Esame di Ricerca Operativa - 25 maggio 2010
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (8 punti):

$$\max\ 30x_1 - 5x_2 - 3x_3$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ 10x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -10 \\ -20x_1 + 5x_2 - 3x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1.1(1pt) Impostare il problema ausiliario.

1.2(2pt) Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

1.3(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

1.4(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

1.5(2pt) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

svolgimento.

Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile "di colla" x_0. Del problema originario ci interessa solamente investigare l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$\max\ -x_0$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 - x_0 \leq 8 \\ 10x_1 - 5x_2 + x_3 - x_0 \leq -10 \\ -20x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_0 \leq 10 \\ x_0, x_1, x_3, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Si ha che il problema originario era ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$\max\ -x_0$$
$$\begin{cases} w_1 = 8 - 10x_1 + x_2 - 2x_3 + x_0 \\ w_2 = -10 - 10x_1 + 5x_2 - x_3 + x_0 \\ w_3 = 10 + 20x_1 - 5x_2 + x_3 + x_0 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tecnicamente, anche il problema ausiliario non è ad origine ammissibile, ma riusciamo facilmente a procurarci una soluzione di base ammissibile in un singolo pivot: facciamo entrare x_0 in base settandone il valore a 10 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facciamo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo.

$$\max\ -10 - 10x_1 + 5x_2 - x_3 - w_2$$
$$\begin{cases} w_1 = 18 - 4x_2 - x_3 + w_2 \\ x_0 = 10 + 10x_1 - 5x_2 + x_3 + w_2 \\ w_3 = 20 + 30x_1 - 10x_2 + 4x_3 + w_2 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione di base attuale non è ancora ottima: il coefficiente della x_2 nella funzione obiettivo vale $5 > 0$, quindi portiamo la x_2 in base. Ad arrestare la crescita della x_2 sono la x_0 e la w_3 che si annullano entrambe contemporaneamente per $x_2 = 2$. In situazioni come questa, per fare posto in base alla x_2 conviene portare fuori base la x_0 dato che essa ormai si annulla (il problema originario era cioè ammissibile dacchè basta zero colla). Effettuiamo questo ultimo pivot per il problema ausiliario avendo cura di portare la x_0 fuori base non appena essa si annulla così che un dizionario ammissibile per il problema originario potrà essere facilmente ottenuto.

$$
\begin{array}{l}
\max \ -x_0 \\
\left\{\begin{array}{rcrrrrr}
w_1 & = & 10 - & 8x_1 - & \frac{9}{5}x_3 + & \frac{1}{5}w_2 + & \frac{4}{5}x_0 \\
x_2 & = & 2 + & 2x_1 + & \frac{1}{5}x_3 + & \frac{1}{5}w_2 - & \frac{1}{5}x_0 \\
w_3 & = & & 10x_1 + & 2x_3 - & w_2 + & 2x_0 \\
\multicolumn{7}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

Ora che x_0 è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla x_0 per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario. In tale dizionario, la scrittura per la funzione obiettivo è stata ottenuta partendo dalla funzione obiettivo originaria ed utilizzando le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base.

$$
\begin{array}{l}
\max \ 30x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -10 + 20x_1 - 4x_3 - w_2 \\
\left\{\begin{array}{rcrrrr}
w_1 & = & 10 - & 8x_1 - & \frac{9}{5}x_3 + & \frac{1}{5}w_2 \\
x_2 & = & 2 + & 2x_1 + & \frac{1}{5}x_3 + & \frac{1}{5}w_2 \\
w_3 & = & & 10x_1 + & 2x_3 - & w_2 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della x_1 nella funzione obiettivo è positivo. Portano in base x_1 esce w_1 ed otteniamo il seguente dizionario.

$$
\begin{array}{l}
\max \ 15 - \frac{5}{2}w_1 - \frac{17}{2}x_3 - \frac{1}{2}w_2 \\
\left\{\begin{array}{rcrrrr}
x_1 & = & \frac{5}{4} - & \frac{1}{8}w_1 - & \frac{9}{40}x_3 + & \frac{1}{40}w_2 \\
x_2 & = & \frac{9}{2} - & \frac{1}{4}w_1 - & \frac{1}{4}x_3 + & \frac{1}{4}w_2 \\
w_3 & = & \frac{25}{2} - & \frac{5}{4}w_1 - & \frac{1}{4}x_3 - & \frac{3}{4}w_2 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia ora ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi) e quindi in questo caso non sono necessari ulteriori passi di pivot.

In termini delle variabili di decisione originarie la soluzione ottima è data da $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{9}{2}$, $x_3 = 0$ cui corrisponde un valore di 15 per la funzione obiettivo. É facile verificare che tale soluzione risulta in effetti ammissibile per il problema originario (sostituzione) e che sommando il primo vincolo moltiplicato per $\frac{5}{2}$ (perché questo valore?) ed il secondo vincolo per $\frac{1}{2}$ (perché questo valore?) si scopre che nessuna soluzione ammissibile puó totalizzare piú di 15. Quindi le soluzioni (primale e duale) offerte dall'ultimo dizionario si autocertificano (ai sensi della legge Bassanini).

Per ogni unità di incremento del termine noto del primo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{5}{2}$ (almeno per piccoli incrementi). Per ogni unità di incremento del termine noto del secondo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{1}{2}$ (almeno per piccoli incrementi). Non saremmo invece disposti a pagare nulla per incrementare il termine noto del terzo vincolo.

Per capire fino a dove saremmo disposti a pagare tali prezzi ombra devo ricomputare l'ultimo dizionario sotto l'assunzione che la quantitá di risorsa disponibile sul primo vincolo sia $8+t_1$ (invece di 8) e che la quantitá di risorsa disponibile sul secondo vincolo sia $-10+t_2$ (invece di -10). Pertanto solo due valori del problema originale (solo due valori della colonna dei termini noti del problema iniziale) sono ora cambiati. Mi interessa comprendere come i vari valori dell'ultimo dizionario vadano riveduti. Poiché il dizionario finale é stato ottenuto dal dizionario iniziale tramite dei passi di pivot, che altro non sono che operazioni di riga (moltiplicare una riga per uno scalare od aggiungere un multiplo di una riga ad un'altra), ne consegue che solo i valori della colonna k dei termini noti vanno eventualmente rivisti. Per ricomputarli in modo agevole (senza ripercorrere i vari passi) mi avvalgo della "prova del nove" del tableau e riconsidero quindi l'ultimo dizionario cui si era pervenuti dando per incogniti i valori K, K_1, K_2 e K_3 della colonna k dei termini noti

$$\begin{array}{ccccc} & k & w_2 & w_1 & x_3 \\ z & K & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{17}{2} \\ x_1 & K_1 & \frac{1}{40} & -\frac{1}{8} & -\frac{9}{40} \\ x_2 & K_2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ w_3 & K_3 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}$$

con la soluzione di base iniziale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $z = 0$, $w_1 = 8 + t_1$, $w_2 = -10 + t_2$, $w_3 = 10$ come associata al tableau iniziale del problema modificato (il tableau di definizione delle variabili di slack). Si perviene cosí alle seguenti equazioni di controllo:

$$\begin{array}{rcl} (0) & = & K - \frac{1}{2}(t_2 - 10) - \frac{5}{2}(t_1 + 8) - \frac{17}{2}(0) \longrightarrow K = 15 + \frac{5}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 \\ (0) & = & K_1 + \frac{1}{40}(t_2 - 10) - \frac{1}{8}(t_1 + 8) - \frac{9}{40}(0) \longrightarrow K_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{8}t_1 - \frac{1}{40}t_2 \\ (0) & = & K_2 + \frac{1}{4}(t_2 - 10) - \frac{1}{4}(t_1 + 8) - \frac{1}{4}(0) \longrightarrow K_2 = \frac{9}{2} + \frac{1}{4}t_1 - \frac{1}{4}t_2 \\ (0) & = & K_3 - \frac{3}{4}(t_2 - 10) - \frac{5}{4}(t_1 + 8) - \frac{1}{4}(0) \longrightarrow K_3 = \frac{25}{2} + \frac{5}{4}t_1 + \frac{3}{4}t_2 \end{array}$$

La prima equazione (valore di K) conferma l'interpretazione economica (prezzi ombra) delle variabili duali esprimendo il valore della funzione obbiettivo per quella soluzione di base al variare di t_1 e t_2. Poiché tutti gli altri coefficienti della funzione obbiettivo restano negativi, questa soluzione di base (intesa come partizionamento tra la variabili in base e quelle fuori base) rimarrá sempre ottima. Dobbiamo solo andare a studiare per quali valori di t_1 e t_2 essa resti ammissibile. Imponiamo quindi le tre condizioni di ammissibilitá $K_1 \geq 0$, $K_2 \geq 0$, $K_3 \geq 0$. Otteniamo che t_1 puó crescere a piacere (ossia non ci sono limiti all'acquisto in risorsa 1 al suo prezzo ombra) mentre $t_2 \leq 18$ (ossia oltre le 18 unitá extra in risorsa 2 il valore marginale di quella risorsa diminuisce). Piú precisamente $t_2 \leq 18 + t_1$.

Problema 2 (4 punti):

Sia $B = 36$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	G	H	I	L	M	N	O	Q	R	T	U
peso	61	5	4	17	29	26	20	9	42	39	25	5	22	13	17	13
valore	63	5	4	17	13	11	5	9	99	64	7	5	4	13	5	13

2.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 36$)? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 34$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 33$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 29$?

svolgimento. Dapprima ordino gli oggetti forniti in input per peso crescente, e mi sbarazzo degli oggetti il cui peso eccede 36, ottenendo:

nome	C	B	O	I	R	U	T	D	H	Q	N	G	E
peso	4	5	5	9	13	13	17	17	20	22	25	26	29
valore	4	5	5	9	13	13	5	17	5	4	7	11	13

Si noti che per la maggior parte degli elementi il valore coincide con il peso. È facile convincersi con opportuni ragionamenti che in una soluzione ottima è sempre possibile rinunciare ai rimanenti elementi, dove il valore è di molto inferiore al peso. Ad esempio, non potró mai prendere in una soluzione due elementi entrambi di peso almeno 17, visto che T e D esauriscono da soli la capacità dello zaino (non posso aggiungere nemmeno l'elemento più leggero C) totalizzando solo 22 mentre D con I raccolgono più valore con meno ingombro. Allo stesso modo, posso sempre preferire di prendere D piuttosto che non U, o H, o N, o G, o E. Analogamente, posso rinunciare sempre a Q visto che eventualmente lo posso sostituire con F (nessuna soluzione li puó contenere entrambi). Con questo ho ridotto i miei candidati ai seguenti:

nome	C	B	O	I	R	U	D
peso	4	5	5	9	13	13	17
valore	4	5	5	9	13	13	17

Poichè ora il peso coincide col valore, posso limitarmi a lavorare solo con i pesi, e così compilo la tabella di programmazione dinamica riportata all'ultima pagina del presente documento.

Sulla base di tale tabella, possiamo fornire le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
36	36=13+9+5+5+4	36=13+9+5+5+4	R,I,B,O,C
34	34=17+13+4	34=17+13+4	D,R,C
33	32=13+9+5+5	32=13+9+5+5	R,I,B,O
29	27=13+5+5+4	27=13+5+5+4	R,B,O,C

Problema 3 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = ACAAGGCACCACG$ e $t = ACGGCGGATACG$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di s e t.

3.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto la sottosequenza comune parta con 'G'?

3.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il suffisso $t_8 = CGGATACG$ di t?

3.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra il suffisso $s_6 = ACCACG$ di s e t?

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

```
s\t  a  c  g  g  c  g  g  a  t  a  c  g
-----------------------------------------
a    9  8  7  7  7  6  5  4  3  3  2  1  0
c    8  8  7  7  7  6  5  4  3  3  2  1  0
a    8  7  7  6  6  6  5  4  3  3  2  1  0
a    8  7  7  6  6  6  5  4  3  3  2  1  0
g    7  7  7  6  6  6  5  4  3  3  2  1  0
g    6  6  6  6  5  5  5  4  3  3  2  1  0
c    6  5  5  5  5  4  4  4  3  3  2  1  0
a    6  5  4  4  4  4  4  4  3  3  2  1  0
c    5  5  4  4  4  3  3  3  3  3  2  1  0
c    4  4  4  4  4  3  3  3  3  3  2  1  0
a    3  3  3  3  3  3  3  3  3  3  2  1  0
c    2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  1  0
g    1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  0
     0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
```

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	9	A C G G C A A C G
parte con 'G'	7	G G C A A C G
tra s e t_8	7	C G G A A C G
tra s_6 e t	6	A C C A C G

Problema 4 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

7	12	14	8	10	27	34	58	11	31	57	15	38	25	50	52	16	13	9	31	17	20	35	45	18

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) Una sequenza è detta una V-sequenza se cala fino ad un certo punto, e da lì in poi cresce sempre. Trovare la più lunga V-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.4(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 38. Specificare quanto è lunga e fornirla.

svolgimento. Per poter rispondere alle prime 3 domande compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

CRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
10	8	7	9	8	5	4	1	7	4	1	6	3	4	2	1	5	5	5	3	4	3	2	1	1
7	12	14	8	10	27	34	58	11	31	57	15	38	25	50	52	16	13	9	31	17	20	35	45	18
1	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	4	3	3	5	6	7	4	5	5	4	4	6
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

DECRESCENTE

Infine, per rispondere all'ultima domanda, computo partendo da destra un'ulteriore sequenza di valori come riportati in neretto nella seguente tabella.

CRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
10	8	7	9	8	5	4	1	7	4	1	6	3	4	2	1	5	5	5	3	4	3	2	1	1
7	12	14	8	10	27	34	58	11	31	57	15	38	25	50	52	16	13	9	31	17	20	35	45	18
1	**2**	**3**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**4**	**5**	**6**	**5**	**6**	**6**	**7**	**8**	**6**	**5**	**3**	**7**	**7**	**7**	**8**	**9**	**7**
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

CRESCENTE

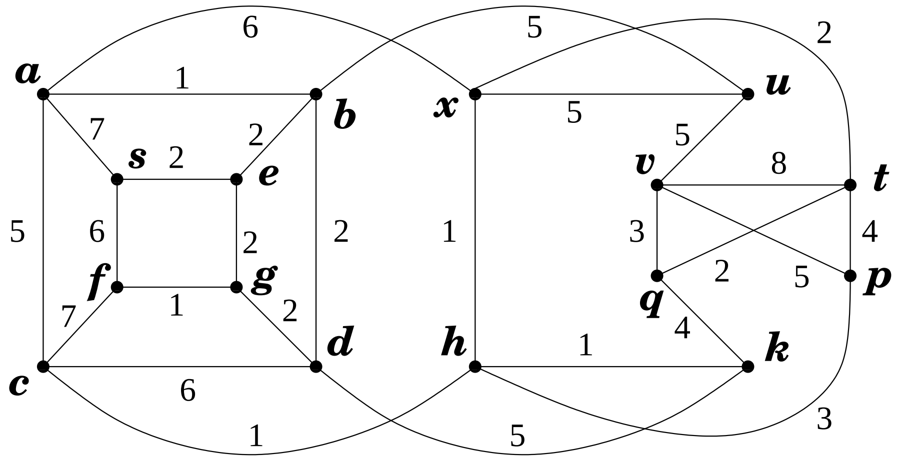
Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	10	7, 8, 10, 11, 15, 16, 17, 20, 35, 45
decrescente	7	58, 57, 38, 25, 16, 13, 9
V-sequenza	11	58, 57, 38, 25, 16, 13, 9, 17, 20, 35, 45
crescente con 38	8	7, 8, 10, 11, 15, 38, 50, 52

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga A-sequenza? (Una sequenza è detta una A-sequenza se cresce fino ad un certo punto, e da lì in poi cala sempre.)

Problema 5 (17 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.

5.1.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.



5.2.**(1+1pt)** Dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda il grafo bipartito fornendo i certificati del caso.

5.3.**(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

5.4.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

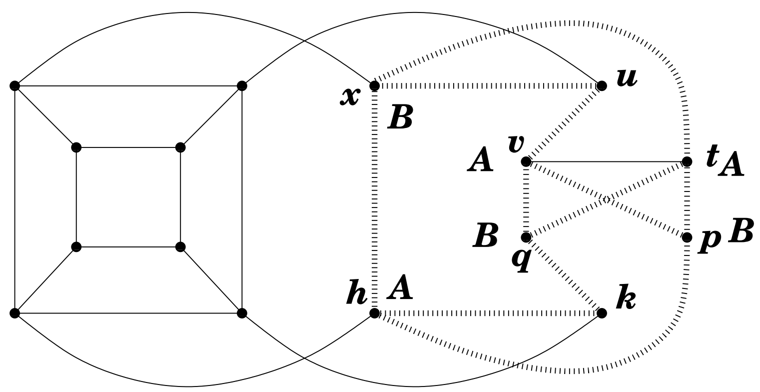
5.5.**(3pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.6.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.7.**(3pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

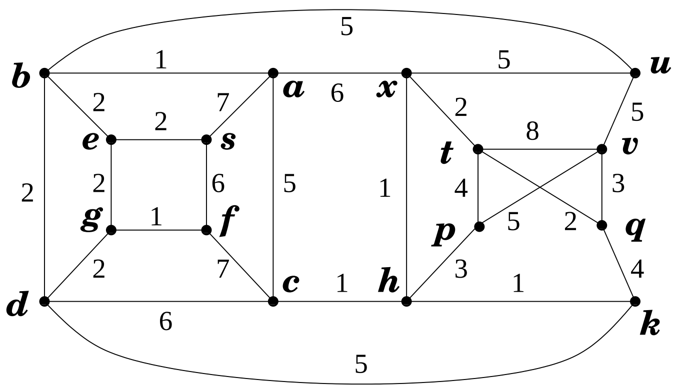
risposte.

Il fatto che G non sia planare può essere messo in evidenza esibendo il sottografo di G riportato in figura.



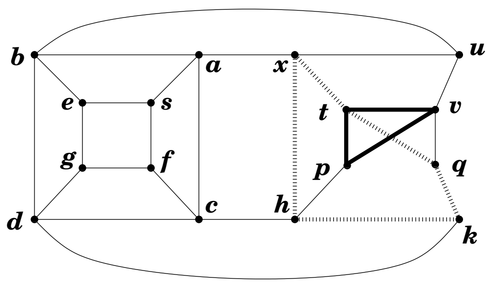
Il verificatore dovrà solo controllare che tale sottografo di G è una suddivisione di $K_{3,3}$.

Pertanto, quando G sia disegnato nel piano, dovrà presentarsi quantomeno un incrocio tra archi. Riportiamo nella seguente figura una rappresentazione di G con un solo incrocio!

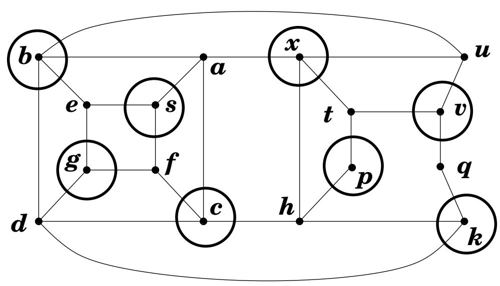


Nello svolgimento dei seguenti punti dell'esercizio converrà riferirsi a questa rappresentazione con pochi incroci.

Il grafo G contiene 2 circuiti dispari disgiunti sugli archi come messo in evidenza in figura.

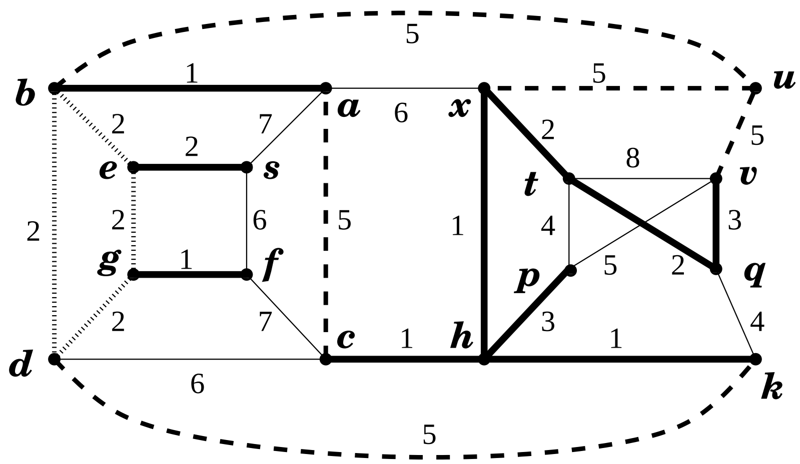


E pertanto occorre rimuovere almeno 2 archi se si intende renderlo bipartito. In effetti, per rendere G bipartito basta rimuovere i 2 archi tq e vp come messo in evidenza in figura.

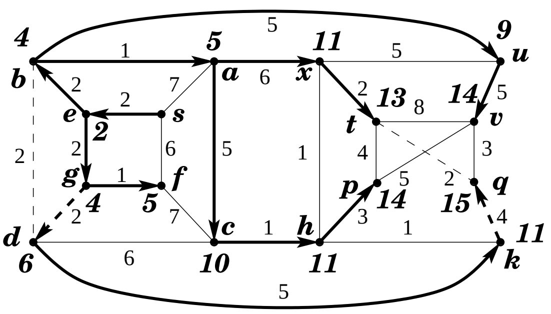


Il numero minimo di archi la cui rimozione rende il grafo bipartito è pertanto 2.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono 32 alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 10 archi in linea spessa, più 3 qualsiasi dei 4 archi di peso 2 ed in linea sfumata spessa (4 scelte possibili), più 2 dei 5 archi di peso 5 ed in linea tratteggiata scelti in modo qualsiasi evitando però di prendere sia l'arco uv che l'arco ux ed evitando altresì di prendere sia l'arco ac che l'arco dk ($10 - 2 = 8$ scelte possibili). Equivalentemente, i 2 dei 5 archi di peso 5 ed in linea tratteggiata vanno scelti in modo da prendere almeno un arco tra dk, ac, bu (ossia del taglio $\delta(\{a, b, d, e, s, g, f\})$ ed almeno un arco tra uv, ux, bu (ossia del taglio $\delta(u)$).

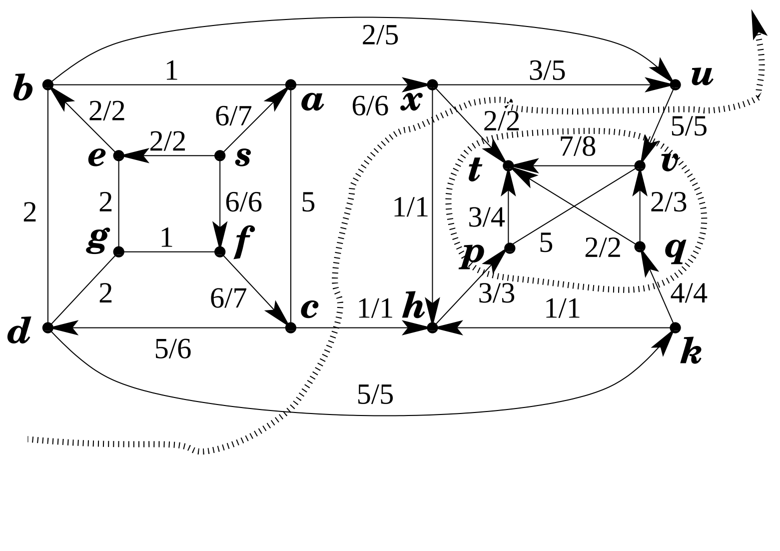


Un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo è rappresentato in figura dagli archi in linea spessa (sia tratteggiata che continua).



Ovviamente ogni arco del grafo non contenuto nell'albero dei cammini minimi (ossia ogni arco in linea non spessa) può essere rimosso senza allontanare alcun nodo dal nodo s. Inoltre, anche i due archi in linea spessa ma tratteggiata possono essere rimossi poichè sostituibili con altri archi (sempre in linea tratteggiata).

La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 14 e satura tutti e 5 gli archi che attraversano la curva tratteggiata aperta portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 5 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 14 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto. Per un secondo taglio minimo e certificato di ottimalità si considerino i 4 archi che attraversano la curva tratteggiata chiusa.

Problema 6 (5 punti):

La Wonka produce tavolette di cioccolato in tre diversi stabilimenti S_1, S_2 ed S_3, i cui limiti di produzione sono di $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ ed $\overline{S}_3$ chili giornalieri, rispettivamente. Le farine di cacao utilizzate per la produzione possono provenire esclusivamente da 2 piantagioni di cacao C_1 e C_2 gestite da Umpa Lumpa altamente specializzati. Su base giornaliera, queste possono fornire un massimo di $\overline{C}_1$ e di $\overline{C}_2$ chili di farina, rispettivamente. (Di fatto questi limiti variano di giorno in giorno). Per la produzione di 1 chilo di tavolette vengono impiegati 2 chili di farina di cacao e 10 chili di latte. Il latte proviene dalla fattoria di Heidi, nelle Alpi, dove la squadra di Bianchina riesce a fornire sino a $\overline{L}$ chili di latte alla Willy Wonka's senza andare a scapito della qualitá. Due soli negozi N_1 ed N_2 hanno il privilegio di smerciare le preziose tavolette, e la domanda supera sempre l'offerta. Riportiamo nella prima tabella i costi di trasporto del latte.

	S_1	S_2	S_3
costo trasporto latte al chilo	5	3	2

Nella seconda tabella quanto costa trasportare un chilo di farina da una data piantagione ad un dato stabilimento.

	S_1	S_2	S_3
C_1	5	3	2
C_2	6	2	4

Nella terza tabella quanto costa trasportare un chilo di tavolette da un dato stabilimento ad un dato negozio.

	S_1	S_2	S_3
N_1	4	3	7
N_2	6	9	5

Willy intende soddisfare la maggior quantitá di domanda. Determinare prima il livello della produzione P_{Max} e formulare poi come problema di Programmazione Lineare il problema di minimizzare i costi di trasporto e della determinazione del corrispondente piano industriale.

svolgimento.

La produzione P_{Max} non potrà eccedere la complessiva capacità produttiva delle fabbriche $\overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \overline{S}_3$, ma sarà limitata anche dalle disponibilità di latte $\frac{\overline{L}}{10}$ e di cacao $\frac{\overline{C}_1+\overline{C}_2}{2}$. Non vi sono altri impedimenti e quindi $P_{Max} = \min\left\{\overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \overline{S}_3; \frac{\overline{L}}{10}; \frac{\overline{C}_1+\overline{C}_2}{2}\right\}$. Possiamo scomporre questa produzione sui 3 stabilimenti come $P_{Max} = p_1 + p_2 + p_3$. Per $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$, denotiamo con $x_{i,j}$ la quantità (in chili) di cacao inviati da C_i a S_j, con $p_{j,i}$ la quantità (in chili) di tavolette inviate dallo stabilimento S_j al negozio N_i. L'obiettivo é quello di minimizzare i costi di trasporto ossia

$$\begin{aligned} \min \quad & 50\,p_1 + 30\,p_2 + 20\,p_3 \\ & + 5\,x_{1,1} + 3\,x_{1,2} + 2\,x_{1,3} + 6\,x_{1,1} + 2\,x_{1,2} + 4\,x_{1,3} \\ & + 4\,y_{1,1} + 6\,y_{1,2} + 3\,y_{2,1} + 9\,y_{2,2} + 7\,y_{3,1} + 5\,y_{3,2}\,, \end{aligned}$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

1. vincoli di non negativitá

$$x_{i,j}, y_{i,j} \geq 0.$$

2. limiti produzione farine

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} \leq \overline{C}_1, \qquad x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} \leq \overline{C}_2.$$

3. limiti produzione stabilimenti

$$p_1 \leq \overline{S}_1, \qquad p_2 \leq \overline{S}_2, \qquad p_3 \leq \overline{S}_3.$$

4. livello di produzione

$$p_1 + p_2 + p_3 = P_{Max}.$$

5. composizione del prodotto e leggi di flusso (Kirchhoff)

$$2\,y_{1,1} + 2\,y_{1,2} = x_{1,1} + x_{2,1} = 2\,p_1, \qquad 2\,y_{2,1} + 2\,y_{2,2} = x_{1,2} + x_{2,2} = 2\,p_2, \qquad 2\,y_{3,1} + 2\,y_{3,2} = x_{1,3} + x_{2,3} =$$

Possiamo chiaramente evitare l'uso delle variabili p_1, p_2 e p_3, operando le sostituzioni $p_i = y_{1,1} + y_{1,2}$, come suggerite dai vincoli (5), entro i vincoli (3) e (4) e nella funzione obiettivo. Ad esempio, la funzione obiettivo, con la sostituzione, diviene

$$\begin{aligned} \min \quad & 5\,x_{1,1} + 3\,x_{1,2} + 2\,x_{1,3} + 6\,x_{1,1} + 2\,x_{1,2} + 4\,x_{1,3} \\ & + 54\,y_{1,1} + 56\,y_{1,2} + 33\,y_{2,1} + 39\,y_{2,2} + 27\,y_{3,1} + 25\,y_{3,2}\,. \end{aligned}$$

Ad onore del vero, poiché entrambi i negozi non pongono limiti allo smercio di tavolette, ne consegue che, da ogni fabbrica, sará sempre conveniente inviare tutte le tavolette prodotte al negozio che comporta minori costi di trasporto. Con questa osservazione risulta possibile sbarazzarsi delle variabili y ed ignorare 3 dei valori numerici dati in input.

Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$C(4)$	0	·	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$B(5)$	0	·	·	·	●	●	·	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$O(5)$	0	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$I(9)$	0	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$R(13)$	0	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	·	●
$U(13)$	0	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	●	·	·	●	●
$C(17)$	0	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	●	·	●	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	●	·	●	●	●

nome	C	B	O	I	R	U	D
peso	4	5	5	9	13	13	17
valore	4	5	5	9	13	13	17