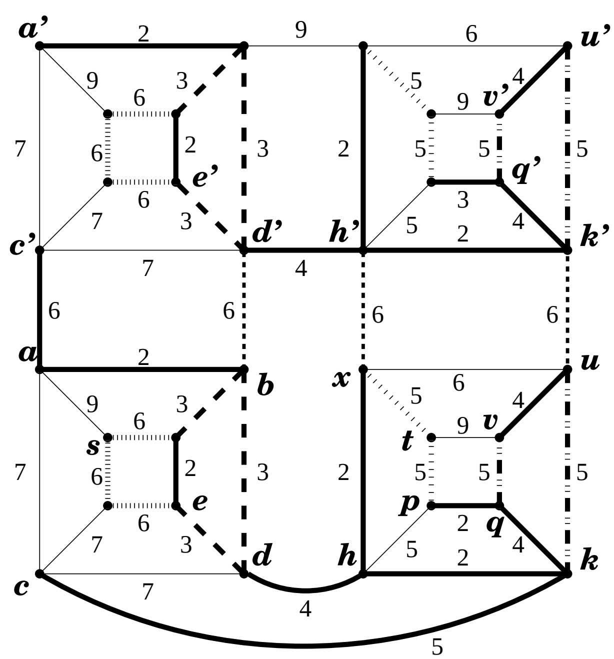


Un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo è rappresentato in figura dagli archi in linea spessa (sia tratteggiata che continua).

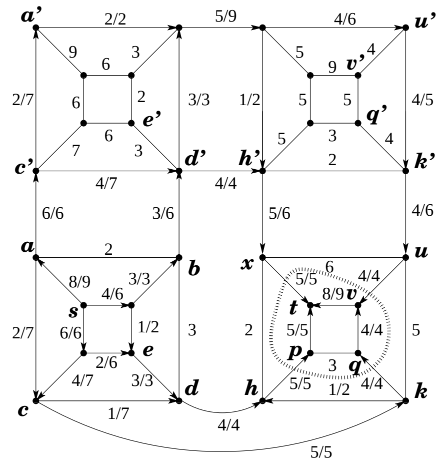


Ovviamente ogni arco del grafo non contenuto nell'albero dei cammini minimi (ossia ogni arco in linea non spessa) può essere rimosso senza allontanare alcun nodo dal nodo s. Inoltre, anche i due archi in linea spessa ma tratteggiata possono essere rimossi poichè sostituibili con altri archi (sempre in linea tratteggiata). Ci sono quindi $2^2 = 4$ alberi di cammini minimi dal nodo s.

La seguente figura, con due quadrati affiancati nella parte alta e due nella parte passa, esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2^4 3^5$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 17 archi in linea spessa, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 3 ed in linea tratteggiata nella parte alta (3 scelte), più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 3 ed in linea tratteggiata nella parte bassa (3 scelte), più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 6 ed in linea sfumata spessa nella parte alta (3 scelte), più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 6 ed in linea sfumata spessa nella parte bassa (3 scelte), più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 5 ed in linea sfumata spessa (più sfumata) nella parte alta (2 scelte), più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 5 ed in linea sfumata spessa (più sfumata) nella parte bassa (2 scelte), più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 5 ed in linea tratto-punteggiata nella parte alta (2 scelte), più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 5 ed in linea tratto-punteggiata nella parte bassa (2 scelte), più 1 qualsiasi dei 3 archi verticali di peso 6 e che collegamo parte bassa e parte alta (3 scelte).



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 14 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 5 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 14 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto. (Sia il flusso che il taglio sarebbero stati più immediati a vedersi e verificarsi nel planar embedding. Puoi provare a rappresentarteli lì).

Il massimo flusso da s a q a valore 12 e la stella di q è un taglio che ne certifica l'ottimalitá. A parte questa strozzatura, vi è altrimenti ampio margine nell'inviare flusso da s a q ed evitiamo quindi di fornire descrizione di una tale soluzione ammissibile di valore 12 (cosa che ovviamente voi non potete mai fare: se volete totalizzare i rispettivi punti dovete innanzitutto fronirmi le soluzioni/certificati!).