Esame di Ricerca Operativa - 4 luglio 2006
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (6 punti):

Un imprenditore manufatturiero vuole produrre una lega che sia 30% piombo, 30% zinco, e 40% stagno. Sul mercato, sono reperibili le leghe A, B, C, ..., con composizioni e costi come espresso dalla seguente tabella.

Lega	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Mistura Desiderata
% Piombo	10	10	40	60	30	30	30	50	20	30
% Zinco	10	30	50	30	30	40	20	40	30	30
% Stagno	80	60	10	10	40	30	50	10	50	40
Costo [$/Kg]	4.1	4.3	5.8	6.0	7.6	7.5	7.3	6.9	7.3	Min

Ovviamente, l'imprenditore può semplicemente acquistare la lega E da sola ed utilizzarla direttamente, ma essa costa $7.60 al chilo. Se egli impiegasse $\frac{1}{4}$ di chilo per ciascuna delle leghe A, B, C, D, riuscirebbe ad ottenere 1 chilo della composizione 30-30-40 desiderata al costo di $5.05. Dopo alcuni tentativi di questo tipo, l'imprenditore vorrebbe avvalersi di un approccio più sistematico al suo problema. Potresti indicargli come modellare questo suo problema di mix-ottimo come un problema di programmazione lineare?

svolgimento. Il primo passo per una formulazione come problema di PL consiste nell'introdurre 9 variabili di decisione come da seguente tabella. Abbiamo reputato conveniente riportare in tale tabella anche i costi (al chilo) delle varie leghe.

Variabili di decisione									
Lega	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Percentuale	x_A	x_B	x_C	x_D	x_E	x_F	x_G	x_H	x_I
Costo [$/Kg]	4.1	4.3	5.8	6.0	7.6	7.5	7.3	6.9	7.3

L'obiettivo dell'imprenditore é ovviamente quello di ottenere una mistura avente le percentuali richieste in piombo, zinco e stagno, minimizzando nel contempo il costo di ogni chilo di mistura. Si perviane pertanto alla seguente modello:

$$\min 4.1\,x_A + 4.3\,x_B + 5.8\,x_C + 6.0\,x_D + 7.6\,x_E + 7.5\,x_F + 7.3\,x_G + 6.9\,x_H + 7.3\,x_I$$

soggetto ai seguenti vincoli:

non negativitá delle percentuali scelte per il mix $x_i \geq 0$ per ogni $i \in \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$.

normalizzazzione delle percentuali $x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F + x_G + x_H + x_I = 1$.

rispetto percentuale richiesta di piombo

$$10x_A + 10x_B + 40x_C + 60x_D + 30x_E + 30x_F + 30x_G + 50x_H + 20x_I = 30$$

rispetto percentuale richiesta di zinco

$$10x_A + 30x_B + 50x_C + 30x_D + 30x_E + 40x_F + 20x_G + 40x_H + 30x_I = 30$$

rispetto percentuale richiesta di stagno

$$08x_A + 60x_B + 10x_C + 10x_D + 40x_E + 30x_F + 50x_G + 10x_H + 50x_I = 40$$

Problema 2 (12 punti):

$$\max\ 4x_1 + x_2 + 3x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Risolvere con il metodo del simplesso.
- Se la funzione obiettivo è il profitto di un'attività, quanto saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto del primo vincolo? E per il secondo vincolo? E fino a dove saremmo disposti a pagare tale prezzo per il primo vincolo? Fino a dove saremmo disposti a vendere la risorsa al suo prezzo ombra per il primo vincolo?
- Di quanto dovremmo alterare il terzo coefficiente della funzione obiettivo affinchè la soluzione non sia più ottima?

2.1 Risoluzione con il metodo del simplesso:
Il problema è in forma canonica e pertanto gli corrisponde il primo dei seguenti tre tableau. Il problema è ad origine ammissibile e pertanto impiego il metodo del simplesso primale per giungere al tableau ottimo.

$$\begin{array}{c|rrrr} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ w_1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ w_2 & 3 & -1 & \boxed{1} & 3 \\ z & -4 & -1 & -3 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|rrrr} & x_1 & x_2 & w_2 & \\ w_1 & 1 & \boxed{4} & 0 & 1 \\ x_3 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ z & 5 & -4 & 3 & 9 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|rrrr} & x_1 & w_1 & w_2 & \\ x_2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ x_3 & \frac{13}{4} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{13}{4} \\ z & 6 & 1 & 3 & 10 \end{array}$$

Pertanto la soluzione ottima è $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{13}{4}$. Ad essa corrisponde un valore di 10 della funzione obiettivo.

2.2 I valori delle variabili duali (prezzi ombra) sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$. Pertanto:

- per ogni unità di incremento nel termine noto del primo vincolo sono disposto a pagare massimo 1.
- per ogni unità di incremento nel termine noto del secondo vincolo sono disposto a pagare massimo 3.

Si noti come una rapida verifica dell'ammissibilitá delle soluzioni primale ($x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{13}{4}$) e duale ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$) consentirebbe a questo punto di assicurarsi della correttezza dei risultati fin qui prodotti.

2.3 Tuttavia le indicazioni fornite dai prezzi ombra (λ_1 e λ_2) valgono solo per piccoli incrementi. Per scoprire fino a quali entità di incremento tali valori ombra restano indicativi passiamo a considerare il duale. Il tableau del duale all'ottimo può essere ottenuto dal tableau primale all'ottimo come segue:

$$\begin{array}{c} \text{Tableau Primale} \\ \begin{array}{cccccc} & x_1 & w_1 & w_2 & \\ x_2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ x_3 & \frac{13}{4} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{13}{4} \\ z & 6 & 1 & 3 & 10 \end{array} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{Tableau Duale} \\ \begin{array}{cccc} & y_2 & y_3 & \\ y_1 & -\frac{1}{4} & -\frac{13}{4} & 6 \\ \lambda_1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ \lambda_2 & 0 & -1 & 3 \\ z & -\frac{1}{4} & -\frac{13}{4} & 10 \end{array} \end{array}$$

Assumiamo di incrementare di D la disponibilità nel primo vincolo. Il vantaggio nel considerare il duale é che l'unica riga ad essere influenzata da questa modifica nel problema è l'ultima. La nuova riga può essere prodotta attraverso opportune sostituzioni o avvalendosi della PROVA DI CONTROLLO (prova del nove) della PL.

$$\begin{array}{rccc} & (0) & (0) & (0) \\ & \downarrow & \downarrow & \\ & y_1 & \lambda_2 & \\ (0) \rightarrow & -\frac{1}{4} & -\frac{13}{4} & 6 \\ (1+D) \rightarrow & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ (3) \rightarrow & 0 & -1 & 3 \\ z & -\frac{1}{4} & -\frac{13}{4} & 10 \end{array}$$

Ricordiamo che per ogni colonna vale quanto segue: il valore dell'ultimo elemento della colonna si ottiene sommando gli altri elementi della colonna ciascuno moltiplicato per il coefficiente della riga cui appartiene e sottraendo infine il valore del coefficiente associato alla colonna.

Colonna 1: $-\frac{1}{4}(0) - \frac{1}{4}(1+D) + 0(3) - (0) = -\frac{1}{4}(1+D)$
Colonna 2: $-\frac{13}{4}(0) - \frac{1}{4}(1+D) - 1(3) - (0) = -\frac{13}{4} - \frac{1}{4}D$
Colonna 3: $6(0) + (1+D) + 3(3) - (0) = 10 + D$

Pertanto la riga prodotta è:

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}D \qquad -\frac{13}{4} - \frac{1}{4}D \qquad 10 + D$$

Si noti come, ponendo $D = 0$, si ritrovi in effetti la corrispondente riga z del tableau duale di cui sopra. Quindi abbiamo implicitamente condotto la prova di controllo relativamente a quel tableau. L'esito di tale verifica é stato positivo e quindi possiamo concludere sia per la correttezza dei singoli coefficienti dei tableau fin qui prodotti sia per la congruitá con cui la prova di controllo é stata condotta.

Tornando al nostro obiettivo, dobbiamo individuare in quale intervallo per il parametro D i primi due termini della riga sopra computata rimangano tutti non positivi. La risposta è che tale condizione risulta rispettata nell'intervallo $D \geq -1$. Il tableau considerato resta pertanto ottimo se e solo se $D \geq -1$. Possiamo concludere che non viè alcun limite al quantitativo di diponibilità sul primo vincolo che siamo disposti ad acquistare pagando 1 per ogni unità di incremento. Inoltre, in caso di liquidazione di tale disponibilitá, il prezzo a cui vendere sarebbe 1 solo per la prima unitá venduta ma dovrebbe poi essere rivisto verso l'alto.

Si noti tuttavia che la quantità disponibile nel problema di partenza era proprio 1, e quindi, per quel prezzo, siamo disposti ad arrivare fino ad esaurimento della quantità di risorsa disponibile (ma, anche ove fosse possibile, non risulterebbe conveniente andare in carenza di quella risorsa a quel prezzo).

2.4 Nel analizzare la sensitività della soluzione ottima rispetto a modifiche dei coefficienti della funzine obiettivo conviene invece riferirsi al primale.

$$\begin{array}{rccccc} & & (4) & (0) & (0) & (0) \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & & x_1 & w_1 & w_2 & \\ (1) \rightarrow & x_2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ (3+D) \rightarrow & x_3 & \frac{13}{4} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{13}{4} \\ & z & 6 & 1 & 3 & 10 \end{array}$$

Utilizzo nuovamente la regola di controllo
Colonna 1: $\frac{1}{4}(1) + \frac{13}{4}(3+D) - (4) = 6 + \frac{13}{4}D$
Colonna 2: $\frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4}(3+D) - (0) = 1 + \frac{1}{4}D$
Colonna 3: $0(1) + 1(3+D) - (0) = 3 + D$
Colonna 4: $\frac{1}{4}(1) + \frac{13}{4}(3+D) - (0) = 10 + \frac{13}{4}D$

Pertanto la riga prodotta è:

$$6 + \frac{13}{4}D \quad 1 + \frac{1}{4}D \quad 3 + D \quad 10 + \frac{13}{4}D$$

L'intervallo dei valori di D per i quali il tableau indicato resta ottimo coincide con l'intervallo dei valori di D per i quali ciascuno dei primi tre termini della riga sopra computata rimane non negativo. Pertanto il tableau resta ottimo per ogni $D \geq -\frac{24}{13}$, ossia, la soluzione considerata ($x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.) resta ottima fintantochè $D \geq -\frac{24}{13}$.

Problema 3 (10 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

3.1. Trovare un albero ricoprente di peso minimo. Disegnarlo.

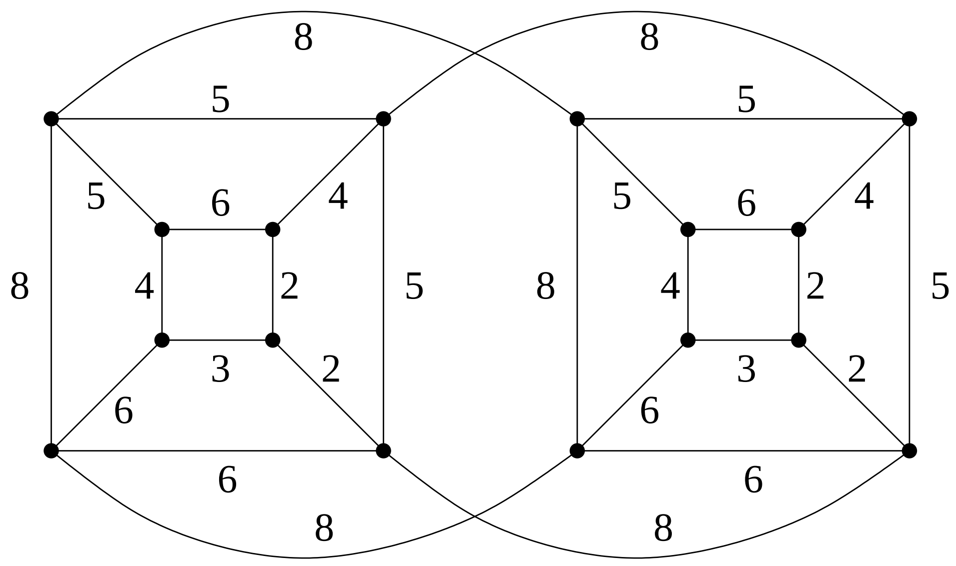
3.2. Indicare quali archi siano contenuti in ogni soluzione ottima, ossia quali archi non possano essere rimossi senza peggiorare la qualità della soluzione ottima. Disegnare tali archi ed esprimere a quanto ammonta il loro peso complessivo.

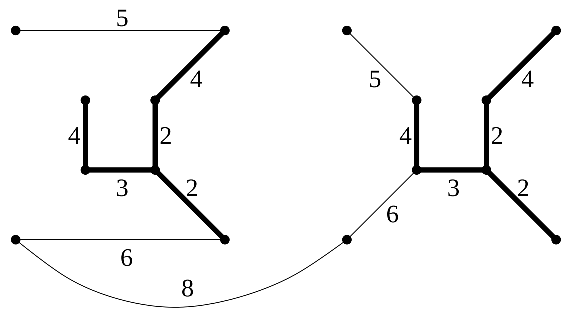
3.3. Il grafo rappresentato in figura ammette un ciclo e/o cammino Euleriano? Fornisci un certificato per le tue risposte.

3.4. Il grafo rappresentato in figura è planare? Fornisci un certificato per la tua risposta.

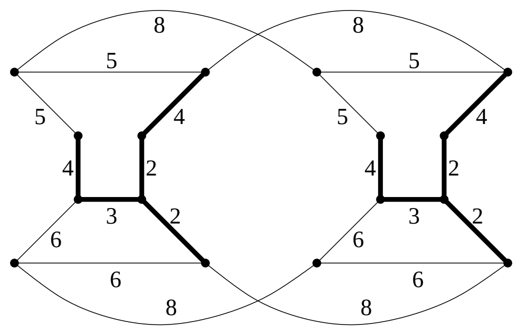
3.5. Il grafo rappresentato in figura è bipartito? Fornisci un certificato per la tua risposta.

risposte.
Un albero ricoprente di peso minimo, come reperito tramite l'algoritmo di Kruskal, è riportato nella seguente figura ed ha peso 60.





Nella seguente figura vengono riportati tutti e soli quegli archi del grafo originario che appartengono ad un qualche albero ricoprente di peso minimo. In tale figura, gli archi contenuti in ogni soluzione ottima sono rappresentati tramite linee molto spesse. Il peso complessivo degli archi contenuti in ogni soluzione ottima ammonta a 30.



Gli alberi di peso minimo sono $64 = 2^4 \cdot 4$ e ciascuno di essi può essere generato aggiungendo i seguenti archi “opzionali” a ciascuno degli archi contenuti in ogni soluzione.

1. uno qualsiasi dei 2 archi di peso 5 disposti a sinistra;

2. uno qualsiasi dei 2 archi di peso 5 disposti a destra;

3. uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 disposti a sinistra;

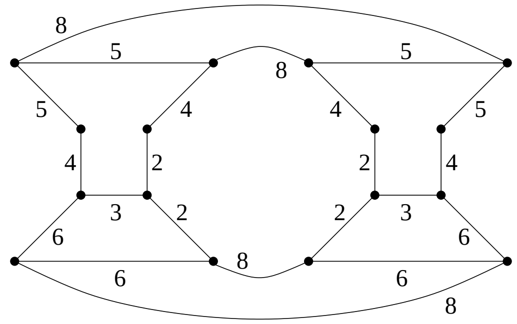
4. uno qualsiasi dei 2 archi di peso 7 disposti a destra;

5. uno qualsiasi dei 4 archi di peso 8.

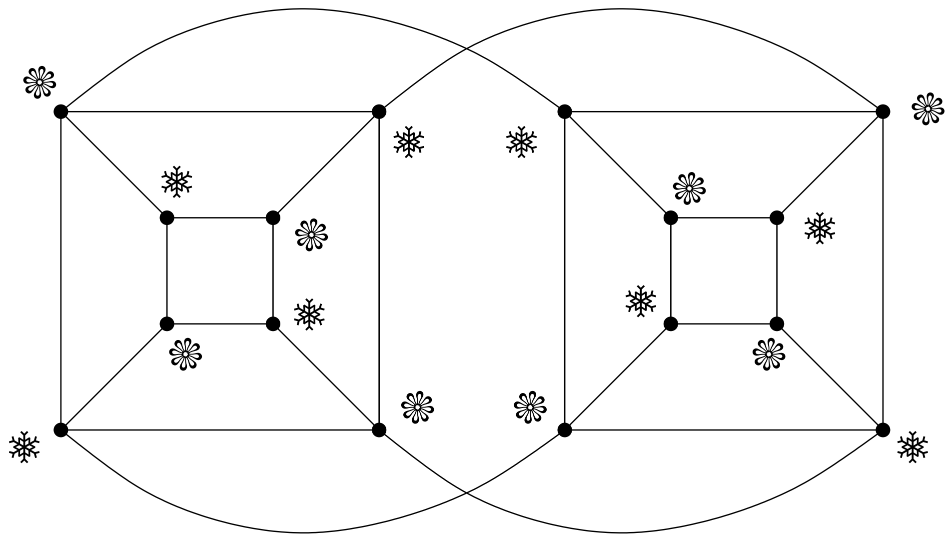
Le 5 scelte di cui sopra sono indipendenti.

Il grafo assegnato non ammette cicli o cammini Euleriani poichè contiene più di 2 nodi di grado dispari (contiene 8 nodi di grado 3 raccolti nei due centri).

Il grafo assegnato è planare poichè i due incroci di archi possono essere entrambi risolti semplicemente flippando di 180^o rispetto al suo asse verticale la parte di destra (oppure quella di sinistra) pervenendo alla rappresentezione planare dello stesso grafo riportata qui sotto.



Infine, il grafo è bipartito poichè ammette una bipartizione dei nodi come illustrata nella seguente figura. (Si osservi che nessun arco ha gli estremi labellati con lo stesso simbolo).



Problema 4 (9 punti): Si consideri la soluzione $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 7$, $x_6 = 0$ del seguente problema.

$$\max\ 18x_1 - 7x_2 + 12x_3 + 5x_4 + 8x_6$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 8x_6 \leq 1 \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 \leq -2 \\ 8x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_6 \leq 4 \\ 4x_1 + 8x_3 + 7x_4 - x_5 + 3x_6 \leq 1 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 - 2x_5 - x_6 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile. Utilizzare gli scarti complementari per verificarne o confutarne l'ottimalità. La soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

svolgimento. Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$\begin{cases} 2(2) - 6(4) + 2(0) + 7(0) + 3(7) + 8(0) = \mathbf{1} \leq 1 \\ -3(2) - (4) + 4(0) - 3(0) + (7) + 2(0) = -3 \leq -2 \\ 8(2) - 3(4) + 5(0) - 2(0) + 2(0) = \mathbf{4} \leq 4 \\ 4(2) + 8(0) + 7(0) - (7) + 3(0) = \mathbf{1} \leq 1 \\ 5(2) + 2(4) - 3(0) + 6(0) - 2(7) - (0) = 4 \leq 5 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente.

$$\max\ y_1 - 2y_2 + 4y_3 + y_4 + 5y_5$$
$$\begin{cases} 2y_1 - 3y_2 + 8y_3 + 4y_4 + 5y_5 \geq 18 \\ -6y_1 - y_2 - 3y_3 + 2y_5 \geq -7 \\ 2y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 8y_4 - 3y_5 \geq 12 \\ 7y_1 - 3y_2 - 2y_3 + 7y_4 + 6y_5 \geq 5 \\ 3y_1 + y_2 - y_4 - 2y_5 \geq 0 \\ 8y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 3y_4 - y_5 \geq 8 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_2 = y_5 = 0$ poichè i vincoli 2 e 5 del primale non sono soddisfatti ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_1, x_2, x_5 > 0$, i vincoli 1,2 e 5 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\begin{cases} 2y_1 + 8y_3 + 4y_4 = 18 \\ -6y_1 - 3y_3 = -7 \\ 3y_1 - y_4 = 0 \end{cases}$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}, 1, 0\right)$ Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. L'ammissibilità segue dal fatto che tutte le variabili assumono valore non negativo e dalla verifica dei rimanenti vincoli del duale.

$$\begin{cases} 2\left(\frac{1}{3}\right) + 5(\left(\frac{5}{3}\right) + 8(1) \geq 12 \\ 7\left(\frac{1}{3}\right) - 2(\left(\frac{5}{3}\right) + 7(1) \geq 5 \\ 8\left(\frac{1}{3}\right) + 2(\left(\frac{5}{3}\right) + 3(1) \geq 8 \end{cases}$$

In conclusione, la soluzione primale assegnata è ottima in quanto ho reperito una soluzione ammissibile per il duale che soddisfa gli scarti complementari. Per la dualità forte, le due soluzioni daranno necessariamente lo stesso valore per la funzione obiettivo.