Esame di Ricerca Operativa - 17 luglio 2008
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (5 punti):

Si consideri la soluzione $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 = 10$, $x_3 = 14$, $x_5 = 6$, $x_6 = 5$ del seguente problema.

$$\max\ 12x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 10x_4 + x_5 + 6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 14 \\ x_5 + x_6 \leq 12 \\ x_1 + x_3 + x_5 \leq 20 \\ x_2 + x_4 + x_6 \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

1.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

1.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

1.3.**(1pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

1.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

1.5.**(1pt)** La soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

svolgimento. Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$\begin{cases} (0) + (10) = \mathbf{10} \leq 10 \\ (14) + (0) = \mathbf{14} \leq 14 \\ (6) + (5) = 11 \leq 12 \\ (0) + (14) + (6) = \mathbf{20} \leq 20 \\ (10) + (0) + (5) = \mathbf{15} \leq 15 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente.

$$\min\ 10\,y_1 + 14\,y_2 + 12\,y_3 + 20\,y_4 + 15\,y_5$$
$$\begin{cases} y_1 + y_4 \geq 12 \\ y_1 + y_5 \geq 20 \\ y_2 + y_4 \geq 10 \\ y_2 + y_5 \geq 10 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_3 = 0$ poichè il vincolo 3 del primale non è soddisfatto ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_2, x_3, x_5, x_6 > 0$, i vincoli 2,3,5 e 6 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\begin{cases} y_1 + y_5 = 20 \\ y_2 + y_4 = 10 \\ y_4 = 1 \\ + y_5 = 6 \end{cases}$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $(14, 9, 0, 1, 6)$. Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. È evidente che tutte le variabili assumono valore non negativo, ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 1 e 4).

Poichè la semplice verifica (per sostituzione) ha esito affermativo, possiamo concludere che la soluzione primale assegnata **è ottima**.

Problema 2 (4 punti):

Sia $B = 36$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
peso	4	15	22	52	27	9	29	23	5	47	48	20	13	17	24	22	5	13	17
valore	5	12	21	30	20	11	16	20	6	71	32	10	13	20	22	21	4	12	16

2.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 36$)? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 25$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 34$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 21$?

svolgimento. Dapprima ordino gli oggetti forniti in input per peso crescente, e mi sbarazzo degli oggetti il cui peso eccede 36, ottenendo:

nome	A	S	I	F	T	O	B	U	P	H	R	C	N	Q	G	E
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	17	20	22	22	23	24	27	28
valore	5	4	6	11	12	13	12	16	20	10	21	21	20	22	20	15

Ovviamente non potró mai prendere in una soluzione due elementi entrambi di peso almeno 17, visto che U e P esauriscono da soli la capacità dello zaino (non posso aggiungere nemmeno l'elemento più leggero A) totalizzando solo 36 mentre A, B e P raccolgono più valore con lo stesso ingombro. E quindi posso sempre preferire di prendere P piuttosto che non U, o H, o N, o G, o E. Analogamente, posso rinunciare sempre a C visto che eventualmente lo posso sostituire con R (nessuna soluzione li puó contenere entrambi). Con questo ho ridotto i miei candidati ai seguenti:

nome	A	S	I	F	T	O	B	P	R	Q
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	13	12	20	21	22

A questo punto compilo la tabella di programmazione dinamica che riportata all'ultima pagina del presente documento.

Sulla base di tale tabella, possiamo fornire le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
36	42=20+11+6+5	35=17+9+5+4	P,F,I,A
25	26=20+6	22=17+5	P,I
34	38=20+13+5	34=17+13+4	P,O,A
21	25=20 +5	21=17+4	P,A

Problema 3 (4 punti):

Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia massima.

5	-1	4	-5	27	-8	33	-20	23	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	21	-13	24	-39	25

3.1(1pt) quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di partire dal primo elemento?

3.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 18-esimo elemento?

3.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere sia il 14-esimo che il 16-esimo elemento?

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
5	4	8	3	30	22	55	35	58	27	43	11	15	0	39	17	23	15	36	2	13	0	21	8	32	0	25
5	-1	4	-5	27	-8	33	-20	23	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	21	-13	24	-39	25
58	53	54	50	55	28	36	3	23	0	16	0	28	24	39	0	19	13	21	0	11	0	32	19	24	0	25
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi	58	1	9	5	23
include primo	58	1	9	5	23
include 18-esimo	36	15	19	39	21
include 14-esimo e 16-esimo	25	13	19	4	21

Problema 4 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

17	22	24	18	20	37	44	68	21	41	67	25	47	35	60	62	26	23	19	41	61	30	45	55	28

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(2pt) una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 47. Specificare quanto è lunga e fornirla.

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

Crescente

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
9	7	6	8	7	5	4	1	6	4	1	5	3	4	2	1	4	4	4	3	1	3	2	1	1
17	22	24	18	20	37	44	68	21	41	67	25	47	35	60	62	26	23	19	41	61	30	45	55	28
1	2	3	2	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6	7	8	6	5	3	7	8	7	8	9	7
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

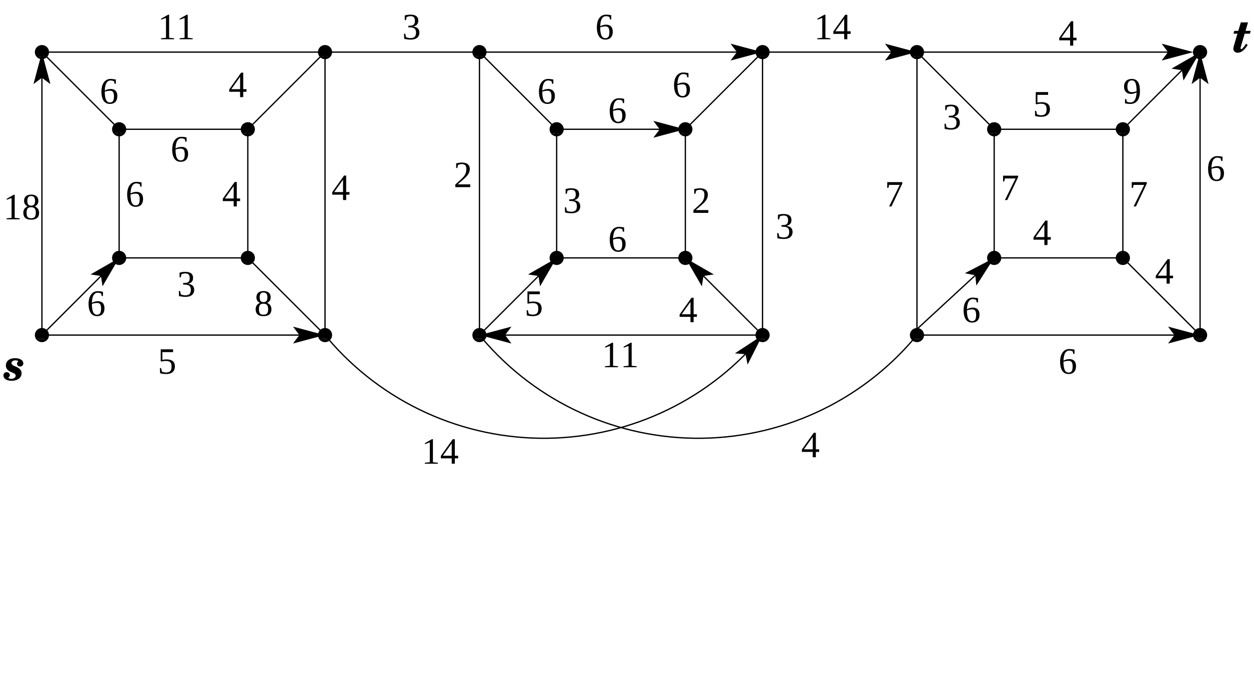
Crescente

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	9	17, 18, 20, 21, 25, 35, 41, 45, 55
N-sequenza	12	17, 18, 20, 37, 44, 68, 21, 25, 35, 41, 45, 55
crescente con 47	8	17, 18, 20, 21, 25, 47, 60, 62

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga V-sequenza?

Problema 5 (17 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

5.2.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.3.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.4.**(2pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s.

5.5.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

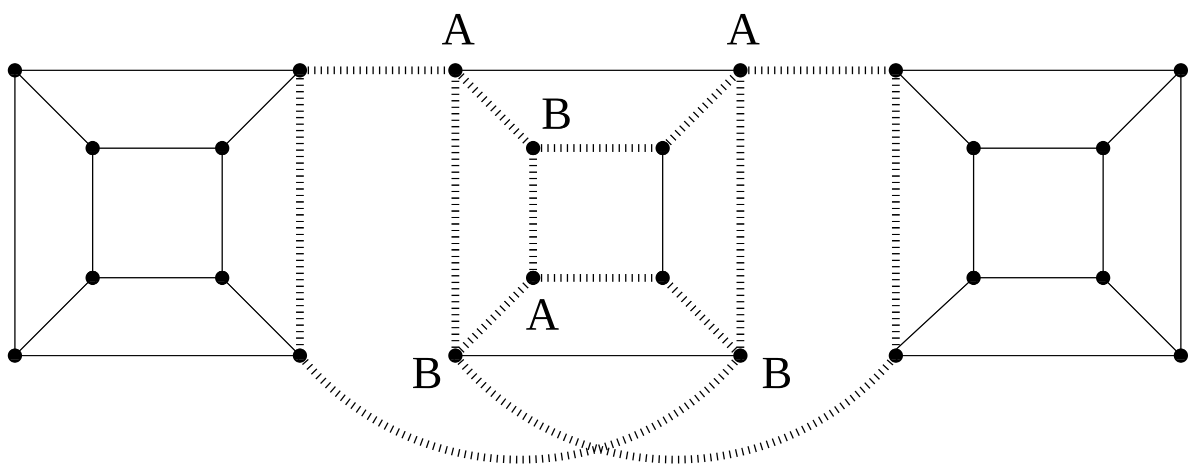
5.6.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.7.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

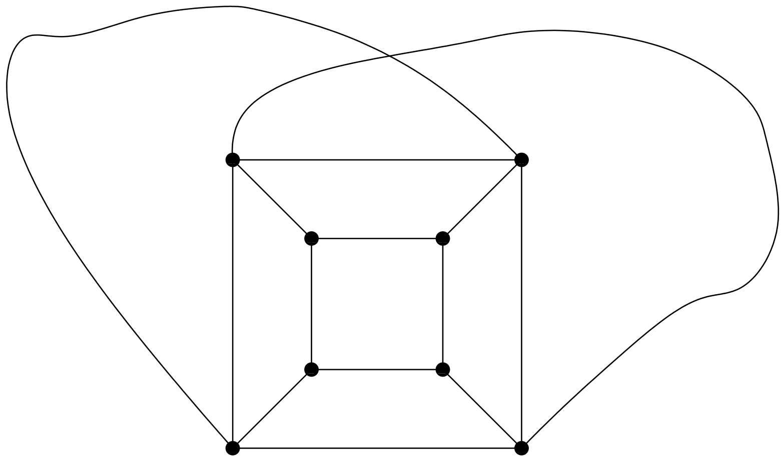
5.8.**(2pt)** Dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda il grafo bipartito fornendo sia certificato (1pt) del fatto che il grafo ottenuto a seguito della rimozione è bipartito sia certificato (1pt) del fatto che la rimozione di un numero minore di archi non poteva bastare.

risposte.

Il fatto che G non sia planare può essere messo in evidenza esibendo la suddivisione di $K_{3,3}$ in figura.

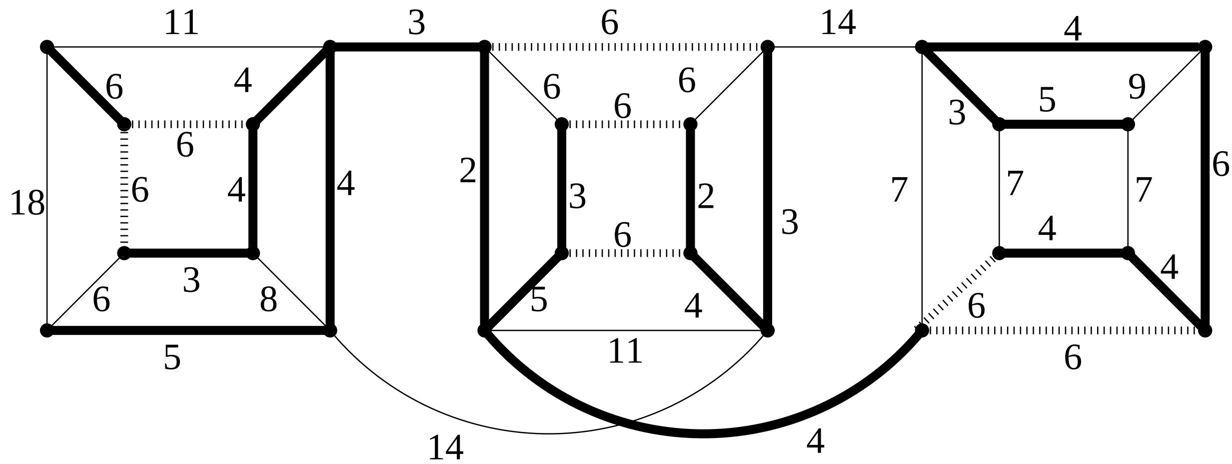


Nella ricerca di tale certificato (o di un planar embedding), poteva sicuramente aiutare la considerazione che G è planare se e solo se lo è anche il seguente grafo G'.

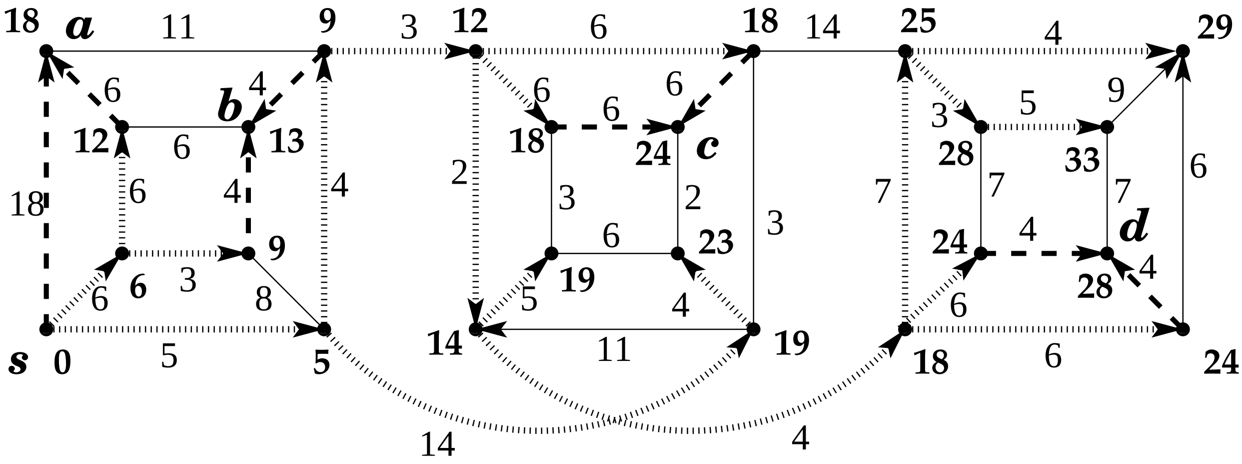


Tale grafo non sembra planare, e tuttavia non può contenere una suddivisione di K_5 visto che ha solo 4 nodi di grado almeno 4. Si era quindi indotti alla ricerca di una suddivisione di $K_{3,3}$. Una volta trovata una suddivisione di $K_{3,3}$ in G' era facile derivarne una suddivisione di $K_{3,3}$ in G.

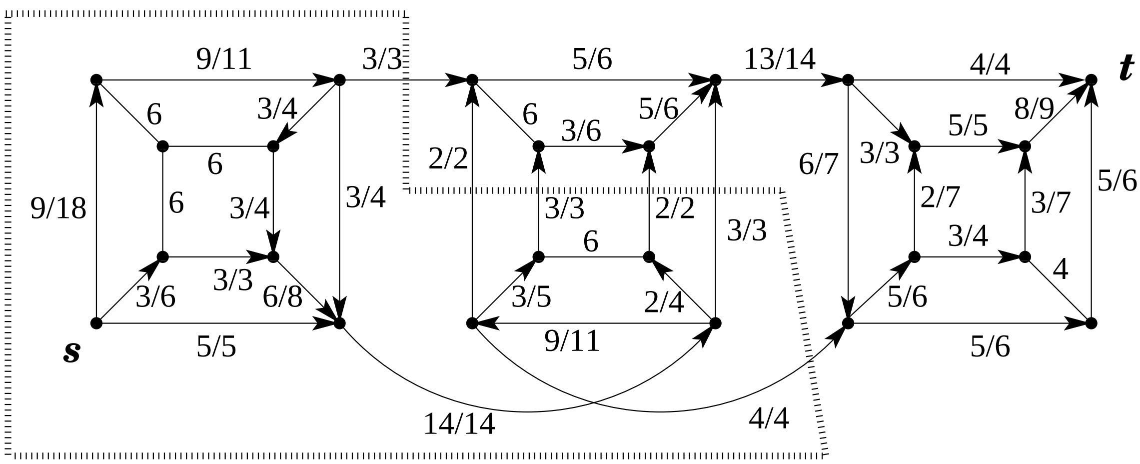
La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono 12 alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 20 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra, più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo s. Ci sono $2^4 = 16$ alberi dei cammini minimi dal nodo s e ciascuno di essi include i 19 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo a, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo b, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo c e uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo d.

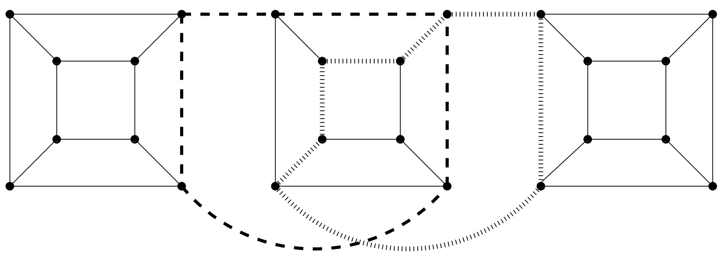


La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.

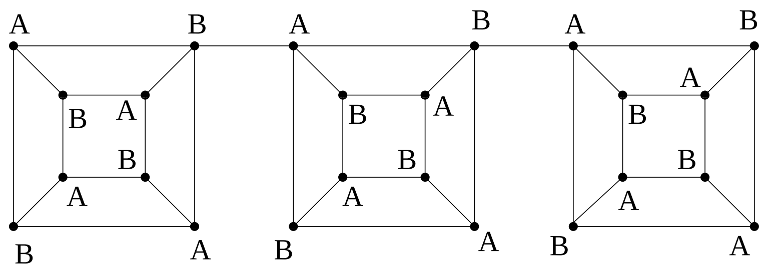


Il flusso ha valore 17 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 6 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 17 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Occorre rimuovere almeno 2 archi per rendere G bipartito dato che esso contiene 2 circuiti dispari disgiunti sugli archi come evidenziato in figura.



Di converso, con la rimozione di 2 soli archi possiamo rendere G bipartito come evidenziato in figura.



Problema 6 (4 punti):
Un'azienda chimica produce quattro tipi di colla, A, B, C, D, utilizzando 3 materie prime P_1, P_2 e P_3. Per la produzione della colla D, inoltre, sono impiegate anche una certa quantità di A e di B come specificato in tabella.

Colla	P_1	P_2	P_3	A	B
A	0,2	0,4	0,3	-	-
B	0,4	0,1	0,2	-	-
C	0,2	0,5	0,1	-	-
D	0,1	0,1	0,2	0,1	0,3

Per il prossimo mese sono stati acquistati 1.000, 1.500 e 750 Kg di P_1, P_2 e P_3, rispettivamente. Nella tabella seguente sono riportati rispettivamente i profitti (in Euro per Kg di prodotto) di vendita per ogni tipo di colla.

	A	B	C	D
profitto	2	$2,5$	$2,5$	3

Formulare il problema di pianificare la produzione del prossimo mese in modo da massimizzare il profitto, sapendo che la quantità di colla D prodotta non deve essere superiore a 500 Kg.

svolgimento.
Per $i = A, B, C, D$, denotiamo con x_i la quantità (in Kg) di colla di tipo i da prodursi nel prossimo mese al fine di essere venduta. L'obiettivo é quello di massimizzare i ricavi sulla vendita, ossia

$$\max R \quad = \quad 2\,x_A + 2,5\,x_B + 2,5\,x_C + 3\,x_D\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$x_A, x_B, x_C, x_D \geq 0.$$

limite sulla quantità di colla D

$$x_D \leq 500.$$

disponibilitá di materie prime

$$\begin{array}{ll}
(P_1) & 0,2\,x_A + \ 0,4\,x_B + \ 0,2\,x_C + \ (0,1 + 0,1 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4)\,x_D \leq 1.000, \\
(P_2) & 0,4\,x_A + \ 0,1\,x_B + \ 0,5\,x_C + \ (0,1 + 0,1 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,1)\,x_D \leq 1.500, \\
(P_3) & 0,3\,x_A + \ 0,2\,x_B + \ 0,1\,x_C + \ (0,2 + 0,1 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,2)\,x_D \leq 750.
\end{array}$$

Riscriviamo questi tre ultimi vincoli:

$$\begin{array}{ll}
(P_1) & 0,2\,x_A + \ 0,4\,x_B + \ 0,2\,x_C + \ 0,24\,x_D \leq 1.000, \\
(P_2) & 0,4\,x_A + \ 0,1\,x_B + \ 0,5\,x_C + \ 0,17\,x_D \leq 1.500, \\
(P_3) & 0,3\,x_A + \ 0,2\,x_B + \ 0,1\,x_C + \ 0,29\,x_D \leq 750.
\end{array}$$

Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$A(4,5)$	0	·	·	·	5	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$S(5,4)$	0	·	·	·	5	4	·	·	·	9	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$I(5,6)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	·	15	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$F(9,11)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	·	22	21	·	·	·	26	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$T(13,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	17	22	21	·	·	23	26	·	·	28	29	·	·	·	34	33	·	·	·	38
$O(13,13)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	18	22	21	·	·	24	26	·	·	29	30	·	·	30	35	34	·	·	36	39
$B(15,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	18	22	21	18	·	24	26	23	22	29	30	28	29	30	35	34	34	33	36	39
$P(17,20)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	20	22	21	18	25	26	26	23	22	31	30	28	29	36	37	34	34	38	42	41
$R(22,21)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	20	22	21	18	25	26	26	23	22	31	30	28	29	36	37	34	34	38	42	41
$Q(24,22)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	20	22	21	18	25	26	26	23	22	31	30	28	29	36	37	34	34	38	42	41

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	A	S	I	F	T	O	B	P	R	Q
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	13	12	20	21	22