NOME: .... COGNOME: ....

MATRICOLA: .... FIRMA: ....

Esame di Ricerca Operativa - 24 gennaio 2012
Facoltà di Ingegneria - Udine

Problema 1 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

14	7	9	4	8	24	31	55	7	28	56	11	34	22	49	51	12	10	5	28	53	16	33	45	17	19	18

1.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

1.2(2pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

1.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 12. Specificare quanto è lunga e fornirla.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente		
Z-sequenza		
crescente con 12		

Problema 2 (1+1+4 punti):
Data una sequenza $val_1, val_2, \ldots, val_n$ di valori reali, formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di una sottosequenza strettamente crescente costituita dal massimo possibile numero di elementi (ossia di massima cardinalità). Sapresti formulare come un problema di PLI anche la variante dove invece del numero di elementi presi si fosse interessati a massimizzarne la somma? E sapresti formulare come un problema di PLI anche la ricerca di una Z-sequenza (si veda l'esercizio precedente per una definizione) costituita dal massimo possibile numero di elementi?

Problema 3 (13 punti):
Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, intende portarsi nella sua home H situata nella cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	1	3	0	1	1	0	0	•
B	2	2	0	•	1	•	0	0	0
C	2	0	0	1	0	0	1	1	1
D	0	0	•	0	0	0	•	0	0
E	0	0	1	1	•	1	2	0	2
F	0	1	1	1	2	1	•	•	1
G	3	3	0	1	•	0	0	1	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Supponete poi che il robot, ad ogni passo, decida a caso e con probabilitá uniforme (lancio moneta non truccata) quale movimento base effettuare ogniqualvolta possa scegliere. Quale é la probabilitá che arrivi a casa? Infine, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un valore intero che esprime un guadagno che viene ottenuto se il robot passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare il guadagno complessivo raccolto con la traversata. E come ti organizzeresti per determinare il numero di cammini diversi che ottengano di fatto il massimo guadagno possibile?

3.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

3.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

3.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

3.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–9 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

3.5(4pt) Quale la probabilità che il robot giunga a casa?

3.6(1pt) Quale é il massimo guadagno raccoglibile nella traversata da A–1 a G–9?

3.7(2+2pt) Determinazione numero di cammini ottimi: Quale é il problema generico nel tuo approccio di programmazione dinamica (definizione semantica) e quale la ricorrenza (computo)?

consegna	numero percorsi
A–1 → G–9	
B–3 → G–9	
A–1 → F–6	
passaggio per D–5	
probab. goes home	
massimo valore	

definizione famiglia problemi (1pt) e ricorrenza (1pt)

2+2/30

Problema 4 (8 punti):

$$\max\ 6x_1 - 5x_2 - 3x_3$$
$$\begin{cases} -4x_1 + \ 5x_2 - \ 3x_3 \leq \ 5 \\ 2x_1 - \ 5x_2 + \ x_3 \leq -5 \\ 2x_1 - \ x_2 + \ 2x_3 \leq \ 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1.1(1pt) Impostare il problema ausiliario.

1.2(2pt) Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

1.3(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

1.4(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

1.5(2pt) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

Problema 5 (10 punti):
Con riferimento al seguente problema di PL

$$\max\ 5\,x_{A1} + 6\,x_{A2} + 5\,x_{A3} + 2\,x_{B1} + 1\,x_{B2} + 1\,x_{B3} + 2\,x_{C1} + 2\,x_{C2} + 2\,x_{C3}$$
$$\begin{cases} x_{L1} + \ x_{L2} + \ x_{L3} \leq \ 1 \text{ per } L = A, B, C \\ x_{Ai} + \ x_{Bi} + \ x_{Ci} \leq \ 1 \text{ per } i = 1, 2, 3 \\ x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{C1}, x_{C2}, x_{C3} \geq 0 \end{cases}$$

dai nostri executive managers ci sono state proposte le seguenti soluzioni:
(s1) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A1} = x_{B2} = x_{C3} = 1$
(s2) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A3} = x_{B2} = x_{C1} = 1$;
(s3) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A1} = x_{B1} = x_{C3} = 1$
(s4) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A2} = x_{B1} = x_{C3} = 1$;
(s5) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A2} = x_{B3} = x_{C1} = 1$
(s6) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A3} = x_{A1} = x_{C2} = 1$;
(s7) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A3} = x_{B1} = x_{C2} = 1$
(s8) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A3} = x_{B1} = x_{C2} = -1$;
(s9) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A2} = x_{B1} = 1$
(s10) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A2} = x_{C3} = 1$;
(s11) $x \equiv 0$ eccetto $x_{C3} = 2$
(s12) $x \equiv 0$ eccetto $x_{A1} = x_{B2} = 1$.

5.1(1pt) Determinare quali siano ammissibili.

5.2(2pt) Determinare se una delle soluzioni proposte sia ottima (siate un minimo furbi: non potete farvi gli scarti complementari per ciascuna delle soluzioni proposte).

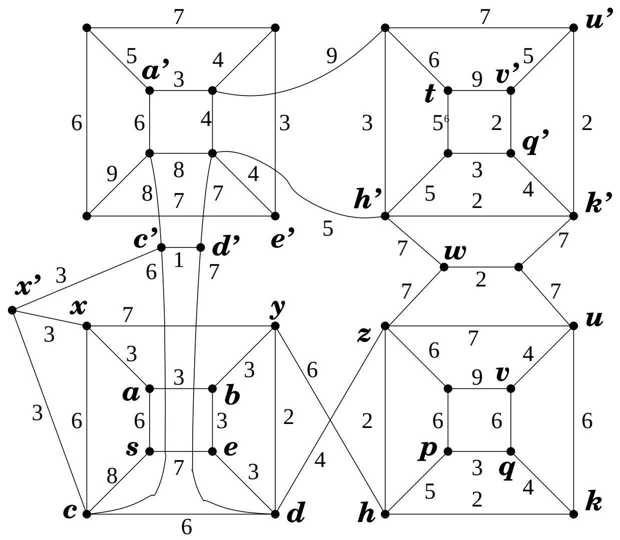
5.3(1pt) Fornire certificato di ottimalità.

5.4(2pt) Per ciascuno dei 6 vincoli, specificare quanto saremmo disposti a pagare per incrementare l'availability su quel vincolo.

5.5(2pt) Dire quali soluzioni siano di base.

5.6(2pt) Dire quali delle soluzioni di base proposte siano adiacenti (raggiungibili con un solo pivot) dalla s1.

Problema 5 (18 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

5.2.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'c$ con un arco $c'x$ e l'arco $d'd$ con un arco $d'y$ è planare oppure no. Se non planare, rimuovere il minimo numero di archi per planarizzarlo.

5.3.**(1+1+1pt)** Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no. Ove non bipartito, rimuovere il minimo numero di archi per bipartizzarlo.

5.4.**(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

5.5.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.6.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.7.**(2pt)** Per i seguenti archi dire, certificandolo, in quale categoria ricadano (contenuti in ogni/nessuna/qualcuna-ma non-tutte le soluzioni ottime): zu, $h'w$, xx'.

5.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.