Esame di Ricerca Operativa - 9 giugno 2009
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (2 punti):

Si consideri un classico problema dello zaino dove sono dati n oggetti, con ciascun oggetto $i = 1, 2, \ldots, n$ caraterizzato da un peso (o prezzo) p_i e da un valore (o ricavo) v_i. Dato un budget B, vogliamo trovare una sottocollezione di oggetti a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non possa eccedere il budget B.

Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI).

svolgimento.

Si introduca una variabile booleana $x_i \in \{0, 1\}$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, con l'idea che $x_i = 1$ significa che l'oggetto i viene preso mentre $x_i = 0$ significa che viene scartato.

L'obiettivo é quello di massimizzare la somma dei valori ossia

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \, ,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

limite imposto dal budget

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq B,$$

vincoli di booleanitá

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad x_i \text{ intera} \qquad \text{per ogni } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Problema 2 (5 punti):

La Loamed è un'azienda che produce snack. La disponibilità di materie prime, alla fine di gennaio, è la seguente: 550 kg di arachidi, 150 kg di pistacchi, 90 kg di mandorle e 70 kg di nocciole. Ogni scatola contiene 500 grammi di prodotto. La Loamed produce quattro tipi di snack, descritti di seguito:

prodotto	composizione	profitto (lire/scatola)
Mem	solo arachidi	260
Num	non piú del 50% di arachidi almeno il 10% di mandorle almeno il 15% di pistacchi	400
Pe	solo pistacchi	510
Qof	almeno il 30% di pistacchi almeno il 20% di mandorle almeno il 30% di nocciole	520

Supponendo che tutto quanto prodotto venga venduto, formulare come PL il problema di massimizzare il profitto della Loamed. Indicare poi dove l'eventuale aggiunta di qualche vincolo di interezza possa lievemente aumentare la precisione del modello.

svolgimento.
Il problema può essere formulato introducendo le seguenti variabili:

- x_{AM} = quantità di arachidi (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Mem;
- x_{AN} = quantità di arachidi (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Num;
- x_{MN} = quantità di mandorle (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Num;
- x_{NN} = quantità di nocciole (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Num;
- x_{PN} = quantità di pistacchi (in kg) utilizzati per produrre snack di tipo Num;
- x_{PP} = quantità di pistacchi (in kg) utilizzati per produrre snack di tipo Pe;
- x_{AQ} = quantità di arachidi (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Qof;
- x_{MQ} = quantità di mandorle (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Qof;
- x_{NQ} = quantità di nocciole (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Qof;
- x_{PQ} = quantità di pistacchi (in kg) utilizzati per produrre snack di tipo Qof;
- y_M = numero di scatole di snack di tipo Mem prodotte;
- y_N = numero di scatole di snack di tipo Num prodotte;
- y_P = numero di scatole di snack di tipo Pe prodotte;
- y_Q = numero di scatole di snack di tipo Qof prodotte.

Stiamo supponendo per semplicità che le variabili y_i non siano vincolate ad essere intere. L'obiettivo é quello di massimizzare i ricavi sulla vendita dei quattro tipi di confezioni ossia

$$\max R \quad = \quad 260\, y_M + 400\, y_N + 510\, y_P + 520\, y_Q \,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$y_M, y_N, y_A, y_B, x_{AM}, x_{AN}, x_{MN}, x_{NN}, x_{PN}, x_{PP}, x_{AQ}, x_{MQ}, x_{NQ}, x_{PQ} \geq 0.$$

vincoli sulla composizione

$$x_{AM} = 0,5\, y_M$$
$$x_{AN} + x_{MN} + x_{PN} + x_{NN} = 0,5\, y_N$$
$$x_{PP} = 0,5\, y_P$$
$$x_{AQ} + x_{MQ} + x_{NQ} + x_{PQ} = 0,5\, y_Q$$
$$x_{AN} \leq 0,25\, y_N$$
$$x_{MN} \geq 0,05\, y_N$$
$$x_{PN} \geq 0,075\, y_N$$
$$x_{MQ} \geq 0,1\, y_Q$$
$$x_{NQ} \geq 0,15\, y_Q$$
$$x_{PQ} \geq 0,15\, y_Q$$

disponibilitá di materie prime

$$x_{AM} + x_{AN} + x_{AQ} \leq 550$$
$$x_{PP} + x_{PN} + x_{PQ} \leq 150$$
$$x_{MN} + x_{MQ} \leq 90$$
$$x_{NN} + x_{NQ} \leq 70$$

Ovviamente i vincoli di non negativitá $y_M, y_N, y_A, y_B \geq 0$ possono essere omessi. Introducendo il vincolo di interezza per le sole 4 variabili y_M, y_N, y_A e y_B otteniamo soluzioni intere ottime che possono essere messe in pratica senza arrotondamenti (con conseguente rischio di perdita di precisione nella soluzione del modello matematico intero).

Problema 3 (4 punti):

Il padre di Jasmine le ha chiesto di trovare, nel seguente array di interi, un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **massima**.

-4	6	-39	31	-16	12	-27	5	-9	12	-48	46	-21	34	-11	55	-27	8	-54	30	-23	9	-5	10	-10	17	-4

Jasmine ha allora compilato la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$
0	6			15	27	0	5	0		0	46	25	59				84	30	60	37	46	41	51			54
-4	6	-39	31	-16	12	-27	5	-9	12	-48	46	-21	34	-11	55	-27	8	-54	30	-23	9	-5	10	-10	17	-4
26	30			32		36	63	58			103	57	78	44				0	30	0	21	12		7	17	0
$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$

Ed ha quindi prodotto le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos	arriva a pos
qualsiasi			
include 19-esimo			
include ultimo			
include quarto			
include 6^o e 10^o			

Tuttavia il topino Aladino ha rosicchiato parti delle tabelle. Aiuta Jasmine a ricostruirle, senza dimenticare le risposte!

svolgimento. Per lo svolgimento si seguono i soliti metodi (algoritmi). Riportiamo solamente le tabelle completamente compilate.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
0	6	0	31	15	27	0	5	0	12	0	46	25	59	48	103	76	84	30	60	37	46	41	51	41	58	54
-4	6	-39	31	-16	12	-27	5	-9	12	-48	46	-21	34	-11	55	-27	8	-54	30	-23	9	-5	10	-10	17	-4
26	30	24	63	32	48	36	63	58	67	55	103	57	78	44	55	0	8	0	30	0	21	12	17	7	17	0
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Ed ha quindi prodotto le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da	arriva a
qualsiasi	103	12	16
include 19-esimo	60	12	20
include ultimo	54	12	27
include quarto	63	4	16
include 6^o e 10^o	63	4	16

Problema 4 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

1	14	8	2	4	21	28	48	5	26	49	9	32	19	12	46	10	7	3	25	11	6	29	39	44	13

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) Una sequenza è detta una V-sequenza se cala fino ad un certo punto, e da lì in poi cresce sempre. Trovare la più lunga V-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.4(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 7. Specificare quanto è lunga e fornirla.

svolgimento. Per poter rispondere alle prime 3 domande compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

CRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
10	6	7	9	8	5	4	2	7	4	1	6	3	5	5	1	5	5	5	4	4	4	3	2	1	1
1	14	8	2	4	21	28	48	5	26	49	9	32	19	12	46	10	7	3	25	11	6	29	39	44	13
1	1	2	3	3	1	1	1	3	2	1	3	2	3	4	2	5	6	7	3	5	7	3	3	3	4
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

DECRESCENTE

Infine, per rispondere all'ultima domanda, computo partendo da destra un'ulteriore sequenza di valori come riportati in neretto nella seguente tabella.

CRESCENTE

$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
10	6	7	9	8	5	4	2	7	4	1	6	3	5	5	1	5	5	5	4	4	4	3	2	1	1
1	14	8	2	4	21	28	48	5	26	49	9	32	19	12	46	10	7	3	25	11	6	29	39	44	13
1	**2**	**2**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**4**	**5**	**7**	**5**	**6**	**6**	**6**	**7**	**6**	**5**	**3**	**7**	**7**	**5**	**8**	**9**	**10**	**8**
$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$

CRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	10	1, 2, 4, 5, 9, 19, 25, 29, 39, 44
decrescente	7	48, 32, 19, 12, 10, 7, 6
V-sequenza	11	48, 32, 19, 12, 10, 7, 3, 25, 29, 39, 44
crescente con 7	9	1, 2, 4, 5, 7, 11, 29, 39, 44

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga A-sequenza? (Una sequenza è detta una A-sequenza se cresce fino ad un certo punto, e da lì in poi cala sempre.)

Problema 5 (5 punti):
Si utilizzi un approccio di branch & bound per risolvere il seguente problema di PLI.

$$\max\ z = 6x_1 + 8x_2$$
$$\begin{cases} 2\,x_1 \quad + \ x_2 \leq \quad 8 \\ 2\,x_1 \quad +3\,x_2 \leq \quad 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad x_1, x_2 \text{ intere.} \end{cases}$$

Indicazioni. Si faccia branch sulle varibili con valore piú lontano da un intero, optando per le variabili di indice minimo in caso di paritá. Quando si generano due figli, si esplori dapprima il figlio ottenuto aggiungendo un vincolo del tipo $x_i \leq \lfloor \tilde{x}_i \rfloor$ e nell'esplorazione dell'albero si adotti una politica DFS (Depth First Search). Se l'upper bound proveniente dal rilassamento lineare dovesse risultare inferiore al lower bound attuale incrementato di uno (indicando che la miglior soluzione per il problema associato al nodo corrente non puó comunque migliorare la miglior soluzione incontrata fino a quel momento) il nodo corrente viene abortito (fathoming). Si specifichi, ad ogni nodo dell'albero di branch & bound, quale problema di PL venga risolto, quale ne sia la soluzione ottima (fornendone certificato di ottimalitá), e se e quali nodi figlio vengano prodotti.
svolgimento.

nodo root primo nodo aperto, ultimo chiuso (ottavo chiuso)

lower bound iniziale nessuno.
problema da risolvere

$$\max\ z = 6x_1 + 8x_2$$
$$\begin{cases} 2\,x_1 \quad + \ x_2 \quad \leq \quad 8 \\ 2\,x_1 \quad +3\,x_2 \quad \leq \quad 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad x_1, x_2 \text{ intere.} \end{cases}$$

soluzione ottima del rilassamento frazionario $\tilde{x}_1 = \frac{9}{4}$, $\tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$, $z = 6\frac{9}{4} + 8\frac{7}{2} = \frac{83}{2}$.

prova ottimalitá $z = 6x_1 + 8x_2 \leq \frac{1}{2}(2\,x_1 + x_2) + \frac{5}{2}(2\,x_1) \leq \frac{1}{2}(8) + \frac{5}{2}(15) \leq \frac{83}{2}$.

primo figlio figlio L (left) ottenuto aggiungendo il vincolo $x_2 \leq 3$

lower bound dopo primo figlio $z \geq 36$.

secondo figlio figlio R (right) ottenuto aggiungendo il vincolo $x_2 \geq 4$.

nodo root.L secondo nodo aperto, terzo chiuso

lower bound iniziale nessuno.
problema da risolvere

$$\max\; z = 6x_1 + 8x_2$$
$$\begin{cases} 2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ 2\,x_1 & + 3 & x_2 & \leq & 15 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0 \quad x_1, x_2 \text{ intere.}} \end{cases}$$

soluzione ottima del rilassamento frazionario $\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}$, $\tilde{x}_2 = 3$, $z = 6\frac{5}{2}+8\cdot 3 = 39$.

prova ottimalitá $z = 6x_1 + 8x_2 \leq 3(2\,x_1 + x_2) + 5(x_2) \leq 3(8) + 5(3) \leq 39$.

primo figlio figlio root.L.L ottenuto aggiungendo il vincolo $x_1 \leq 2$

lower bound dopo primo figlio $z \geq 36$.

secondo figlio figlio root.L.R ottenuto aggiungendo il vincolo $x_1 \geq 3$.

nodo root.L.L terzo nodo aperto, primo chiuso

lower bound iniziale nessuno.
problema da risolvere

$$\max\; z = 6x_1 + 8x_2$$
$$\begin{cases} 2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ 2\,x_1 & + 3 & x_2 & \leq & 15 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & & & \leq & 2 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0 \quad x_1, x_2 \text{ intere.}} \end{cases}$$

soluzione ottima del rilassamento frazionario $\tilde{x}_1 = 2$, $\tilde{x}_2 = 3$, $z = 6\cdot 2+8\cdot 3 = 36$.

prova ottimalitá $z = 6x_1 + 8x_2 \leq 6(x_1) + 8(x_2) \leq 6 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 36$.

soluzione ottima $\tilde{x}_1 = 2$, $\tilde{x}_2 = 3$, $z = 36$.

figli nessuno poichè il nodo corrente è risolto all'ottimo.

nodo root.L.R quarto nodo aperto, secondo chiuso

lower bound iniziale $z \geq 36$.
problema da risolvere

$$\max\; z = 6x_1 + 8x_2$$
$$\begin{cases} 2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ 2\,x_1 & + 3 & x_2 & \leq & 15 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & & & \geq & 3 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0 \quad x_1, x_2 \text{ intere.}} \end{cases}$$

soluzione ottima del rilassamento frazionario $\tilde{x}_1 = 3$, $\tilde{x}_2 = 2$, $\tilde{x}_3 = 0$, $z = 6 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 34$.

prova ottimalitá $z = 6x_1 + 8x_2 \leq 8(2\,x_1 + x_2) - 10(x_1) \leq 8(8) - 10(3) = 34$.

soluzione ottima $\tilde{x}_1 = 3$, $\tilde{x}_2 = 2$, $z = 34$.

figli nessuno poichè il nodo corrente è risolto all'ottimo.

nodo root.R quinto nodo aperto, settimo e penultimo chiuso

lower bound iniziale $z \geq 36$.
problema da risolvere

$$\max\ z = 6x_1 + 8x_2$$
$$\begin{cases} 2\,x_1 & + \ x_2 & \leq & 8 \\ 2\,x_1 & +3\,x_2 & \leq & 15 \\ & x_2 & \geq & 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 & x_1, x_2 & \text{intere.} \end{cases}$$

soluzione ottima del rilassamento frazionario $\tilde{x}_1 = \frac{3}{2}$, $\tilde{x}_2 = 4$, $z = 6\frac{3}{2} + 8 \cdot 4 = 41$.

prova ottimalitá $z = 6x_1 + 8x_2 \leq 3(2\,x_1 + 3\,x_2) - (x_2) \leq 3(15) - (4) = 41$.

primo figlio figlio root.R.L ottenuto aggiungendo il vincolo $x_1 \leq 1$

lower bound dopo primo figlio $z \geq 41$.

fathoming del secondo figlio poichè 41 é il piú grande intero che non supera $\frac{124}{3} = 41.333$.

nodo root.R.L sesto nodo aperto, e sesto chiuso

lower bound iniziale $z \geq 36$.
problema da risolvere

$$\max\ z = 6x_1 + 8x_2$$
$$\begin{cases} 2\,x_1 & + \ x_2 & \leq & 8 \\ 2\,x_1 & +3\,x_2 & \leq & 15 \\ & x_2 & \geq & 4 \\ x_1 & & \leq & 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 & x_1, x_2 & \text{intere.} \end{cases}$$

soluzione ottima del rilassamento frazionario $\tilde{x}_1 = 1$, $\tilde{x}_2 = \frac{13}{3}$, $z = 6 + 8 \cdot \frac{13}{3} = \frac{122}{3} = 40,666$.

prova ottimalitá $z = 6x_1 + 8x_2 \leq \frac{8}{3}(2\,x_1 + 3\,x_2) + \frac{2}{3}(x_1) \leq \frac{8}{3}(15) + \frac{2}{3}(1) \leq \frac{122}{3} = 40,666$.

primo figlio figlio root.R.L.L ottenuto aggiungendo il vincolo $x_2 \leq 4$ (percui $x_2 = 4$)

lower bound dopo primo figlio $z \geq 38$.

secondo figlio figlio root.R.L.R ottenuto aggiungendo il vincolo $x_2 \geq 5$.

nodo root.R.L.L settimo nodo aperto, quarto chiuso

lower bound iniziale $z \geq 36$.

problema da risolvere

$$\max \ z = 32 + 6x_1$$
$$\begin{cases} 2\,x_1 & \leq & 4 \\ 2\,x_1 & \leq & 3 \\ x_1 & \leq & 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 & x_1, x_2 & \text{intere.} \end{cases}$$

soluzione ottima del rilassamento frazionario $\tilde{x}_1 = 1$, $z = 32 + 6 \cdot 1 = 38$.

prova ottimalitá $z = 32 + 6x_1 \leq 32 + 6(1) = 38$.

figli nessuno poichè il nodo corrente è risolto all'ottimo.

nodo root.R.L.R ottavo nodo aperto, quinto chiuso

lower bound iniziale $z \geq 38$.
problema da risolvere

$$\max \ z = 6x_1 + 8x_2$$
$$\begin{cases} 2\,x_1 & + \ x_2 & \leq & 8 \\ 2\,x_1 & +3\,x_2 & \leq & 15 \\ & x_2 & \geq & 5 \\ x_1 & & \leq & 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 & x_1, x_2 & \text{intere.} \end{cases}$$

soluzione ottima del rilassamento frazionario $\tilde{x}_1 = 0$, $\tilde{x}_2 = 5$, $z = 8 \cdot 5 = 40$.

prova ottimalitá $z = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \leq 3(2\,x_1 + 3\,x_2) - (x_2) \leq 3(15) - (5) = 40$.

soluzione ottima $\tilde{x}_1 = 0$, $\tilde{x}_2 = 5$, $z = 40$.

In conclusione, la soluzione ottima del problema di partenza é: $\tilde{x}_1 = 0$, $\tilde{x}_2 = 5$, $z = 40$.

Problema 6 (4 punti):
Il topino Aladino, dotato di uno zaino di capacità $B = 36$, ha compilato la Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino che puoi trovare di seguito.

Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$F(4,10)$	0	·	·	·	10	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$I(5,8)$	0	·	·	·	10	8	·	·	·	18	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$T(5,12)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	·	30	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$O(9,22)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	·	·	·		42	·	·	·	52	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$S(13,24)$	0	·	·	·			·	·	·	22	20	·	·	32	34	·	·			42	·	·	46	52	·	·	56		·	·	·	68	66	·	·	·	
$A(13,26)$	0	·	·	·			·	·	·	22	20	·	·	32	34	·	·		44	42	·	·	48	52	·	·			·	·	60	70	68	·	·	72	
$P(15,24)$	0	·	·	·			·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·		44	42	36	·			46	44	58	60	56		60	70	68	68	66	72	
$Q(17,40)$	0	·	·	·			·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·		44	42	36	50			46	44		60	56	58	72	74	68	68	76	84	
$B(22,42)$	0	·	·	·			·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	40	44	42	36	50	52		46	44	62	60	56	58	72	74	68	68	76	84	
$R(24,44)$	0	·	·	·			·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	40	44	42	36	50	52	52	46	44	62	60	56	58	72	74	68	68	76	84	

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	F	I	T	O	S	A	P	Q	B	R
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	10	8	12	22	24	26	24	40	42	44

Sulla base di tale tabella, Aladino ha fornito le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
36			
26			
33			
22			

Tuttavia il topino ha erroneamente rosicchiato via alcune parti delle tabelle. Aiutalo a ricostruirle, senza dimenticare le risposte!

svolgimento. Per lo svolgimento si seguono i soliti metodi (algoritmi). Riportiamo solamente le tabelle compilate.

Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$F(4,10)$	0	·	·	·	10	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$I(5,8)$	0	·	·	·	10	8	·	·	·	18	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$T(5,12)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	·	30	·	·	·	·
$O(9,22)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	·	·	·	44
$S(13,24)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	·	·	34	44
$A(13,26)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	·	·	36	44
$P(15,24)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	36	44
$Q(17,40)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	40	44
$B(22,42)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	40	44
$R(24,44)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	40	44

	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$F(4,10)$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$I(5,8)$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$T(5,12)$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$O(9,22)$	42	·	·	·	52	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$S(13,24)$	42	·	·	46	52	·	·	56	58	·	·	·	68	66	·	·	·	76
$A(13,26)$	42	·	·	48	52	·	·	58	60	·	·	60	70	68	·	·	72	78
$P(15,24)$	42	36	·	48	52	46	44	58	60	56	58	60	70	68	68	66	72	78
$Q(17,40)$	42	36	50	52	52	46	44	62	60	56	58	72	74	68	68	76	84	82
$B(22,42)$	42	36	50	52	52	46	44	62	60	56	58	72	74	68	68	76	84	82
$R(24,44)$	42	36	50	52	52	46	44	62	60	56	58	72	74	68	68	76	84	82

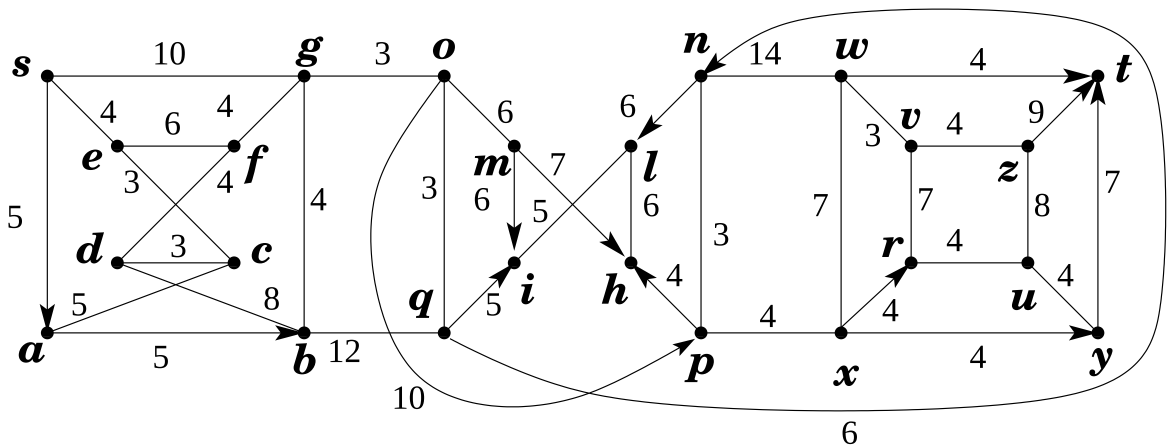
(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	F	I	T	O	S	A	P	Q	B	R
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	10	8	12	22	24	26	24	40	42	44

Sulla base di tale tabella, Aladino ha fornito le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
36	84=40+22+12+10	35=17+9+5+4	Q,O,T,F
26	62=40+12+10	26=17+5+4	Q,T,F
33	74=40+22+12	31=17+9+5	Q,O,T
22	52=40 +12	22=17+5	Q,T

Problema 7 (15 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

5.2.**(3pt)** Trovare un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo.

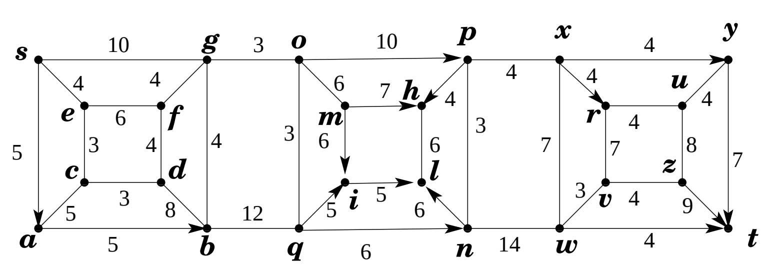
5.3.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.4.**(3pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

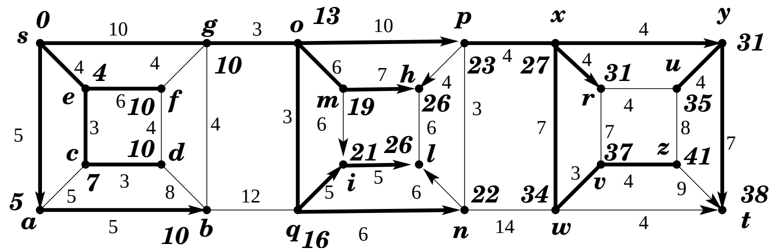
5.5.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.6.**(3pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

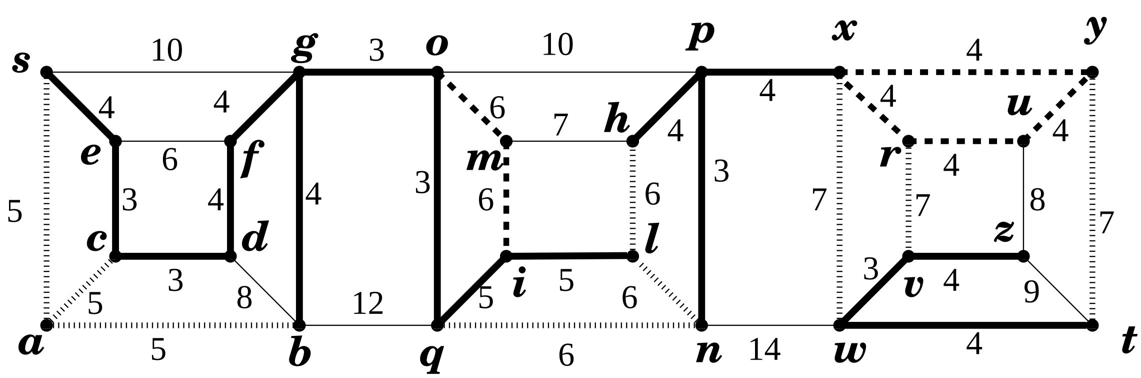
risposte.
Il grafo è planare: un suo planar embedding è fornito in figura.



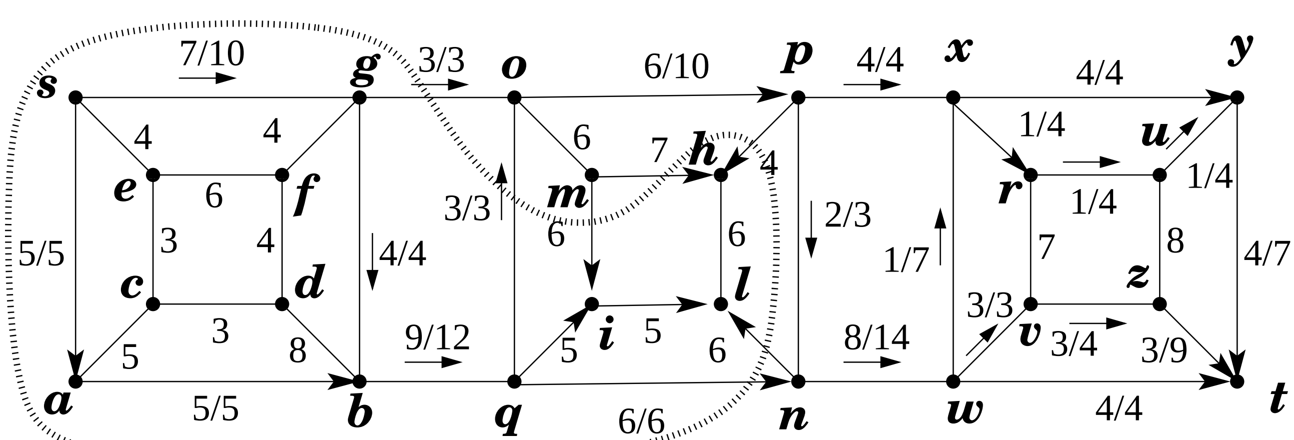
Un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo è riportato in figura.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 216$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 16 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 incidenti al nodo m (i 2 archi in linea tratteggiata), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi qn, nl, lh), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra, più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 4 in linea tratteggiata nella zona a destra, più uno qualsisiasi dei 3 tra archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 12 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 12 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Problema 8 (6 punti):

Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = 5$, $x_4 = 10$, $x_5 = 14$ del seguente problema.

$$
\max\ x_1 + 6x_2 + C_3x_3 + 11x_4 + 5x_5 + C_6x_6
$$
$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\
x_3 + x_4 + x_6 \leq 10 \\
x_5 + x_6 \leq 14 \\
x_1 + 2\,x_3 + x_5 + 2\,x_6 \leq 20 \\
x_2 + x_4 + x_6 \leq 15 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{cases}
$$

1.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

1.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

1.3.**(1pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

1.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

1.5.**(1pt)** Per quali valori dei parametri C_3 e C_6 la soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

svolgimento. Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$
\begin{cases}
(6) + (5) + (0) = 11 \leq 12 \\
(0) + (10) + (0) = \mathbf{10} \leq 10 \\
+(14) + (0) = \mathbf{14} \leq 14 \\
(6) + 2 \cdot (0) + (14) + 2 \cdot (0) = \mathbf{20} \leq 20 \\
(5) + (10) + (0) = \mathbf{15} \leq 15
\end{cases}
$$

Il problema duale è il seguente.

$$
\min\ 12\,y_1 + 10\,y_2 + 14\,y_3 + 20\,y_4 + 15\,y_5
$$
$$
\begin{cases}
y_1 + y_4 \geq 1 \\
y_1 + y_5 \geq 6 \\
y_1 + y_2 + 2\,y_4 \geq C_3 \\
y_2 + y_5 \geq 11 \\
y_3 + y_4 \geq 5 \\
y_2 + y_3 + 2\,y_4 + y_5 \geq C_6 \\
y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
\end{cases}
$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_1 = 0$ poichè il vincolo 1 del primale non è soddisfatto ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_1, x_2, x_4, x_5 > 0$, i vincoli 1,2,4 e 5 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\begin{cases} y_4 = 1 \\ y_5 = 6 \\ y_2 + y_5 = 11 \\ y_3 + y_4 = 5 \end{cases}$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $(0, 5, 4, 1, 6)$. Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. È evidente che tutte le variabili assumono valore non negativo, ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 3 e 6).

La soluzione primale assegnata sarà ottina se e solo se la soluzione duale ad essa complementare soddisfa tutti i vincoli, ed in particolare anche i vincoli 3 e 6, ossia se vale che $y_1 + y_2 + 2y_4 = 7 \geq C_3$ (terzo vincolo) e $y_2 + y_3 + 2\,y_4 + y_5 = 17 \geq C_6$ (sesto vincolo). Possiamo concludere che la soluzione primale assegnata **è ottima se e solo se** $C_3 \leq 7$ e $C_6 \leq 17$.