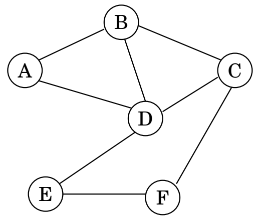
Esame di Ricerca Operativa - 23 settembre 2009
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (2+2 punti):

Una CRICCA in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme $X \subseteq V$ tale che per ogni due nodi $x_1, x_2 \in X$ l'arco $x_1 x_2$ è un arco di G (appartiene ad E).

Ad esempio, gli insiemi $\{A, B, D\}$ e $\{B, D, C\}$ sono due possibili cricche per il grafo G in figura.



Nelle applicazioni siamo solitamente interessati a trovare cricche che comprendano il maggior numero possibile di nodi.

Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di una massima cricca sul grafo G in figura.

Mostrare come sia più in generle possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di una massima cricca su un grafo $G = (V, E)$ generico.

svolgimento.

Abbiamo una variabile $x_i \in \{0, 1\}$ per $i = A, B, C, D, E, F$, con l'idea che 1 significa "nodo incluso nella cricca" e 0 significa "nodo non incluso nella cricca".

Volendo massimizzare la cardinalità della cricca, la funzione obbiettivo sarà:

$$\max x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F$$

ciascuno dei vincoli corrisponde poi ad uno dei non-archi.

non-arco AC**:** $x_A + x_C \leq 1;$

non-arco AE**:** $x_A + x_E \leq 1;$

non-arco AF**:** $x_A + x_F \leq 1;$

non-arco BE**:** $x_B + x_E \leq 1;$

non-arco BF**:** $x_B + x_F \leq 1;$

non-arco CE**:** $x_C + x_E \leq 1;$

non-arco DF**:** $x_D + x_F \leq 1.$

Nel caso di un grafo $G = (V, E)$ generico introduciamo una variabile $x_v \in \{0, 1\}$ per ogni nodo $v \in V$, con l'idea che 1 significa "nodo incluso nella cricca" e 0 significa "nodo non incluso nella cricca".

Otteniamo quindi la seguente formulazione PLI per il problema MAX-CLIQUE.

$$\min \sum_{v \in V} x_v \,,$$
$$x_u + x_v \leq 1 \text{ per ogni arco } uv \notin E,$$
$$x_v \in \{0,1\} \text{ per ogni nodo } v \in V.$$

Problema 2 (4 punti):

Una fonderia produce un solo prodotto, ottenuto dalla fusione di 4 diversi materiali grezzi. La composizione di ciascun materiale, espressa in percentuale per kg di materiale, e il costo unitario (Euro/kg) sono espressi nella seguente tabella:

	% alluminio	% silicio	% carbonio	costo al kg
materiale 1	3	4	6	680
materiale 2	5	4	5	750
materiale 3	1	2.5	4	450
materiale 4	4	5	7	870

Si tenga conto che il prodotto finale deve contenere una percentuale di alluminio tra il 3% e l'8%, una percentuale di silicio tra il 4% e il 5%, e una percentuale di carbonio non superiore al 5%. Formalizzare il problema di pianificare la produzione della fonderia con l'obiettivo di minimizzare i costi.

svolgimento.

Le variabili di decisione sono la quantità x_1, x_2, x_3, x_4 dei vari materiali, da impiegarsi per la produzione di ogni singolo chilo di prodotto.

L'obiettivo è quello di minimizzare il costo di ogni chilo di prodotto.

$$\min C \quad = \quad 680\, x_1 + 750\, x_2 + 450\, x_3 + 870\, x_4 \,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$x_1, x_2, x_2, x_4 \geq 0.$$

normalizzazione delle composizioni

$$x_1 + x_2 + x_2 + x_4 = 1.$$

vincoli sulle percentuali di alluminio

$$3\,x_1 + 5\,x_2 + x_2 + 4\,x_4 \geq 3.$$
$$3\,x_1 + 5\,x_2 + x_2 + 4\,x_4 \leq 8.$$

vincoli sulle percentuali di silicio

$$4\,x_1 + 4\,x_2 + 2.5\,x_2 + 5\,x_4 \geq 4.$$
$$4\,x_1 + 4\,x_2 + 2.5\,x_2 + 5\,x_4 \leq 5.$$

vincoli sulle percentuali di carbonio

$$6\,x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_2 + 7\,x_4 \leq 5.$$

Problema 3 (4 punti):
Sia $B = 36$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I
peso	2	13	14	6	13	3	16	11	4
valore	11	63	60	33	30	13	66	60	20

3.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 36$)? Quali elementi devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso $B = 33$?

3.3 (1pt) e nel caso $B = 28$?

3.4 (1pt) e nel caso $B = 26$?

svolgimento. Per lo svolgimento si segua la solita traccia. Riportiamo solamente i risultati finali.

B	max val	peso	quali prendere
36	187 = 60+20+33+11+63	36 = 11+4+6+2+13	H,I,D,A,B
33	169 = 60+33+13+63	33 = 11+6+3+13	H,D,F,B
28	143 = 60+20+63	28 = 11+4+13	H,I,B
26	137 = 60+20+33+11+13	26 = 11+4+6+2+3	H,I,D,A,F

Problema 4 (4 punti):

Trovare, nel seguente array di interi, un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **massima**.

19	-9	23	-16	20	-42	30	-20	24	-33	16	-28	7	-15	25	-20	7	-8	21	-25	13	-17	8	-6	4	-3	7

tipo intervallo	max sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi					
include ultimo			27		
include 9^o					
include 5^o e 10^o					
include 17^o					
include 14^o e 16^o					

svolgimento. Per lo svolgimento si seguono i soliti metodi (algoritmi). Riportiamo solamente le tabelle completamente compilate.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
19	10	33	17	37	0	30	10	34	1	17	0	7	0	25	5	12	4	25	0	13	0	8	2	6	3	10
19	-9	23	-16	20	-42	30	-20	24	-33	16	-28	7	-15	25	-20	7	-8	21	-25	13	-17	8	-6	4	-3	7
37	18	27	4	20	0	34	4	24	0	16	0	17	10	25	0	20	13	21	0	13	0	10	2	8	4	7
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Ed ha quindi prodotto le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi	37	1	5	19	20
include ultimo	10	23	27	8	7
include 9^o	34	7	9	30	24
include 5^o e 10^o	20	1	11	19	16
include 17^o	25	15	19	25	21
include 14^o e 16^o	17	13	19	7	21

Problema 5 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

16	9	11	6	10	26	33	57	9	30	58	13	36	24	51	53	14	12	6	30	55	18	35	47	16

5.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(1pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 14. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.4(1pt) una sequenza è detta una V-sequenza se su una prima parte è calante e poi sempre crescente. Trovare la più lunga V-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Dapprima compilo le seguenti tabelle di programmazione dinamica.

CRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
7	8	7	8	7	6	5	2	6	5	1	5	4	4	3	2	4	4	4	3	1	3	2	1	1
16	9	11	6	10	26	33	57	9	30	58	13	36	24	51	53	14	12	6	30	55	18	35	47	16
1	1	2	1	2	3	4	5	2	4	6	3	5	4	6	7	4	4	2	5	8	5	6	7	5
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

CRESCENTE

e

CRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
7	8	7	8	7	6	5	2	6	5	1	5	4	4	3	2	4	4	4	3	1	3	2	1	1
16	9	11	6	10	26	33	57	9	30	58	13	36	24	51	53	14	12	6	30	55	18	35	47	16
8	10	9	10	9	7	6	3	10	7	2	8	6	7	5	4	8	9	10	5	3	7	5	4	5
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

DECRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	8	9, 11, 26, 33, 36, 51, 53, 55
Z-sequenza	11	9, 11, 26, 33, 57, 58, 13, 24, 51, 53, 55
crescente con 14	7	6, 9, 13, 14, 30, 35, 47
V-sequenza	10	16, 11, 6, 10, 26, 33, 36, 51, 53, 55

Problema 6 (6 punti):

6.1**(1pt)** Costruire un problema di PL che sia illimitato.

6.2**(1pt)** Costruire un problema di PL che abbia infinite soluzioni ottime.

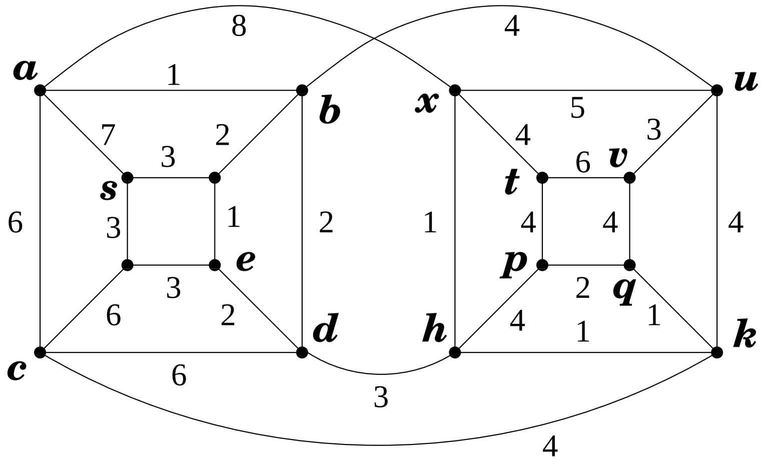
6.3**(1pt)** Costruire un problema di PL il cui duale abbia infinite soluzioni ottime.

6.4**(1pt)** Costruire un problema di PL che abbia precisamente 2 soluzioni ottime di base.

6.5**(1pt)** Costruire un problema di PL che abbia precisamente 3 soluzioni ottime di base.

6.6**(1pt)** Costruire un problema di PL in cui l'unica soluzione ottima sia degenere.

Problema 7 (15 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



7.1.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

7.2.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

7.3.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

7.4.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

7.5.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è bipartito oppure no.

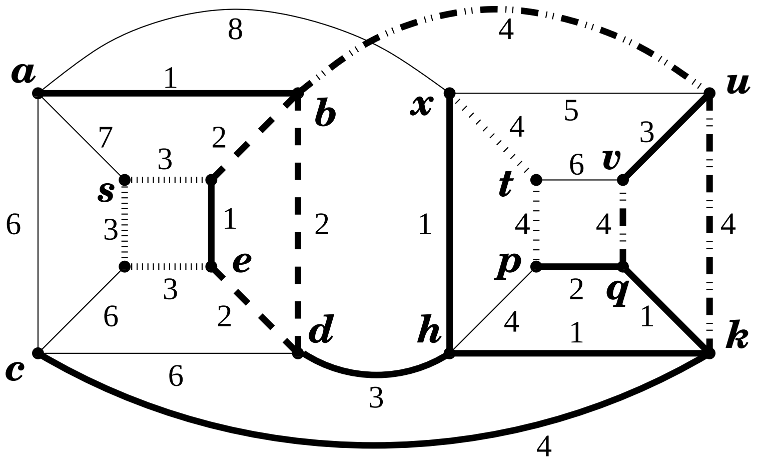
7.6.**(2pt)** Se il grafo è bipartito, aggiungere un arco in modo che esso cessi di essere bipartito. In caso contrario, dire quale è il minimo numero di archi la cui rimozione rende il grafo bipartito. (Fornendo non solo certificato di bipartizione per il grafo ottenuto ma anche argomentando che la rimozione di un numero minore di archi non può bastare).

7.7.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

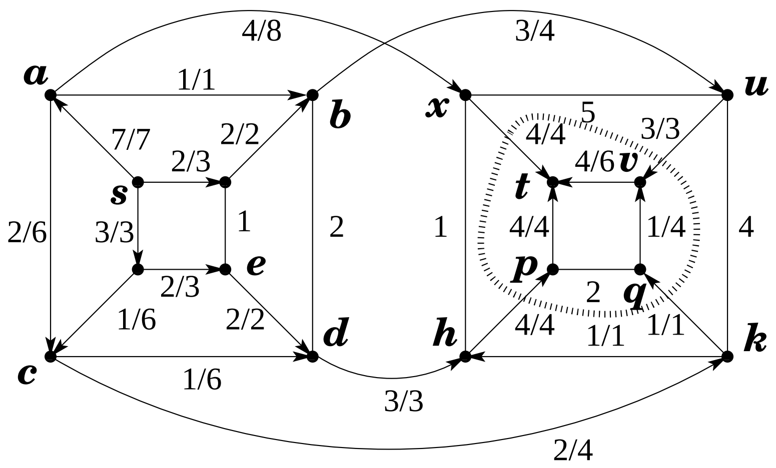
7.8.**(1pt)** Se il grafo è planare, aggiungere un arco in modo che esso cessi di essere planare. In caso contrario, dire quale è il minimo numero di archi la cui rimozione rende il grafo planare. (Fornendo certificato di planarità per il grafo ottenuto ed argomentando che la rimozione di un numero minore di archi non può bastare).

risposte.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono 54 alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 9 archi in linea spessa, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 2 ed in linea tratteggiata, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 3 ed in linea sfumata spessa, più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 4 ed in linea sfumata spessa (più sfumata), più 1 qualsiasi dei 3 archi di peso 4 ed in linea tratto-punteggiata.

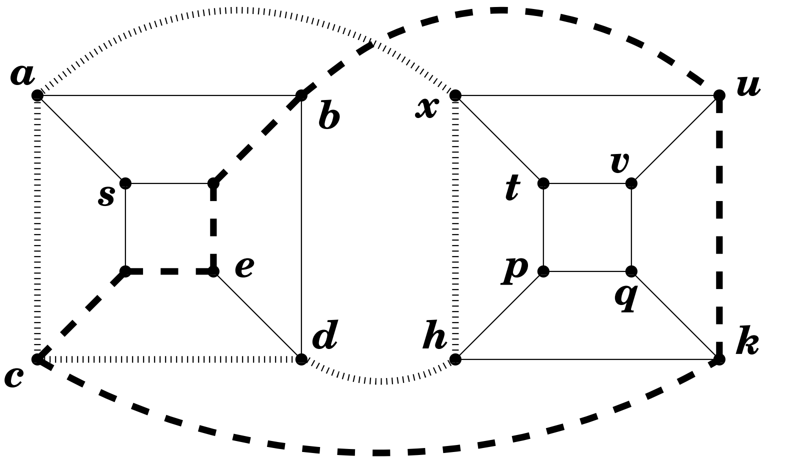


La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.

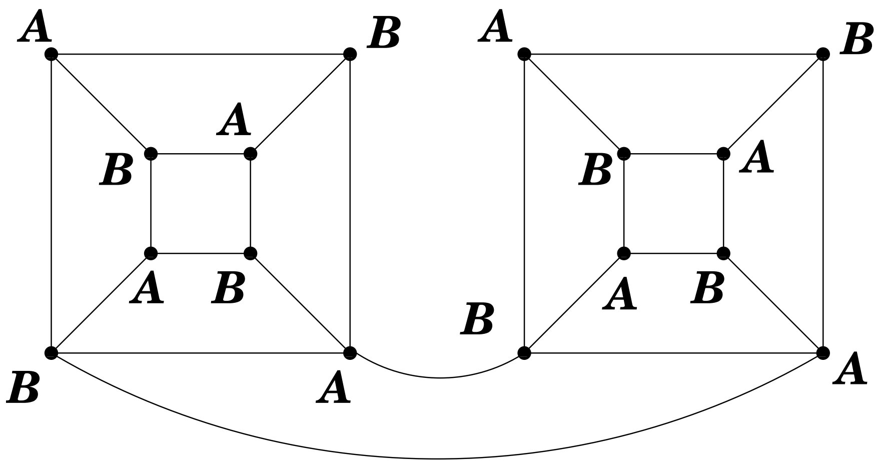


Il flusso ha valore 12 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 12 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

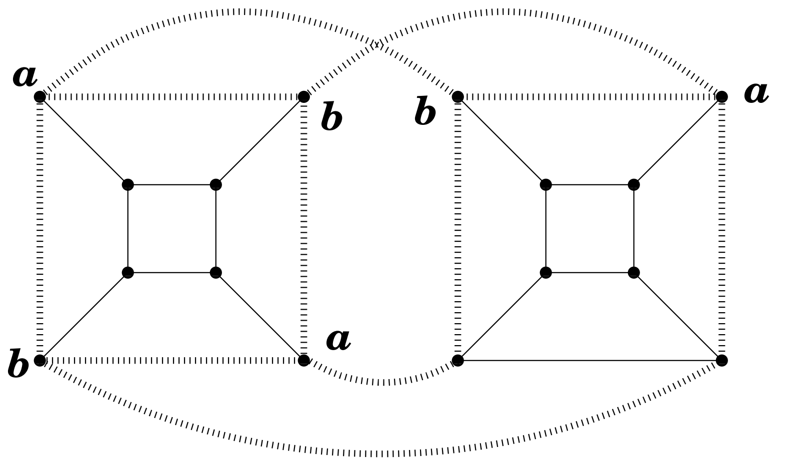
Il grafo non è bipartito poichè contiene circuiti dispari. Di fatto i due circuiti dispari esibiti in figura non hanno archi in comune e quindi devo rimuovere almeno 2 archi per rendere il grafo bipartito.



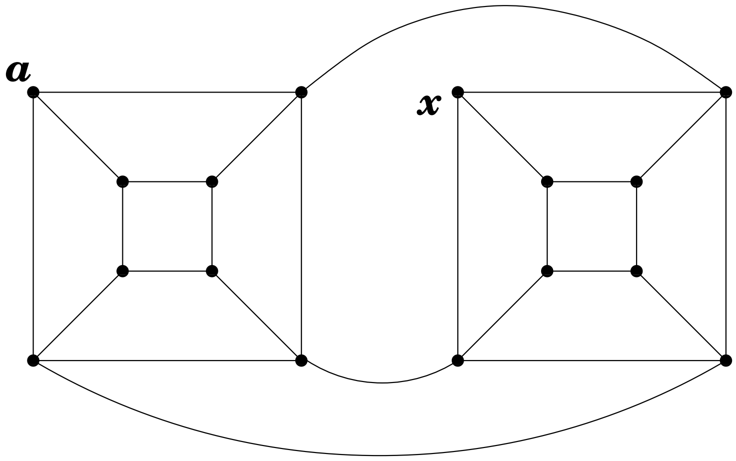
In effetti per rendere il grafo bipartito mi basta rimuovere i 2 archi ax e bu.



Il fatto che G non sia planare può essere messo in evidenza esibendo la suddivisione di $K_{3,3}$ in figura.



Tuttavia la rimozione di un solo arco basta a rendere il grafo planare (e chiaramente 1 è il più piccolo numero intero maggiore di 0).


a
x