Esame di Ricerca Operativa - 3 aprile 2008
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

L'impresa Zap produce televisori e aspirapolvere. Le previsioni di vendita per il 2003 sono riportate in tabella. In ogni quadrimestre l'impresa ha a disposizione 5250 ore di lavoro, e tutte le previsioni di vendita relative ad un certo quadrimestre vanno evase entro il termine del quadrimestre.

	Quadrimestre 1	Quadrimestre 2	Quadrimestre 3
televisori	1500	1000	1000
aspirapolvere	1000	3000	3000

Un televisore richiede 2 ore di lavorazione, mentre un aspirapolvere richiede 3 ore. A causa di lavori di ristrutturazione, i televisori non possono essere prodotti durante l'ultimo quadrimestre. Inoltre, la politica aziendale esige che alla fine di ogni quadrimestre siano presenti almeno 100 pezzi di ogni prodotto in magazzino. All'inizio del 2003, sono presenti in magazzino 85 televisori e 120 aspirapolvere. I costi di magazzino ammontano a 50 euro per ogni pezzo che rimane in magazzino alla fine del primo quadrimestre, 70 euro alla fine del secondo e 30 euro alla fine del terzo. L'impresa è disposta a produrre anche in anticipo, pur di soddisfare le richieste del mercato, ma vuole minimizzare i costi di immagazzinamento. Formulare il problema di pianificare la produzione nei tre quadrimestri come problema di PL.

svolgimento.

Per $i = 0, 1, 2, 3$, denotiamo con t_i e con a_i rispettivamente il numero di televisori e di aspirapolvere che si trovano in magazzino alla fine del Quadrimestre i. In particolare, t_0 ed a_0 sono i televisori e gli aspirapolvere in magazzino all'inizio del primo quadrimestre. Per $i = 1, 2, 3$ denotiamo inoltre con t_i^+ e con a_i^+ rispettivamente il numero di televisori e di aspirapolvere che vengono prodotti nel corso del Quadrimestre i.

L'obiettivo é quello di minimizzare i costi C di magazzino

$$\min C = 50\,(t_1 + a_1) + 70\,(t_2 + a_2) + 30\,(t_3 + a_3)\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

condizioni iniziali $t_0 = 85$, $a_0 = 120$.

requisito di disponibilitá minime in magazzino

$$t_1 \geq 100,\ a_1 \geq 100, \qquad t_2 \geq 100,\ a_2 \geq 100, \qquad t_3 \geq 100,\ a_3 \geq 100.$$

vincoli sulla produzione

$$\begin{aligned} 2t_1^+ + 3a_1^+ &\leq 5250, \\ 2t_2^+ + 3a_2^+ &\leq 5250, \\ 3a_3^+ \leq 5250,\ t_3^+ &= 0. \end{aligned}$$

vincoli di non negativitá

$$t_1^+, a_1^+, t_2^+, a_2^+ \geq 0.$$

vincoli di bilancio vendite/produzione

$$\begin{array}{ll} t_1 \leq t_0 - 1500 + t_1^+, & a_1 \leq a_0 - 1000 + a_1^+ \\ t_2 \leq t_1 - 1000 + t_2^+, & a_2 \leq a_1 - 3000 + a_2^+ \\ t_3 \leq t_2 - 1000 + t_3^+, & a_3 \leq a_2 - 3000 + a_3^+ \end{array}$$

Problema 2 (4 punti):

Sia $B = 30$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
peso	47	27	28	48	13	5	17	4	52	22	5	24	22	17	9	13	23	15	20
valore	71	20	15	32	12	6	16	5	30	21	4	22	21	20	11	13	20	12	10

2.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 30$)? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 25$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 29$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 21$?

svolgimento. Dapprima ordino gli oggetti forniti in input per peso crescente, e mi sbarazzo degli oggetti il cui peso eccede 30, ottenendo:

nome	H	M	F	Q	E	R	T	G	P	U	L	O	S	N	B	C
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	17	20	22	22	23	24	27	28
valore	5	4	6	11	12	13	12	16	20	10	21	21	20	22	20	15

Ovviamente non potró mai prendere in una soluzione due elementi entrambi di peso almeno 17, visto che $17 + 17 = 34 > 30$. E quindi posso sempre preferire di prendere P piuttosto che non G, o U, o S, o B, o C. Analogamente, posso rinunciare sempre ad O visto che eventualmente lo posso sostituire con L (nessuna soluzione li puó contenere entrambi). Con questo ho ridotto i miei candidati ai seguenti:

nome	H	M	F	Q	E	R	T	P	L	N
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	13	12	20	21	22

A questo punto compilo la tabella di programmazione dinamica che riportata all'ultima pagina del presente documento.

Sulla base di tale tabella, possiamo fornire le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
30	36=20+11+5	30=17+9+4	P,Q,H
25	26=20+6	22=17+5	P,F
29	31=6+5+20	26=4+5+17	P,H,F
21	25=20 +5	21=17+4	P,H

Problema 3 (4 punti):

Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia massima.

3	-4	4	-4	21	-13	24	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	27	-8	44	-20	23	-39	25

3.1(1pt) quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il primo elemento?

3.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 15-esimo elemento?

3.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 25-esimo elemento?

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$
3	0	4	0	21	8	32	1	17	0	4	0	39	17	23	15	36	2	13	0	27	19	63	43	66	27	52
3	-4	4	-4	21	-13	24	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	27	-8	44	-20	23	-39	25
31	28	32	28	32	11	24	0	16	0	28	24	39	0	19	13	21	0	22	11	66	39	47	3	23	0	25
$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da	arriva a
qualsiasi	66	21	25
include primo	31	1	7
include 15-esimo	36	13	17
include 25-esimo	66	21	25

Problema 4 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

25	16	20	13	18	33	40	64	17	37	65	21	44	31	56	58	22	19	15	37	60	26	41	51	23

4.1(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(2pt) una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 22. Specificare quanto è lunga e fornirla.

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

Decrescente

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
5	2	4	1	3	5	6	6	2	5	6	3	5	4	4	4	3	2	1	3	3	2	2	2	1
25	16	20	13	18	33	40	64	17	37	65	21	44	31	56	58	22	19	15	37	60	26	41	51	23
1	2	2	3	3	1	1	1	4	2	1	3	2	3	2	2	4	5	6	3	2	4	3	3	5
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

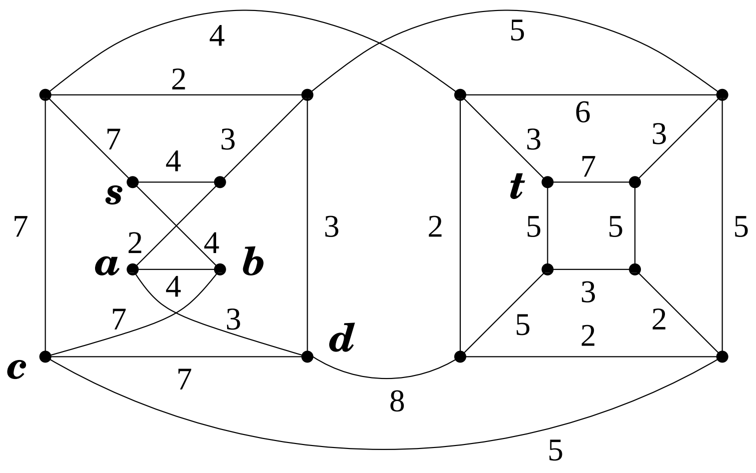
Decrescente

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
decrescente	6	40, 37, 31, 22, 19, 15
N-sequenza	10	25, 20, 18, 17, 65, 44, 31, 22, 19, 15
decrescente con 22	6	40, 37, 31, 22, 19, 15

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga V-sequenza?

Problema 5 (11 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.2.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

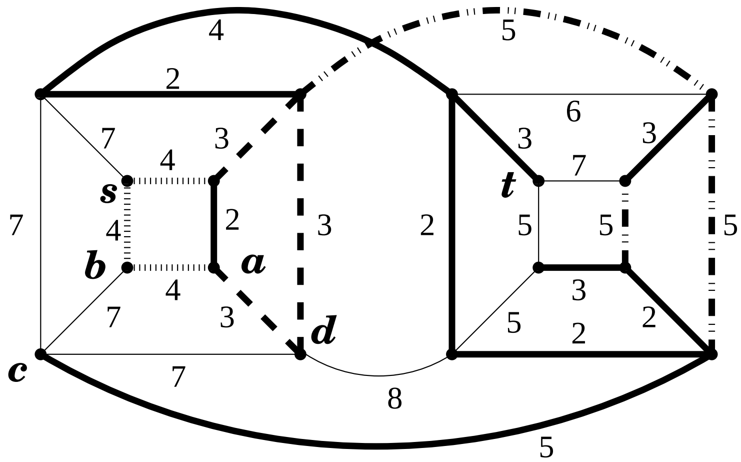
5.3.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.4.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

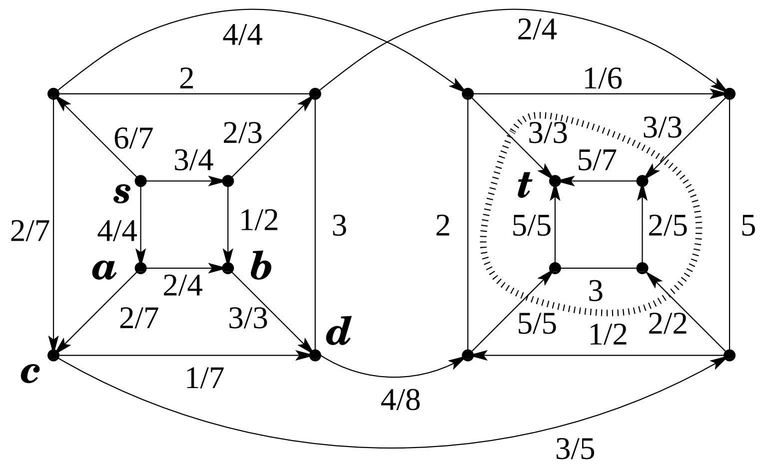
5.5.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

risposte.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono 27 alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 10 archi in linea spessa, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 3 ed in linea tratteggiata, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 4 ed in linea sfumata spessa, più 1 qualsiasi dei 3 archi di peso 5 ed in linea tratto-punteggiata.

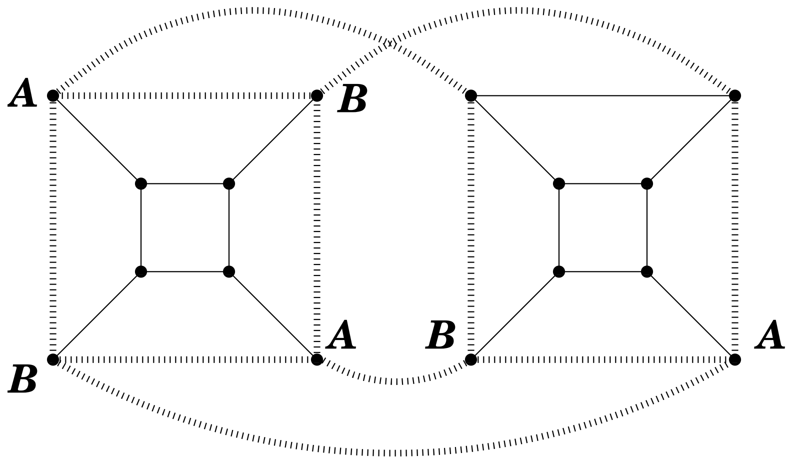


La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 13 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 13 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Il fatto che G non sia planare può essere messo in evidenza esibendo la suddivisione di $K_{3,3}$ in figura.



Problema 6 (7 punti):

$$\max \; -3x_1 - 3x_2 - 9x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 \leq -10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6.1(2pt) Impostare il problema ausiliario.

6.2(2pt) Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

6.3(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

6.4(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability del secondo vincolo? (Per piccole variazioni.)

svolgimento.

Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile "di colla" x_0. Del problema originario ci interessa solamente investigare l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$\max \; -x_0$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_0 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_0 \leq -10 \\ x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Si ha che il problema originario era ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$\max \; -x_0$$
$$\begin{cases} w_1 = 8 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_0 \\ w_2 = -10 - 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_0 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tecnicamente, anche il problema ausiliario non è ad origine ammissibile, ma riusciamo facilmente a procurarci una soluzione di base ammissibile in un singolo pivot: facciamo entrare x_0 in base settandone il valore a 10 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facciamo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo.

$$\max \; -10 - 2x_1 - x_2 + 5x_3 - w_2$$
$$\begin{cases} w_1 = 13 - x_2 - 4x_3 + w_2 \\ x_0 = 10 + 2x_1 + x_2 - 5x_3 + w_2 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione di base attuale non è ancora ottima: il coefficiente della x_3 nella funzione obiettivo vale $5 > 0$, quindi portiamo la x_3 in base. A farle posto è la x_0 che si annulla, quindi il problema originario era ammissibile (basta zero colla). Effettuiamo questo ultimo pivot per il problema ausiliario avendo cura di portare la x_0 fuori base non appena essa si annulla (in caso di dizionario degenere potrei anche decidere di portare fuori base un'altra variabile, ma non sarebbe una buona idea ...).

$$\max \; -x_0$$
$$\begin{cases} w_1 = 10 - \frac{8}{5}x_1 - \frac{9}{5}x_2 + \frac{1}{5}w_2 \\ x_3 = 2 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}w_2 - \frac{1}{5}x_0 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ora che x_0 è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla x_0 per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario. In tale dizionario, la scrittura per la funzione obiettivo è stata ottenuta partendo dalla funzione obiettivo originaria ed utilizzando le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base.

$$\max \; -3x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -18 - \frac{33}{5}x_1 - \frac{24}{5}x_2 - \frac{9}{5}w_2$$
$$\begin{cases} w_1 = 10 - \frac{8}{5}x_1 - \frac{9}{5}x_2 + \frac{1}{5}w_2 \\ x_3 = 2 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}w_2 \\ x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia già ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi) e quindi in questo caso non sono necessari ulteriori passi di pivot.

In termini delle variabili di decisione originarie la soluzione ottima è data da $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ cui corrisponde un valore di -18 per la funzione obiettivo.

Si noti che nella soluzione ottima la w_1 è in base e vale $10 > 0$. Ciò significa che non abbiamo alcun interesse a spostare il primo vincolo. Invece, per ogni unità di incremento del termine noto del secondo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{9}{5}$ (almeno per piccoli incrementi).

Problema 7 (1 punto): Porre il seguente problema di PL in forma standard.

$$\max\ 5\,x_1 + 7\,x_2 - 2\,x_3$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 1x_3 \geq 4 \\ 7x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 9x_2 + 3x_3 \leq 11 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

FORMA STANDARD:

$$\max\ 5\,x_1 + 7\,x_2^+ - 7\,x_2^- + 2\,x_3$$
$$\begin{cases} -4x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- - 1x_3 \leq -4 \\ 7x_1 - 6x_2^+ + 6x_2^- - 2x_3 \leq 7 \\ -7x_1 + 6x_2^+ - 6x_2^- + 2x_3 \leq -7 \\ x_1 + 9x_2^+ - 9x_2^- - 3x_3 \leq 11 \\ 2x_1 + 8x_2^+ - 8x_2^- - x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2^+, x_2^-, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$H(4,5)$	0	·	·	·	5	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$M(5,4)$	0	·	·	·	5	4	·	·	·	9	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$F(5,6)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	·	15	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$Q(9,11)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	·	22	21	·	·	·	26	·	·	·	·	·	·	·
$E(13,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	17	22	21	·	·	23	26	·	·	28	29	·	·	·
$R(13,13)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	18	22	21	·	·	24	26	·	·	29	30	·	·	30
$T(15,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	18	22	21	18	·	24	26	23	22	29	30	28	29	30
$P(17,20)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	20	22	21	18	25	26	26	23	22	31	30	28	29	36
$L(22,21)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	20	22	21	18	25	26	26	23	22	31	30	28	29	36
$N(24,22)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	20	22	21	18	25	26	26	23	22	31	30	28	29	36

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	H	M	F	Q	E	R	T	P	L	N
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	13	12	20	21	22