Esame di Ricerca Operativa - 14 luglio 2009
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (2 punti):
Si consideri la seguente formula booleana in forma normale congiuntiva, di 4 clausole e 4 variabili:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \overline{x_4})$$

Esiste un assegnamento di veritá alla variabili booleane x_1, x_2, x_3 e x_4 tale che la formula risulti soddisfatta?

Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI).

Anche se la formula é soddifacibile ($x_2 = x_3 = true$, $x_1 = x_4 = false$), si formuli come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) anche il problema di trovare un assegnamento che soddisfi il massimo numero possibile di clausole.

svolgimento.
Abbiamo una variabile $x_i \in \{0, 1\}$ per $i = 1, 2, 3, 4$, con l'idea che 1 significa "vero" e 0 significa "falso".

Nel primo caso non abbiamo funzione obbiettivo ma solo i 4 vincoli corrispondenti alle 4 clausole.

clausola 1, ossia $(x_1 \vee x_2)$**:** $x_1 + x_2 \geq 1$;

clausola 2, ossia $(x_2 \vee \overline{x_3})$**:** $x_2 + (1 - x_3) \geq 1$, ossia $x_2 - x_3 \geq 0$;

clausola 3, ossia $\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4)$**:** $(1 - x_1) + (1 - x_2) + x_4 \geq 1$, ossia $-x_1 - x_2 + x_4 \geq -1$;

clausola 4, ossia $(x_3 \vee \overline{x_4})$**:** $x_3 + (1 - x_4) \geq 1$, ossia $x_3 - x_4 \geq 0$.

Nel secondo caso introduciamo un ulteriore variabile y_i per ciascuna delle clausole (per $i = 1, 2, 3, 4$) con l'idea che $y_i = 1$ significa che la clausola i risulta soddisfatta mentre $y_i = 0$ significa che la clausola i risulta non soddisfatta. L'obiettivo é quello di massimizzare il numero di clausole soddisfatte ossia

$$\max \sum_{i=1}^{4} y_i \, ,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

clausola 1, ossia $(x_1 \vee x_2)$**:** $\overline{y_1} + x_1 + x_2 \geq 1$;

clausola 2, ossia $(x_2 \vee \overline{x_3})$**:** $\overline{y_2} + x_2 - x_3 \geq 0$;

clausola 3, ossia $\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4)$**:** $\overline{y_3} + -x_1 - x_2 + x_4 \geq -1$;

clausola 4, ossia $(x_3 \vee \overline{x_4})$**:** $\overline{y_4} + x_3 - x_4 \geq 0$.

Problema 2 (5 punti):

La Svivon produce batterie elettriche di tre tipi (Alef, Beth e Ghimel). Per due di esse (Beth e Ghimel) utilizza del rame. Per coprire la produzione del prossimo mese, puó acquistare il rame al prezzo di 5 euro/kg. Il fornitore peró non puó fornire piú di 4000 kg di rame. Nella seguente tabella sono indicate: la quantitá di rame richiesta per produrre una scatola di ciascuna batteria, i costi di manodopera (per scatola prodotta) e prezzi di vendita al pubblico (per scatola):

	Rame (kg per scatola)	costi manodopera	prezzo vendita
ALEF	-	12	25
BETH	1	6	20
GHIMEL	2	4	30

I tre tipi di batteria devono essere prodotti in quantità tali che il numero di scatole di batterie Alef sia almeno doppio del numero di scatole di Beth e non superiore al numero di scatole di Ghimel.

1 Formulare come PL il problema di pianificare la produzione della Svivon in modo ottimo.

2 Dimostrare che la soluzione consistente nel produrre 2000 unità di Alef e altrettante di Ghimel (e nessuna scatola di Beth) è ottima.

svolgimento.

Le variabili di decisione sono la quantità di scatole dei tre tipi di batterie, che indicheremo con x_A, x_B e x_G. La funzione obiettivo da massimizzare è il profitto totale lordo, meno i costi totali. Il profitto lordo è $25\,x_A + 20\,x_B + 30\,x_G$ ed a questo vanno sottratti i contributi del costo del rame e della manodopera, pari rispettivamente a $5(x_B + 2\,x_G)$ e $12\,x_A + 6\,x_B + 4\,x_G$ e dunque, riordinando i termini, la funzione obiettivo risulta $13\,x_A + 9\,x_B + 16\,x_G$.

Il problema è quindi quello di

$$\max R = 13\,x_A + 9\,x_B + 16\,x_G\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$x_A, x_B, x_G \geq 0.$$

vincolo sulla disponibilitá del rame

$$x_B + 2\,x_G \leq 4000$$

vincolo sulla produzione di batterie Alef

$$\begin{aligned} x_A &\geq 2\,x_B \\ x_A &\leq x_G \end{aligned}$$

Introducendo il vincolo di interezza per le variabili otteniamo soluzioni intere ottime che possono essere messe in pratica senza arrotondamenti (con conseguente rischio di perdita di precisione nella soluzione del modello matematico intero).

Per rispondere alla seconda domanda intendiamo reperire una soluzione del duale (certificato di ottimalit'a per il primale) avvalendoci delle condizioni degli scarti complementari. Riscriviamo il problema come:

$$\max\ z = 13\,x_A + 9\,x_B + 16\,x_G$$
$$\begin{cases} \quad\quad\quad x_B \ +2\,x_G \leq \ 4000 \\ -\ x_A \ +2\,x_B \quad\quad \leq \ 0 \\ \quad x_A \quad\quad -\ x_G \leq \ 0 \\ x_A, x_B, x_G \geq 0 \end{cases}$$

il problema duale è:

$$\min\ 4000\,y_1$$
$$\begin{cases} \quad\quad -\ y_2 \ +\ y_3 \geq \ 13 \\ \quad y_1 \ +2\,y_2 \quad\quad \geq \ 9 \\ \ 2\,y_1 \quad\quad -\ y_3 \geq \ 16 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Verifichiamo che la soluzione $(2000, 0, 2000)$ è ammissibile per il problema primale.

$$\max\ z = 13\,x_A + 9\,x_B + 16\,x_G$$
$$\begin{cases} \quad\quad\quad (0) \ +2\,(2000) = 4000 \leq \mathbf{4000} \\ -\ (2000) \ +2\,(0) \quad\quad = -2000 \leq 0 \\ \quad (2000) \quad\quad -\ (2000) = 0 \leq \mathbf{0} \\ x_A, x_B, x_G \geq 0 \end{cases}$$

Dalla complementariet, $u_2 = 0$ visto che il secondo vincolo del primale è soddisfatto in senso stretto, e poichè $x_A > 0$ e $x_G > 0$, deve essere che

$$\min\ 4000\,y_1$$
$$\begin{cases} \quad\quad +\ y_3 = \ 13 \\ 2\,y_1 \ -\ y_3 = \ 16 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

da cui $(u_1, u_2, u_3) = (14.5, 0, 13)$. Osservando che la soluzione $(14.5, 0, 13)$ è in effetti ammissibile per il duale (soddisfa anche al secondo vincolo) se ne deduce l'ottimalit'a della soluzione primale proposta.

Problema 3 (4 punti):

Il topino Aladino, dotato di uno zaino di capacità $B = 36$, ha compilato la Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino che puoi trovare di seguito.

Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$A(4,5)$	0	·	·	·	5	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$B(5,4)$	0	·	·	·	5	4	·	·	·	9	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$C(5,6)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	·	15	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$D(9,11)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	·	22	21	·	·	·	26	·	·	·	·	·	·	·
$E(13,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	17	22	21	·	·	23	26	·	·	28	29	·	·	·
$F(13,14)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	19	22	21	·	·	25	26	·	·	30	31	·	·	31
$G(15,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	·	25	26	23	22	30	31	28	29	31
$H(17,16)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	21	25	26	23	22	30	31	28	29	32
$I(22,21)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	21	25	26	23	22	30	31	28	29	32
$L(24,22)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	21	25	26	23	22	30	31	28	29	32

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	14	12	16	21	22

Sulla base di tale tabella, Aladino ha fornito le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
30			
25			
29			
21			

Tuttavia il topino ha erroneamente rosicchiato via alcune parti delle tabelle. Aiutalo a ricostruirle, senza dimenticare le risposte!

svolgimento. Per lo svolgimento si seguono i soliti metodi (algoritmi). Riportiamo solamente le tabelle compilate.

Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$A(4,5)$	0	·	·	·	5	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$B(5,4)$	0	·	·	·	5	4	·	·	·	9	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$C(5,6)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	·	15	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$D(9,11)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	·	22	21	·	·	·	26	·	·	·	·	·	·	·
$E(13,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	17	22	21	·	·	23	26	·	·	28	29	·	·	·
$F(13,14)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	19	22	21	·	·	25	26	·	·	30	31	·	·	31
$G(15,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	·	25	26	23	22	30	31	28	29	31
$H(17,16)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	21	25	26	23	22	30	31	28	29	32
$I(22,21)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	21	25	26	23	22	30	31	28	29	32
$L(24,22)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	21	25	26	23	22	30	31	28	29	32

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	14	12	16	21	22

Sulla base di tale tabella, Aladino ha fornito le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
30	32=16+11+5	30=17+9+4	H,D,A
25	26=11+6+4+5	23=9+5+5+4	D,C,B,A
29	31=14+11+6	27=13+9+5	F,D,C
21	22=11+6+5	18=9 +5+4	D,C,A

Problema 4 (4 punti):

Il padre di Jasmine le ha chiesto di trovare, nel seguente array di interi, un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **massima**.

21	-13	24	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	27	-8	44	-20	23	-39	25	-10	8	-15	1

Jasmine ha allora compilato la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
		32	1		0	4	0	39		23	15	36		13	0	27	19			66	27	52			35	
21	-13	24	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	27	-8	44	-20	23	-39	25	-10	8	-15	1
32	11			16	0	28	24	39	0	19	13	21	0	22	11		39		3	23	0	25				1
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Ed ha quindi prodotto le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos	arriva a pos
qualsiasi			
include primo			
include 11-esimo			
include 21-esimo			

Tuttavia il topino Aladino ha rosicchiato parti delle tabelle. Aiuta Jasmine a ricostruirle, senza dimenticare le risposte!

svolgimento. Per lo svolgimento si seguono i soliti metodi (algoritmi). Riportiamo solamente le tabelle completamente compilate.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
21	8	32	1	17	0	4	0	39	17	23	15	36	2	13	0	27	19	63	43	66	27	52	42	50	35	36
21	-13	24	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	27	-8	44	-20	23	-39	25	-10	8	-15	1
32	11	24	0	16	0	28	24	39	0	19	13	21	0	22	11	66	39	47	3	23	0	25	0	8	0	1
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Ed ha quindi prodotto le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos	arriva a pos
qualsiasi	66	17	21
include primo	32	1	3
include 11-esimo	36	9	13
include 21-esimo	66	17	21

Problema 5 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

23	17	19	14	18	32	39	60	17	36	61	20	41	30	55	57	21	18	14	36	59	25	40	51	23

5.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(2pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 21. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

Crescente

$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
7	8	7	8	7	6	5	2	6	5	1	5	4	4	3	2	4	4	4	3	1	3	2	1	1
23	17	19	14	18	32	39	60	17	36	61	20	41	30	55	57	21	18	14	36	59	25	40	51	23
1	1	2	1	2	3	4	5	2	4	6	3	5	4	6	7	4	4	2	5	8	5	6	7	5
$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$

Crescente

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	8	17, 19, 32, 39, 41, 55, 57, 59
Z-sequenza	11	17, 19, 32, 39, 60, 61, 20, 30, 55, 57, 59
crescente con 21	7	14, 17, 20, 21, 36, 40, 51

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga V-sequenza oppure la più lunga V-sequenza (si veda il tema precedente per le definizioni)?

Provare per esercizio a determinare la più lunga V-sequenza.

Problema 6 (7 punti):

$$\max \; -x_1 - 3x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6.1(1pt) Impostare il problema ausiliario.

6.2(1pt) Scrivere il problema duale del problema originario.

6.3(1pt) Porre il problema duale in forma standard.

6.4(1pt) Risolvere il problema duale (in forma standard) con il metodo del simplesso.

6.5(1pt) Ricavare una soluzione primale ottima e specificarne il valore.

6.6(2pt) Per il problema primale, quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability del primo vincolo? (Per piccole variazioni.) E quanto per ogni unità di incremento per il secondo vincolo?

svolgimento.

Il problema ausiliario è il seguente (si veda la correzzione del tema scritto precedente per maggiori commenti sul problema ausiliario e suo utilizzo).

$$\max \; -x_0$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_0 \leq -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_0 \leq 4 \\ x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Il problema duale è invece il seguente problema di minimizzazione.

$$\min \; -5\,y_1 + 4\,y_2$$
$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \geq -1 \\ -5y_1 - y_2 \geq -3 \\ y_1 + 2y_2 \geq -1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Posto in forma standard, il problema duale diviene il seguente.

$$-\max \; 5\,y_1 - 4\,y_2$$
$$\begin{cases} -2y_1 - 2y_2 \leq 1 \\ 5y_1 + y_2 \leq 3 \\ -y_1 - 2y_2 \leq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$-\max \; 5\,y_1 - 4\,y_2$$
$$\begin{cases} w_1 = 1 + 2y_1 + 2y_2 \\ w_2 = 3 - 5y_1 - y_2 \\ w_3 = 1 + y_1 + 2y_2 \\ y_1, y_2, w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

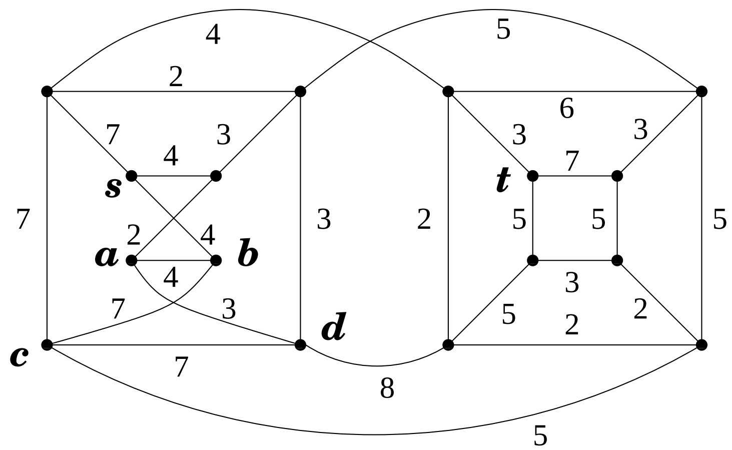
Si noti che il problema duale in forma standard è ad origine ammissibile, quindi possiamo partire direttamente con la seconda fase del metodo del simplesso (avremo potuto altresì avvalerci del metodo del simplesso duale applicato al problema primale originario). Il primo pivot porta la variabile y_1 in base e la w_2 è di necessità la variabile uscente.

$$-\max \; 3 - 5\,y_2 - w_2$$
$$\begin{cases} w_1 = \frac{11}{5} + \frac{8}{5}y_2 - \frac{2}{5}w_2 \\ y_1 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}y_2 - \frac{1}{5}w_2 \\ w_3 = \frac{8}{5} + \frac{9}{5}y_2 - \frac{1}{5}w_2 \\ y_1, y_2, w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia già ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi) e quindi in questo caso non sono necessari ulteriori passi di pivot. La soluzione di base duale ottima associata al dizionario è $y_1 = \frac{3}{5}$, $y_2 = 0$. Ma allo stesso dizionario è anche associata la soluzione di base primale ottima che è data da $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Ad entrambe (primale e duale) queste due soluzioni di base ottime corrisponde un valore di -3 per la funzione obiettivo.

Si noti che nella soluzione ottima la $y_2 = 0$, ossia la soluzione duale certifica l'ottimalità della soluzione primale anche senza fare ricorso al moltiplicatore del secondo vincolo. Ciò significa che non abbiamo alcun interesse a spostare il secondo vincolo. Invece, per ogni unità di incremento del termine noto del primo vincolo saremmo disposti a pagare $y_1 = \frac{3}{5}$ (almeno per piccoli incrementi).

Problema 7 (14 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



7.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

7.2.**(2pt)** Trovare un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo.

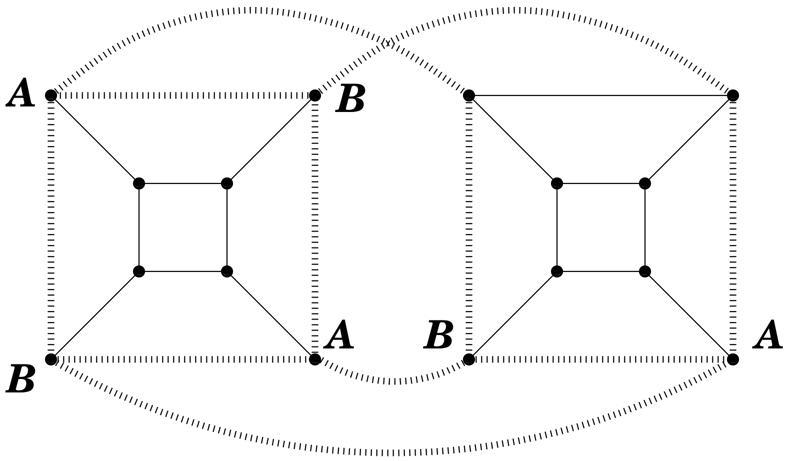
7.3.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

7.4.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

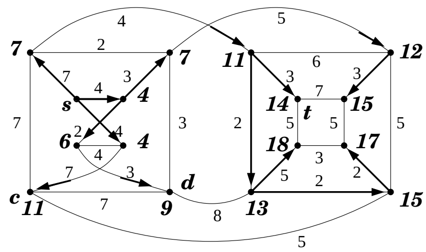
7.5.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

7.6.**(3pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

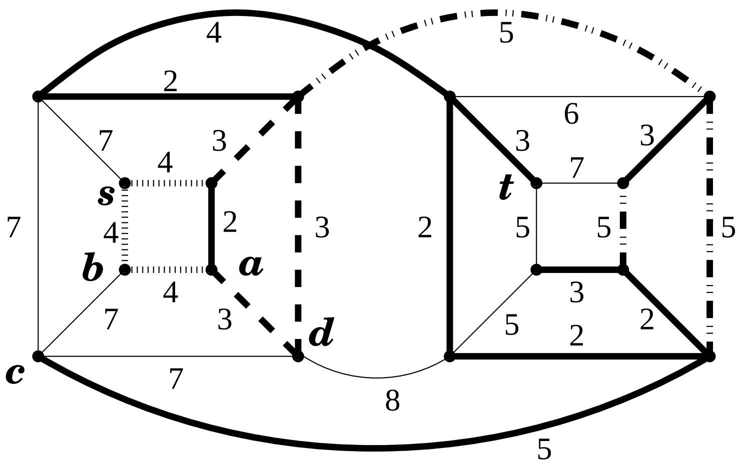
risposte.
Il fatto che G non sia planare può essere messo in evidenza esibendo la suddivisione di $K_{3,3}$ in figura.



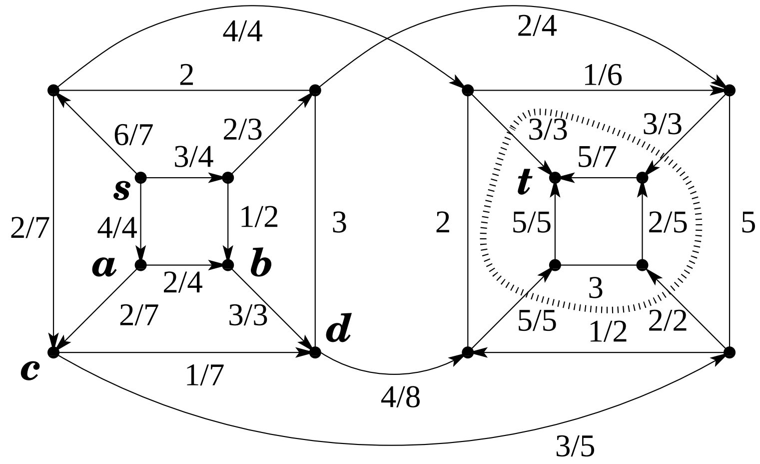
Un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo è riportato in figura.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono 27 alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 10 archi in linea spessa, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 3 ed in linea tratteggiata, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 4 ed in linea sfumata spessa, più 1 qualsiasi dei 3 archi di peso 5 ed in linea tratto-punteggiata.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 13 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 13 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.