Esame di Ricerca Operativa - 31 agosto 2006
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE PARZIALE -

Problema 1 (5 punti): Si consideri il seguente problema di PL.

$$\max\ 3\,x_1 - 7\,x_2 + 2\,x_3$$
$$\begin{cases} 4x_1 + \ 5x_2 - \ 1x_3 \ \geq \ 4 \\ 6x_1 - \ 6x_2 + \ 2x_3 \ = \ 7 \\ x_1 + \ 8x_2 + \ 3x_3 \ \leq \ 10 \\ x_1 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

1.1 Scrivere il problema duale.

1.2 Porre il problema primale in forma standard.

problema duale.

$$\min\ 4\,\lambda_1 + 7\,\lambda_2 + 10\,\lambda_3$$
$$\begin{cases} 4\lambda_1 + \ 6\lambda_2 - \ 1\lambda_3 \ \geq \ 3 \\ 5\lambda_1 - \ 6\lambda_2 - \ 8\lambda_3 \ = \ -7 \\ \lambda_1 + \ 2\lambda_2 - \ 3\lambda_3 \ \leq \ 2 \\ \lambda_1 \leq 0, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

primale in forma standard.

$$\max\ 3\,x_1 - 7\,x_2^+ + 7\,x_2^- - 2\,x_3$$
$$\begin{cases} -4x_1 - \ 5x_2^+ + \ 5x_2^- - \ 1x_3 \ \leq \ -4 \\ 6x_1 - \ 6x_2^+ + \ 6x_2^- - \ 2x_3 \ \leq \ 7 \\ -6x_1 + \ 6x_2^+ - \ 6x_2^- + \ 2x_3 \ \leq \ -7 \\ x_1 + \ 8x_2^+ - \ 8x_2^- - \ 3x_3 \ \leq \ 10 \\ x_1, x^+2, x^-2, x_3' \geq 0 \end{cases}$$

Problema 2 (11 punti):

$$\max\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + \ 3x_2 - \ x_3 \ \leq \ 3 \\ x_2 + \ 4x_3 \ \leq \ 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

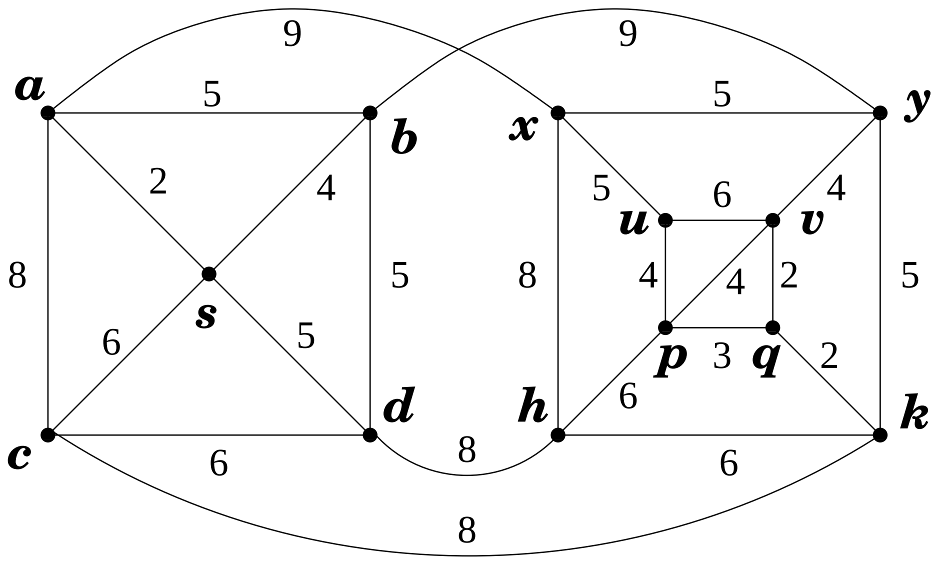
2.1 Risolvere con il metodo del simplesso.

2.2 Se la funzione obiettivo è il profitto di un'attività, quanto saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto del primo vincolo? E per il secondo vincolo? E fino a dove saremmo disposti a pagare tale prezzo per il primo vincolo? Fino a dove saremmo disposti a vendere la risorsa al suo prezzo ombra per il primo e secondo vincolo?

2.3 Di quanto dovremmo alterare il primo coefficiente della funzione obiettivo affinchè la soluzione non sia più ottima?

Non forniamo risoluzione di questo esercizio. Si veda la correzione dello scritto del 4 luglio 2006 dove si decrive in dettaglio come affrontare un esercizio del tutto analogo.

Problema 3 (11 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



3.1. Trovare un albero dei cammini minimi a partire dal nodo s. Disegnarlo.

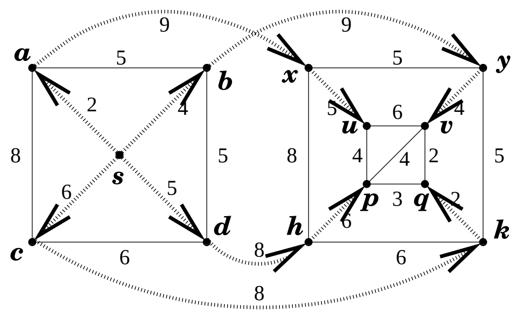
3.2. Indicare quali archi non possano essere rimossi senza allungare almeno un cammino da s ad un qualche altro nodo. Disegnare tali archi ed esprimere a quanto ammonta il loro peso complessivo. Quanti sono gli alberi dei cammini minimi dal nodo s?

3.3. Il grafo rappresentato in figura ammette un ciclo e/o cammino Euleriano? Fornisci un certificato per le tue risposte.

3.4. Il grafo rappresentato in figura è planare? Fornisci un certificato per la tua risposta.

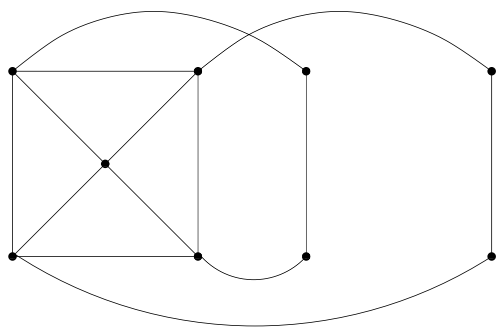
3.5. Il grafo rappresentato in figura è bipartito? Fornisci un certificato per la tua risposta.

alcune risposte.
Un albero dei cammini minimi T_1, come reperito tramite l'algoritmo di Dijkstra, è riportato nella seguente figura.



Ovviamente, la rimozione dal grafo di un qualsiasi arco non facente parte dell'albero dei cammini minimi T_1 non allunga il cammino minimo verso alcun nodo. Si noti come l'arco (h, p) possa essere sostituito dall'arco (q, p) sempre consentendo il raggiungimento di p a costo 19. Tale sostituzione restituisce un secondo albero di cammini minimi T_2. In altre parole, la rimozione dell'arco (h, p) non allunga il cammino minimo verso alcun nodo. Invece, la rimozione di un qualsiasi altro arco dell'albero T_1 da G porterebbe ad allontanare almeno un nodo di G dal nodo s. Non vi sono altri alberi di cammini minimi.

Il grafo riportato in figura non è planare in quanto contiene la seguente suddivisione di K_5.



Il grafo non è bipartito in quanto contiene cicli di lunghezza dispari (ad esempio il triangolo sui nodi s, c, e d).

Problema 4 (9 punti): Si consideri la soluzione $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ del seguente problema.

$$\max\ 3x_1 + 2x_2 + x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_3 \leq 2 \\ x_2 + x_4 \leq 4 \\ x_3 + x_4 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile. Utilizzare gli scarti complementari per verificarne o confutarne l'ottimalità. La soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

svolgimento. Rimando a correzioni di precedenti scritti per esempi di come vada condotta la verifica dell'ammissibilità e di come vada impostato l'utilizzo della teoria degli scarti complementari per reperire una soluzione duale associata alla soluzione primale assegnata. La soluzione primale assegnata risulta in effetti essere una soluzione di base non-degenere in quanto tramite tale procedimento si perviene, tramite la soluzione di un sistema in 3 equazioni e 3 incognite, ad una unica soluzione duale che soddisfa agli scarti complementari congiuntamente alla soluzione primale assegnata. Concretamente, la soluzione duale cui dovreste pervenire se provate a svolgere i conteggi sarebbe: $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 1$ e $y_4 = 0$. Tuttavia, alla verifica di routine, tale soluzione duale non risulta essere ammissibile in quanto essa viola il quarto vincolo $-y_2 + y_4 \geq 1$ del problema duale. Se ne deduce che la soluzione primale assegnata è di base ma non ottima. A riprova e conferma di questo, si potrebbe semplicemente proporre una soluzione primale ammissibile che totalizzi un maggior valore per la funzione obiettivo. E così, guardando al problema primale assegnato con occhi di sfida verso la soluzione proposta si potrebbe reperire un tale certificato osservando che un incremento della x_3 sarebbe possibile (nessuna diseguaglianza contenente la x_3 è soddisfatta ad uguaglianza) e consentirebbe di fare spazio ad un contestuale incremento della x_1 con conseguente guadagno in termini della funzione obiettivo. Io propongo di considerare la soluzione $x'_1 = 3$, $x'_2 = 3$, $x'_3 = 1$, $x'_4 = 1$, che è ammissibile e migliore di quella assegnata. Chi offre di più? Oppure essa è ottima? Tema buono per una prossima volta.